



सत्यमेव जयते

**INDIAN AGRICULTURAL
RESEARCH INSTITUTE, NEW DELHI**

I.A.R. 1-6.

GIP NLK—H-3 I.A.R.I.—10-3-55—15,000

臺北帝國大學理農學部紀要

第二十五卷 第一號

昭和十四年一月

MEMOIRS
OF THE
FACULTY OF SCIENCE
AND
AGRICULTURE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Vol. XXV, ^{xxvi}No. 1 *only*

JANUARY, 1939



SAEKI, Hideaki :

Studies on Humus-Clay Complexes



PUBLISHED

BY THE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

FORMOSA, JAPAN

PUBLICATION COMMITTEE

Professor Tokuichi SHIRAKI, Dean of the Faculty (*ex officio*)

Professor Ichirô HAYASAKA

Professor Tyôsaburo TANAKA

The MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE, Taihoku Imperial University, are published occasionally by the University, which exchanges them with the publications of other learned bodies and institutions throughout the world. Separate series will be sent to individual research institutions, and complete series to the central libraries of universities and larger institutions. Copies of the Memoirs may also be obtained from MARUZEN COMPANY LTD., Tôkyô, Japan, and THE TAIWAN NICHİ-NICHİ SHIMPÔ-SHA, Taihoku, Formosa, Japan.

All communications regarding the Memoirs should be addressed to the Dean of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imperial University, Taihoku, Formosa, Japan.

STUDIES ON HUMUS-CLAY COMPLEXES

Hideaki SAEKI

(Accepted for publication, October 6, 1938)

CONTENTS

	Page
I. Introduction.	2
II. Condition of the formation of humus complexes with other constituents in mineral soils and their nature.	4
A. Relation between the formation of aluminum or ferric "silico-humates" and hydrogen-ion concentrations.	6
a) Aluminum "silico-humates".	7
b) Ferric "silico-humates".	16
B. Relation between the composition ratio of aluminum or ferric "silico-humates" and hydrogen-ion concentrations.	22
a) Aluminum "silico-humates".	23
b) Ferric "silico-humates".	27
C. Influence of the concentration of silicon, humus, aluminum and iron in mixtures upon the formation and nature of aluminum or ferric "silico-humates"... ..	30
a) Aluminum "silico-humates"	30
b) Ferric "silico-humates"	49
D. Summary.	74
III. Interaction between soil colloids and humus substances	76
A. Experimental.	76
B. Summary.	94
IV. Consideration on the isoelectric relation of soil components.	96
V. Chemical analysis of soil samples.	99
VI. Dissolving of humus substances from various humates at different hydrogen-ion concentrations.	102
A. Humic acids and humates	103
B. Natural soils	110
C. Summary.	118
VII. Dissolving of iron and aluminum from their humates at different hydrogen-ion concentrations.	120

	Page
A. Experimental...	120
B. Summary.	126
VIII. Conductmetric investigations on the reaction of humus substances to other substances	127
A. Experimental.	127
B. Summary.	152
IX. Conductmetric investigations concerning the action of ammonia on various humus substances.	153
A. Humic acids and various humates.	154
B. Natural soils...	165
C. Summary.	172
X. Investigation concerning the migration of ions from humates and soils by electrodialysis.	173
A. Minerals and humus materials.	175
B. Natural soils...	178
C. Summary.	180
XI. Oxidability of humus substances in humates and natural soils.	181
A. Experimental.	181
B. Summary.	185
XII. X-ray investigations on the form of humus substances.	186
A. Experimental.	186
B. Summary.	189
XIII. Summary and conclusion.	190
Literature.	198

I. INTRODUCTION

The practical importance of humus in soils for agriculture has been recognized from old times. Since humus is an intermediate product of the decomposition of organic substances in soils and is continually decomposing, its nature and chemical constitution are not therefore constant. The term humus has had varied usage, principally because very little was known concerning the complicated processes which lead to the formation of the dark colored organic substances in soils. According to recent studies, humus should be used to designate organic matters of soils as a whole, while humus substances or humic matters can be used to describe humus complexes as a whole.

The form of humus substances in soils is not simple and the various forms have been designated. That is, their forms can be generally divided into the kinds following three: 1. Those in a free state, 2. Humates with bases, 3. Complexes with soil components. Although humus substances of the free state are contained to a comparatively large extent in organic acid soils, such as peat soils, they exist also more or less in ordinary arable lands. Humates with various bases also are found in natural soils, and the proportion of humates to total humus substances in soils is variable according to the nature of soils. Since the proportion is not so large in general, humus complexes with soil components must occupy a comparatively large part of humus substances.

The importance of humus in soils is largely owing to these so called "humus-clay complexes". Accordingly the utility of organic matters for soil management is affected principally by the nature and content of humus-clay complexes. Although there are, however, a comparatively large number of studies on humus-clay complexes, only little reference has been made to the form of complexes in soils. It has not yet been clearly proved whether the complex is only the physical mixture or whether it is in the form of the chemical combination between humus substances and soil components. Consequently, the formation of the complex and its genuine nature have not yet been found in detail.

DEMOLON and BARBIER¹²⁾ made the study on the condition of formation and constitution of humus-clay complexes in soils and observed that humic acids were fixed by various amounts of clay, forming a homogeneous flocculation, and thereby concluded that colloidal clay is one element for the fixation of colloidal humus in soils. Recently SPRINGER^(68, 67, 68) has taken a general view of the binding form of humus substances in soils, but he did not discuss it in reference to the form of humus-clay complexes.

The present work, therefore, deals with experiments on the form of humus-clay complexes in soils and the conditions of their formation. These experiments were conducted by means of the chemical,

physico-chemical, colloid-chemical and x-ray methods, using various kinds of humus substances.

The results obtained are shown in this paper.

It is a pleasure to acknowledge the invaluable criticism and continuous encouragement given the author during this investigation by Prof. Kisaburo SHIBUYA, under whose supervision the work has been done. It is the author's pleasant duty to express his cordial thanks to the Foundation for the Promotion of Scientific and Industrial Research of Japan for the subsidy received for research.

II. CONDITION OF THE FORMATION OF HUMUS COMPLEXES WITH OTHER CONSTITUENTS IN MINERAL SOILS AND THEIR NATURE

The main elements, which constitute the frame-work of clay minerals, are generally three, silicon, aluminum, and iron. In earlier times it was assumed that clay minerals belong to amorphous substances, but lately they have been shown by further studies, especially by the x-ray investigation^(21, 28, 33, 34) that the greater part of clay minerals exists rather in a crystalline structure.

These elements in soils can exist in different states, i. e., in a free state, in a physical mixture, or in a chemical combination, according to the difference of the inner and outer condition. From interactions among these elements in their mixtures, reasoning their behavior in soils is a subject of importance and interest. Numerous worthy investigations about these problems recently have been conducted by MATTSON and his co-workers. They treated colloid-chemically the soil and found many facts concerning the behavior of the various soil constituents.

Iron and aluminum, forming a part of the frame-work of soils, show a special character causing the amphoteric nature of their salts, that is, they react as either acids or bases according to the change of hydrogen-ion concentrations of media. The interaction

between iron or aluminum and other soil constituents is therefore complicated by difference of environmental conditions.

As another important constituent of soil colloids organic matters, especially in humus substances, must be mentioned.

It is now definitely recognized that humus has resulted from the decomposition of plant and animal bodies, mainly through the agency of micro-organisms, although the possibility of certain chemical reactions taking place in the process is not excluded. Humus has, therefore, certain specific properties which distinguish it from other natural bodies. Humus does not designate definite chemical compounds, although humus has been divided into various fractions according to the difference of its properties by many investigators.^(4,5,13,14,27,28,45,47,51,53,59,65)

WAKSMAN has said in his publication,⁽⁷²⁾ "The only name warranting preservation is 'Humus,' because of its historical importance; it should be used to designate the organic matter of the soil as a whole. 'Humus substances' or 'humic matter' can be used to describe humus complexes as a whole."

Although the chemical components of humus are not always identical, according to the difference of their origin and treatment, their behavior in relation to other substances is almost identical. Humus substances which originated chiefly from plant residue behave as acids.

There were in the past two opposite opinions respecting the acidity of humus in connection with the humic acid problem. Old chemists, e. g., SPRENGEL, BERZELIUS, MULDER, settled this problem very simply by stating that humus contained an acid or acids. Since van BEMMELEN demonstrated that humus is a colloid, a theory of non-existence of such acid or acids seemed to prevail for a time. CAMERON,⁽⁸⁾ BAUMANN and GULLY⁽³⁾ supported the colloidal theory. This was, however, opposed by TACKE and SCHÜCHTING,⁽⁶⁹⁾ who advocated the existence of real acids in humus. Soon after their disputes, ODEN succeeded in preparing practically pure humic acids and assumed that humic acids combined chemically with ammonia on the basis of his study of the conductivity of humic acid solutions⁽⁴⁷⁾. EHRENBERG and BAHR⁽¹⁵⁾ studied the dissociation-isotherm of the

substance resulting from the combination of humic acids and ammonia and concluded that humic acids are real acids. Recently, KAWAMURA³⁰⁾ supported the real acid theory from the investigation of adsorption isotherms of bases and acids by pure humic acids.

Although it has not yet been made clear whether the acid nature of humus substances is due to replaceable carboxyl hydrogen, or to hydroxyl hydrogen as in the phenols, or to hydro-carbon hydrogen as in aceto-acetic and melonic ester, or to the hydrogen of the water activated through a fixation of the hydroxyl group, humus combines with and neutralizes bases, and resembles in this and other respects silicic, oleic, and other acids. It is distinctly electronegative, migrating toward the anode in a solution of any pH.

Most soil colloids generally consist of silicon, iron, aluminum and humus substances. The mineral part of soil colloids unites with humus substances in a definite condition, forming new combinations whose properties vary with the relative quantity of each component and hydrogen-ion concentrations of media, etc..

A. Relation Between the Formation of Aluminum or Ferric "silico-humates" and Hydrogen-ion Concentrations

Since the work of the early investigators, BILLITER,⁽⁷⁾ BILTZ⁽⁸⁾ and others, silica has been known to be electronegative, and from the fact that colloidal solutions of the oxides of aluminum and iron as usually prepared by the method of GRAHAM⁽²³⁾ were found to be electropositive, these oxides are generally, but erroneously, dealt with as electropositive materials. These oxides are, in the terminology of MICHAELIS,⁽⁴⁴⁾ ampholytoids (ampholytes), being isoelectric in the absence of electrolytes at a pH of about 7 to 8. On the acid side of their isoelectric points they become increasingly electropositive, while in lower hydrogen-ion concentration than the points they evidently become electronegative.

Soil colloids are amphoteric substances and the reason for this has been explained by MATTSON as follows: Soil colloids are partial

combinations of weak acids such as silicic or humic acids, and ampholytes such as iron and aluminum, consequently there are acidic hydrogen- and basic hydroxyl radicals which have not yet taken part in the above combination. The existence of these radicals gives the amphoteric nature to soils.⁽³¹⁾ The formation and nature of such a new combination, as above mentioned, is affected by varying conditions. MATTSON examined the relation between silicon and iron or aluminum, and humus substances and iron or aluminum, and ascertained that these combinations also are ampholytes having isoelectric points, and that the nature of the combination is changed by various factors.

The present chapter deals with the experiment concerning the relation between the formation of complexes in mixtures of silicon, humus substances, iron or aluminum, and pH values of mixtures.

a) Aluminum "silico-humates"

Materials used in the experiment: silicon, aluminum and humus substances. These three were applied in the form of Na_2SiO_3 , $\text{AlCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, and Na-humate as in MATTSON's experiment.⁽⁴⁰⁾ Sodium silicate and aluminum chloride were chemically as pure as possible. As the sample of humus substances the sodium salt of Merck's humic acid was employed, for humic acids are the main part of humus substances and have a definite chemical nature.

At first the base exchange capacity and the chemical equivalent of Merck's humic acid were determined by the following procedure. A sample of Merck's humic acid which contained 1.27 per cent of ash was treated on the filter with a normal solution of neutral calcium acetate until the filtrate gave a neutral reaction. Then the sample was treated once with calcium chloride. It was then washed until the Cl-ion reaction disappeared. The Ca was then displaced with 1 per cent hydrochloric acid and the Ca determined in the filtrate.⁽⁴¹⁾

From the above experiment it was found that the base exchange capacity of Merck's humic acid was 3.53 milliequivalents per gram,

and the equivalent weight was 290. According to ODEN's description⁴⁷⁾ the chemical equivalent of Merck's humic acid lies generally between 200 and 300.

Na-humate solution was prepared by adding the same gram equivalent of sodium hydroxide to a known weight of Merck's humic acid.

The order of the mixing of these three substances was carried out according to the following three combinations.

1) Entrance of aluminum into the system containing silicon and humus: $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{Na-humate}) + \text{AlCl}_3$.

2) Entrance of humus into the system containing silicon and aluminum: $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{AlCl}_3) + \text{Na-humate}$.

3) Entrance of silicon into the system containing humus and aluminum: $(\text{Na-humate} + \text{AlCl}_3) + \text{Na}_2\text{SiO}_3$.

The procedure of mixing these substances is described in detail below. Accurately measured portions of the two solutions, A containing the last substance, and B containing the equal volume of the first two substances to be mixed, were placed in separate flasks. Total volume of each solution in A and B flasks was 20 cc.. The mixing was rapidly done by pouring the content of one of the flasks into the other and then back into the first, then again into the second, and finally into a large Jena test tube.

The precipitating zone was found in a preliminary test by running one of the solutions into the other from a burette until a rapid flocculation was observed. The pH of the systems was adjusted by adding a little amount of sodium hydroxide or hydrochloric acid before mixing these solutions.

The flocculations after the solutions were mixed and after they were allowed to stand over night were recorded in tables. The content of the tube was then shaken and used for the cataphoresis measurements after MATTSON's microscopic method⁽³⁷⁾ under the current of 100 volts.

The pH value of the content was determined by means of chinhydrone- or antimony-electrode method.

Further, the electric conductivity of a series of mixtures with different pH was observed.

The flocculation amounts at different hydrogen-ion concentrations were compared with each other by the height of flocculates.

The mutual ratio of quantities of silicon, aluminum and humus in this experiment was 5:2.5:1 millimol ratio respectively. The ratio of silica to alumina became therefore 2.0. ROBINSON has said concerning the silica-alumina ratio of soils in his publication⁽⁵³⁾ that any attempt to indicate a critical limit of silica-sesquioxide ratios in clays is necessarily provisional, but there is some justification for considering a molecular silica-sesquioxide ratio of 2.0 as significant.

The results obtained in the experiment are shown in tables 1 to 6 and fig. 1.

TABLE 1.

Relation between the formation of flocculates and hydrogen-ion concentrations

The $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{Na-humate}) + \text{AlCl}_3$ -System

A. 5.0 millimols AlCl_3 in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

2.0 millimols Na-humate in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours	Over night				Cataph.	
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.	ν , sec. v cm.	pH
1	20	0.25 HCl	ppt		light yellow	ppt	colorles	22	65	+0.20	3.2
2	20	0.13 HCl	"		"	"	"	22	65	+0.35	3.3
3	20	0.0	"		"	"	light yellow	20	59	+0.52	3.3
4	20	5.0	"		light brown	"	yellow	18	53	+1.05	3.4
5	20	10.0	"		"	"	"	12	35	+1.75	3.5
6	20	15.0	"		light yellow	"	colorles	26	76	+1.51	3.6
7	20	17.5	"	21	colorles	"	"	34	100	+0.30	4.7
8	20	18.0	"	20	"	"	"	34	100	+0.10	5.0
9	20	18.5	"	19	"	"	"	34	100	-0.09	5.4
10	20	19.0	"	23	"	"	"	34	100	-0.34	5.6
11	20	19.5	"		light yellow	"	"	32	94	-0.50	5.8
12	20	20.0	"		yellow	"	light yellow	26	76	-0.55	6.0
13	20	25.0	"		light brown	"	yellow	13	38	-0.83	6.6
14	20	30.0	clear		brown	clear	brown	0	0		7.9
15	20	35.0	"		"	"	"	0	0		

TABLE 2.

Relation between the formation of flocculates and hydrogen-ion concentrations

The ($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{AlCl}_3$) + Na-humate—System

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours	Over night				Cataph.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.	Color of super- natant liquid	Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.	$\mu/\text{sec.}$ v, cm.	
1	20	10.0 HCl	ppt		light yellow	ppt	colorless	18	51	-0.80	2.1
2	20	5.0 HCl	"		"	"	"	19	54	-0.71	2.2
3	20	0.0	"		"	"	"	19	54	-0.68	2.2
4	20	5.0	"		"	"	"	20	57	-0.40	2.7
5	20	10.0	"		"	"	"	21	60	± 0.00	3.0
6	20	15.0	"		"	"	"	20	57	+0.35	3.2
7	20	20.0	"		light brown	"	yellow	15	43	+0.81	3.4
8	20	22.5	"		"	"	"	14	40	+1.50	3.6
9	20	25.0	"		yellow	"	light yellow	25	71	+1.15	3.8
10	20	27.5	"		light yellow	"	colorless	30	86	+0.80	3.9
11	20	30.0	"	22	colorless	"	"	32	91	+0.65	4.1
12	20	31.0	"	20	"	"	"	35	100	+0.14	5.0
13	20	32.0	"	19	"	"	"	35	100	-0.58	6.0
14	20	33.0	"		light brown	"	yellow	24	71	-0.68	6.2
15	20	34.0	"		"	"	"	18	51	-1.02	6.4
16	20	35.0	"		brown	"	brown	8	24	-1.16	6.8
17	20	40.0	turbid		"	"	"	trace	trace	-1.85	6.9
18	20	45.0	clear		"	clear	"	0	0		

TABLE 3.

Relation between the formation of flocculates and hydrogen-ion concentrations

The (Na-humate+AlCl₃)+Na₂SiO₃-SystemA. 10.0 millimols Na₂SiO₃ in L.

B. 2.0 millimols Na-humate and

5.0 millimols AlCl₃ in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours	Over night				Cataph. v/sec. v cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt	11	light yellow	ppt	colorles	13	37		1.4
2	20	20.0 HCl	"	15	"	"	"	14	40	-0.97	2.2
3	20	15.0 HCl	"	23	"	"	"	16	46	-0.85	2.6
4	20	10.0 HCl	"	24	"	"	"	22	63	-0.65	2.8
5	20	6.0 HCl	"	29	"	"	"	22	63	-0.53	2.9
6	20	5.5 HCl	"	23	"	"	"	22	63	-0.20	2.9
7	20	5.0 HCl	"	17	colorles	"	"	23	66	+0.05	3.0
8	20	4.5 HCl	"	20	light yellow	"	"	22	63	+0.25	3.1
9	20	3.5 HCl	"	15	"	"	"	21	60	+0.84	3.1
10	20	2.5 HCl	"	14	"	"	"	20	57	+1.01	3.1
11	20	0.0	"	12	yellow	"	light yellow	18	51	+1.62	3.2
12	20	10.0	"		"	"	"	13	37	+1.70	3.3
13	20	20.0	"		light yellow	"	yellow	10	29	+1.76	3.5
14	20	30.0	"		yellow	"	light yellow	13	37	+1.36	3.5
15	20	40.0	"		"	"	"	16	46	+1.23	3.6
16	20	48.5	"		light yellow	"	colorles	26	74	+1.07	4.0
17	20	49.0	"		colorles	"	"	33	94	+1.02	4.2
18	20	49.5	"	20	"	"	"	34	97	+0.93	4.4
19	20	50.0	"	19	"	"	"	35	100	+0.27	4.7
20	20	50.5	"	18	"	"	"	35	100	±0.00	5.2
21	20	51.0	"	16	"	"	"	35	100	-0.41	5.9
22	20	55.0	"		brown	"	brown	18	51	-0.60	6.4
23	20	65.0	"		"	"	"	7	20	-0.98	6.8
24	20	75.0	clear		"	clear	"	0			7.1
25	20	100.0	"		"	"	"	0			

TABLE 4.

Conductivity of mixtures with different hydrogen-ion concentrations

The $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{Na-humate}) + \text{AlCl}_3$ -SystemA. 5.0 millimols AlCl_3 in L.B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

2.0 millimols Na-humate in L. *

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH millimols	pH	t Apparent conduct. of mixtures $\cdot 10^{-4}$ Mho	n Conduct. of NaOH in mixtures $\cdot 10^{-4}$ Mho	Real conduct. of mixtures: (t-n) $\cdot 10^{-4}$ Mho
3	20	0.0	3.3	15.8	0	+15.8
4	20	5.0	3.3	16.3	4.9	+11.4
5	20	10.0	3.4	16.8	9.6	+ 7.2
6	20	15.0	3.6	17.3	14.4	+ 2.9
7	20	17.5	4.7	17.6	16.7	+ 0.9
8	20	18.0	5.0	17.7	17.2	+ 0.5
9	20	18.5	5.4	17.7	17.7	\pm 0.0
10	20	19.0	5.6	18.0	18.2	- 0.2
11	20	19.5	5.8	18.4	18.5	- 0.1
12	20	20.0	6.0	19.0	19.1	- 0.1
13	20	25.0	6.6	23.6	23.7	- 0.1

TABLE 5.

Conductivity of mixtures with different hydrogen-ion concentrations

The $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{AlCl}_3) + \text{Na-humate}$ -System

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH millimols	pH	t Apparent conduct. of mixtures $\cdot 10^{-4}$ Mho	n Conduct. of NaOH in mixtures $\cdot 10^{-4}$ Mho	Real conduct. of mixtures: (t-n) $\cdot 10^{-4}$ Mho
3	20	0.0	2.2	40.2	0	+40.2
4	20	5.0	2.7	36.8	4.9	+31.9
5	20	10.0	3.4	34.5	9.6	+24.9
6	20	15.0	3.8	33.0	14.4	+18.6
7	20	20.0	3.8	32.0	19.1	+12.9
9	20	25.0	3.8	31.0	23.7	+ 7.3
11	20	30.0	4.1	29.2	28.4	+ 0.8
12	20	31.0	5.0	29.0	29.3	- 0.3
14	20	33.0	6.2	31.0	31.2	- 0.2
16	20	35.0	6.8	33.7	33.8	- 0.1
17	20	40.0	6.9	38.0	38.6	- 0.6
18	20	45.0		43.2	43.4	- 0.2

TABLE 6.
Conductivity of mixtures with different hydrogen-ion concentrations
The $(\text{Na-humate} + \text{AlCl}_3) + \text{Na}_2\text{SiO}_3$ -System

A. 10.0 millimols Na_2SiO_3 in L.
B. 2.0 millimols Na-humate and
5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH millimols	pH	t Apparent conduct. of mixtures $\cdot 10^{-1}$ Mho	n Conduct. of NaOH in mixtures $\cdot 10^{-4}$ Mho	Real conduct. of mixtures: (t-n) $\cdot 10^{-4}$ Mho
11	20	0.0	3.2	38.4	0.0	+38.4
13	20	20.0	3.4	48.5	22.1	+26.4
14	20	30.0	3.5	53.0	37.5	+15.5
15	20	40.0	3.6	56.6	46.6	+10.0
17	20	49.0	4.2	65.6	62.0	+ 3.6
19	20	50.0	4.7	64.8	63.0	+ 1.8
20	20	50.5	5.3	64.3	64.0	+ 0.3
22	20	55.0	6.4	68.8	69.0	- 0.2
23	20	65.0		81.2	81.4	- 0.2
24	20	75.0		91.6	91.8	- 0.2
25	20	100.0		123.1	123.9	- 0.5

In the above experiment the influences of various hydrogen-ion concentrations, which varied from pH 1.4 to the alkaline side, upon the complex formation were examined. In the zone lower than pH 7 the flocculation always occurred, while in the alkaline side there was none.

When the pH value of mixtures was extremely low, the resultant flocculates possessed strong negative charge. Increasing the pH value eventually decreased the negative charge, and finally, near pH 3.0, showed no electrical charge. A further increase of pH reversed the charge positively and the positive charge reached a maximum value at about pH 3.5, then the charge decreased eventually to zero at about pH 5.2. Upon increasing pH more, the charge of particles reversed again negatively. Near the neutral point, however, flocculates disappeared entirely.

Accordingly, it was found that the complex resulting from these mixtures possesses two isoelectric points, and that the first point lies near pH 5.2, and the second is isoelectric near pH 3.0. The isoe-

lectric point is, according to MICHAELIS⁽⁴⁴⁾, the point at which ampholytes dissociate an equal number of anions and cations.

MATTSON⁽³⁹⁾ has reported an isoelectric pH of 8.1 for a mixture of aluminum chloride and sodium hydroxide, and reported further that in the $\text{AlCl}_3 + \text{Na}_2\text{SiO}_3$ -system with ratio of $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 = 7.5 : 5$ millimols the isoelectric pH is 6.3, in the $\text{AlCl}_3 + \text{Na-humate}$ -system with ratio of $\text{Al}_2\text{O}_3 : \text{humus} = 8 : 3$ millimols⁽⁴⁰⁾ there were two isoelectric points, i.e., pH 5.5 and a certain lower pH. Systems consisting of silicon, aluminum and humus were isoelectric at lower pH than those of $\text{AlCl}_3 + \text{NaOH}$, $\text{AlCl}_3 + \text{Na}_2\text{SiO}_3$ or $\text{AlCl}_3 + \text{Na-humate}$ system, although the concentration of the substances was not the same. The reason for this is that the SiO_3^- or HSiO_3^- and humate-ion, which was combined instead of the Cl-ion in the flocculates, dissociates less in the flocculates than the Cl-ion, consequently the pH of the system must be more depressed in order to dissociate to the degree similar to that of the original Cl-ion.

Among silicates, phosphates and humates the ability to depress the isoelectric point of ampholytes varies in the following order⁽⁴²⁾: Silicates < Phosphates < Humates. It is therefore supposed from the above order that in colloidal complexes the degree of dissociation of phosphates is lower than that of silicates, and those of humates lower than phosphates, and that humates react as acids most strongly of the three.

There are two isoelectric points, as seen above, in systems containing humus, and the same phenomenon has been observed by MATTSON⁽⁴²⁾ in aluminum and ferric humate systems. This was not, however, observed in aluminum and ferric "phosphates" and "silicates." The reason for such a difference in behavior may be due to the colloidal nature of humus complexes themselves.

The explanation has been given as follows by MATTSON^{(41), (43)} in his experiment with aluminum and ferric humate systems. When the pH in the phosphate and silicate systems is lowered these complexes become increasingly electropositive because the diffusible Cl-ions, highly dissociated by the complexes, enter in ever-increasing

numbers until the complexes undergo a complete molecular and ionic dispersion. In the humate system, the effect of a lowering of the pH will be in two directions. The amphoteric sesquioxide component will become more strongly electropositive as the number of Cl-ions in combination increases and the positive charge of the complexes will therefore increase at first. But as the solubility of this component increases with the chloridation it becomes quantitatively weaker and the complexes as a whole will grow less positive or more negative because the negative component (humus) remains colloid dispersed in the complexes.

In the table 1 the second isoelectric point could not be found. The reason for this is that the pH range in the system was not extended to the second isoelectric pH.

The difference of the influence of hydrogen-ion concentrations upon the formation of the complexes was not noticeable among these three systems, i.e.,

- 1) $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{Na-humate}) + \text{AlCl}_3$ -system
- 2) $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{AlCl}_3) + \text{Na-humate}$ -system
- 3) $(\text{Na-humate} + \text{AlCl}_3) + \text{Na}_2\text{SiO}_3$ -system.

It is therefore concluded, that the order of mixing of these substances, such as silicates, aluminum salts and humates, will not give noticeable effects upon the formation of aluminum "silico-humates."

The change of the conductivity of the systems, which is due to the variation of hydrogen-ion concentrations, is as described in the tables 4 to 6. "t" in the fifth column in the tables shows a conductivity of the solution, in which both A and B solutions have been mixed, at various pH values. "n" in the sixth column indicates the conductivity of NaOH itself which was added to the solution in order to change the pH value. The last column shows the difference, that from "t," "n" was subtracted; accordingly it indicates the change of the interaction among the three substances in the system. The depression of the conductivity which was expressed by the three substances themselves took place generally with the increase of pH of the system, because the flocculation occurred more and more com-

pletely with increase of pH values. Thereafter the electrical charge reached ± 0 , which means that the conductivity of the system became equal to that of sodium hydroxide itself which is contained in this system. These relationships are shown graphically as follows :

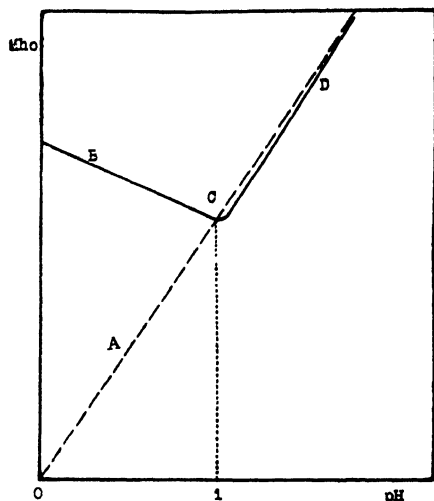


Fig. 1.

Relationship between the conductivity and pH of the system.

Line A: Conductivity of NaOH in the system.

Curve B: Conductivity of the three substances in the system.

Point C: Point of intersection of the conductivity line of the three substances with that of the NaOH

Point i: Isoelectric point.

Curve D: Conductivity of excess of NaOH which had no more effect upon the complex formation. This line will join line A finally.

The point C, at which the curve B intersected the straight line A, lies near the isoelectric pH, i. e., point i. This indicates that the complex was almost completely formed at this hydrogen-ion concentration of the system.

b) Ferric "silico-humates"

In this experiment, as amphoteric substances a ferric compound was used instead of aluminum. Three elements, therefore, were applied in the form of Na_2SiO_3 , $\text{FeCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ and Na-humate respectively. To prevent the precipitation of hydroxide of iron from depending upon its hydrolysis, the ferric chloride solution was stored in the state of a concentrated solution. The other samples were the same as those applied in the preceding experiment.

By varying the order of mixing of these three substances the following three systems were formed, namely,

- 1) ($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{Na-humate}$) + FeCl_3 -system
- 2) ($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{FeCl}_3$) + Na-humate-system
- 3) (Na-humate + FeCl_3) + Na_2SiO_3 -system.

The experiment with these systems was held after the method similar to that in the preceding section.

The results obtained are shown in tables 7 to 12.

TABLE 7.

Relation between the formation of flocculates and hydrogen-ion concentrations

The ($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{Na-humate}$) + FeCl_3 —System

A. 5.0 millimols FeCl_3 in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

2.0 millimols Na-humate in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. μ /sec. v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	20.0 HCl	ppt		yellow	ppt	light yellow	15	45	+0.60	1.8
2	20	10.0 HCl	"		"	"	"	14	42	+0.73	1.9
3	20	5.0 HCl	"		"	"	"	12	36	+0.85	2.0
4	20	0.0	clear		brown	clear	brown	0	0		2.2
5	20	5.0	"		"	"	"	0	0		2.3
6	20	10.0	"		"	"	"	0	0		2.5
7	20	15.0	ppt		light brown	ppt	light yellow	5	15	+0.98	3.0
8	20	15.5	"		light yellow	"	colorless	25	76	+0.74	3.1
9	20	16.0	"	35	"	"	"	31	94	+0.20	3.7
10	20	16.2	"	26	colorless	"	"	33	100	+0.10	3.8
11	20	17.0	"	28	"	"	"	33	100	-0.35	4.4
12	20	17.5	"		light yellow	"	"	31	94	-0.56	5.0
13	20	18.0	"		yellow	"	light yellow	22	94	-0.82	5.4
14	20	18.5	"		"	"	"	20	60	-0.95	5.8
15	20	19.0	"		light brown	"	yellow	7	22	-1.25	6.2
16	20	19.5	turbid		brown	"	brown	1	3	-1.25	6.4
17	20	20.0	clear		"	"	"	trace	trace	-1.83	6.6
18	20	25.0	"		"	clear	"	0	0		8.0

TABLE 8.

Relation between the formation of flocculates and hydrogen-ion concentrations

The $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{FeCl}_3) + \text{Na-humate}$ —System

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. μ/sec. v cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	20.0 HCl	ppt		brown	ppt	yellow	14	41	+0.82	1.8
2	20	15.0 HCl	"		"	"	"	13	38	+0.85	1.9
3	20	10.0 HCl	"		"	"	"	10	30	+0.91	2.0
4	20	5.0 HCl	clear		"	clear	brown	0	0		2.1
5	20	0.0	"		"	"	"	0	0		2.2
6	20	5.0	"		"	"	"	0	0		2.4
7	20	10.0	"		"	"	"	0	0		2.6
8	20	13.5	"		"	"	"	0	0		2.9
9	20	14.0	ppt		"	ppt	yellow	4	12	+1.20	3.0
10	20	14.5	"		"	"	"	10	30	+0.85	3.0
11	20	15.0	"		"	"	light yellow	15	45	+0.25	3.1
12	20	15.3	"		"	"	colorles	28	82	+0.13	3.5
13	20	15.5	"	28	colorles	"	"	34	100	+0.05	3.9
14	20	16.0	"	32	light yellow	"	"	33	97	-0.10	4.1
15	20	16.5	"	39	brown	"	"	31	91	-0.50	4.5
16	20	20.0	"		"	"	brown	trace	trace	-1.36	7.2
17	20	25.0	clear		"	clear	"	0	0		7.5

TABLE 9.

Relation between the formation of flocculates and hydrogen-ion concentrations

The (Na-humate+FeCl₃) + Na₂SiO₃-SystemA. 10.0 millimols Na₂SiO₃ in L.

B. 2.0 millimols Na-humate and

5.0 millimols FeCl₃ in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours	Over night				Cataph.	
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.	Color of super- natant liquid	Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.	μ /sec. v cm.	pH
1	20	20.0 HCl	ppt		yellow	ppt	yellow	14	41	+0.68	1.7
2	20	15.0 HCl	"		"	"	"	13	38	+0.74	1.8
3	20	10.0 HCl	"		"	"	"	12	36	+0.84	1.9
4	20	5.0 HCl	turbid		brown	turbid	brown	0	0		2.0
5	20	0.0	"		"	"	"	0	0		2.3
6	20	5.0	"		"	"	"	0	0		2.4
7	20	7.5	"		"	"	"	0	0		2.5
8	20	10.0	"		"	"	"	0	0		2.7
9	20	12.5	"		"	"	"	0	0		2.9
10	20	15.0	ppt		light yellow	ppt	colorless	28	82	+0.79	3.2
11	20	15.5	"	30	colorless	"	"	34	100	+0.08	3.9
12	20	16.0	"	27	"	"	"	34	100	+0.00	4.0
13	20	16.5	"	23	"	"	"	34	100	-0.28	4.3
14	20	17.0	"	25	yellow	"	light yellow	23	68	-0.50	4.8
15	20	17.5	"		"	"	"	15	45	-0.65	5.0
16	20	18.0	"		"	"	"	10	30	-0.88	5.4
17	20	19.0	"		brown	"	brown	5	15	-1.03	5.7
18	20	20.0	"		"	"	"	3	9	-1.15	6.1
19	20	25.0	clear		"	clear	"	0	0		7.1

TABLE 10.

Conductivity of mixtures with different hydrogen-ion concentrations

The $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{Na-humate}) + \text{FeCl}_3$ -SystemA. 5.0 millimols FeCl_3 in L.B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and 2.0 millimols Na-humate in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH millimols	pH	^t Apparent conduct. of mixtures .10 ⁻⁴ Mho	ⁿ Conduct. of NaOH in mixtures .10 ⁻⁴ Mho	Real conduct. of mixtures: (^t - ⁿ) .10 ⁻⁴ Mho
4	20	0.0	2.2	20.5	0.0	+20.5
5	20	5.0	2.3	23.1	4.9	+18.2
6	20	10.0	2.5	28.5	9.6	+18.9
7	20	15.0	3.0	26.9	14.4	+12.5
8	20	15.5	3.1	23.0	14.8	+ 8.2
9	20	16.0	3.7	20.9	15.3	+ 5.6
10	20	16.5	3.8	16.0	15.7	+ 0.3
11	20	17.0	4.4	15.9	16.2	- 0.3
12	20	17.5	5.0	15.7	16.7	- 1.0
13	20	18.0	5.4	16.8	17.2	- 0.4
14	20	18.5	5.8	17.2	17.7	- 0.5

TABLE 11.

Conductivity of mixtures with different hydrogen-ion concentrations

The $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{FeCl}_3) + \text{Na-humate}$ -System

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and 5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH millimols	pH	^t Apparent conduct. of mixtures .10 ⁻⁴ Mho	ⁿ Conduct. of NaOH in mixtures .10 ⁻⁴ Mho	Real conduct. of mixtures: (^t - ⁿ) .10 ⁻⁴ Mho
5	20	0.0	2.2	23.3	0.0	+23.3
6	20	5.0	2.4	24.2	4.9	+19.3
7	20	10.0	2.6	22.0	9.6	+12.4
8	20	13.5	2.9	21.2	12.9	+ 8.3
9	20	14.0	3.0	20.0	13.4	+ 6.6
10	20	14.5	3.0	19.6	13.9	+ 5.7
11	20	15.0	3.1	19.1	14.4	+ 4.7
12	20	15.3	3.5	17.5	14.6	+ 2.9
13	20	15.5	3.9	15.2	14.8	+ 0.4
14	20	16.0	4.1	15.0	15.3	- 0.3
15	20	16.5	4.5	15.2	15.7	- 0.5
16	20	20.0	7.2	17.5	19.1	- 1.6
17	20	25.0	7.5	21.5	23.7	- 2.2
18	20	30.0	8.3	27.8	29.0	- 1.2

TABLE 12.

Conductivity of mixtures with different hydrogen-ion concentrations

The (Na-humate+FeCl₃) + Na₂SiO₃-SystemA. 10.0 millimols Na₂SiO₃ in L.B. 2.0 millimols Na humate and
5.0 millimols FeCl₃ in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc.+ NaOH millimols	pH	t Apparent conduct. of mixtures .10 ⁻⁴ Mho	n Conduct. of NaOH in mixtures .10 ⁻⁴ Mho	Real conduct. of mixtures: (t-n) .10 ⁻⁴ Mho
5	20	0.0	2.3	23.3	0.0	+23.3
6	20	5.0	2.4	22.8	4.9	+18.1
8	20	10.0	2.7	20.8	9.6	+11.2
10	20	15.0	3.2	20.4	14.4	+ 6.0
11	20	15.5	3.9	15.4	14.8	+ 0.6
13	20	16.5	4.3	15.6	16.1	- 0.5
14	20	17.0	4.8	16.2	16.6	- 0.6
15	20	17.5	5.0	16.5	17.1	- 0.6
16	20	18.0	5.4	16.5	17.6	- 1.1
18	20	20.0	6.1	18.3	19.1	- 0.8
19	20	25.0	7.1	21.4	23.7	- 2.3

The relation between the change of the pH value and the formation of the flocculate which described in the tables 7 to 9 indicated almost similar tendency to that of the aluminum system. These mixtures in the ferric system, however, showed so high a dispersity between the pH 2.0 and 2.9, that no flocculation took place.

In these systems an isoelectric point was found at about pH 4.0, which lay on more acidic side than that of the aluminum system, and at that point an almost complete formation of the flocculate took place.

The isoelectric pH of these systems was lower than that of other systems, i. e., FeCl₃+NaOH, FeCl₃+Na₂SiO₃ and FeCl₃+Na-humate system, which was examined by MATTSON and others. This phenomenon is due to the same reason as that described in the aluminum system.

The amount of flocculates in all the mixtures was reversely proportional to the electrical charge of the flocculate.

The order of mixing of three substances, such as silicates, ferric

salts and humates, gave no noticeable effect to the formation of ferric "silico-humates," as well as in the case of aluminum "silico-humates."

The change of the conductivity of the system resulting from varying hydrogen-ion concentrations is as described in tables 10 to 12, and the result shows the same tendency as the aluminum system.

The difference between the aluminum and ferric systems in the above experiment is pointed out as follows.

1) The aluminum system showed two isoelectric points, whereas the ferric system was isoelectric at one point. But it is supposed that the ferric system also shows perhaps the second isoelectric point at a lower pH than the lowest pH range in the experiment, because the positive charge of flocculates in the ferric system at low pH zone was decreasing with depression of the pH value of mixtures.

2) The isoelectric pH of the aluminum system was always higher than that of the ferric system. Hydroxide of aluminum is a stronger base and a weaker acid than that of iron. The latter therefore leaves a stronger acid residue in various amphoteric complexes. Ferric "phosphates," "silicates," and "silico-humates" therefore show a low isoelectric pH because they contain more active H-ions than aluminum complexes.

3) In the aluminum system flocculations took place until low pH was reached, whereas in the ferric system a molecular solution having an extremely high dispersity at a zone of pH 2.0 to 2.9 appeared.

In the aluminum system the maximum positive charge took place at the point of pH 3.5, while in the ferric system it appeared that it occurred at the range of pH 2.0 to 2.9, for at the pH of 2.0 to 2.9 the molecular high dispersion took place, and at both ends of this pH range the positive charge of flocculates was highest.

B. Relation Between the Composition Ratio of Aluminum or Ferric "silico-humates" and Hydrogen-ion Concentrations

In the above experiments, the ferric and aluminum system with the concentration ratio of Si:Al or Fe:Humus = 5:2.5:1 millimols

per L. was isoelectrically flocculated at certain hydrogen-ion concentrations. At that point the most desirable flocculation occurred, but the system became highly dispersible with increasing positive or negative charge. Accordingly, the mutual ratio of the quantity of these three substances in the flocculate must be changed with the variation of hydrogen-ion concentrations of mixtures.

In order to determine this relationship the next experiment was conducted.

a) Aluminum "silico-humates"

Several of mixtures with varying hydrogen-ion concentrations were prepared by the method similar to that in the previous experiment.

Since the liquid cannot be removed from the floc without disturbing the equilibrium, the composition of the floc was determined by analyzing the supernatant liquid.

Silica and alumina were determined by the gravimetric method, and for the estimation of humus substances the hydrogen peroxide method recommended by SHIBUYA^(62, 63) was applied.

The results obtained are summarized in the following tables 13 to 15 and figure 2.

The quantity of these substances which entered into flocculates at various hydrogen-ion concentrations was nearly proportional to the flocculation amount in mixtures, although the quantity was different among these substances. At the first isoelectric pH, therefore, the most favorable flocculation was found and at that pH value all of the humus and aluminum added entered into flocculates, while only the 60 to 70 per cent of the total silica. Thus, the ratio of the flocculated silica to the total silica was considerably smaller than that in the case of humus, even if the total original quantity of silica in the mixture was larger than that of humus. The reason for this is than SiO_3 -ions are strongly displaced by humate-ions, causing the low dissociation of humate-ions in complexes. That this displacement of SiO_3

TABLE 13.

Relation between the degrees of flocculation of each constituent and pH values of mixtures

The ($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{Na-humate}$) + AlCl_3 —System

A. 5.0 millimols AlCl_3 in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and 2.0 millimols Na-humate in L.

No.	Ratio of floc.	Cataph. $\mu/\text{sec.}$ v/cm.	pH	Flocculate			Per cent of floc. amt. on basis of original amount		
				$\frac{\text{SiO}_2}{\text{Al}_2\text{O}_3}$ ratio	$\frac{\text{g. Humus}}{\text{m. mol Al}_2\text{O}_3}$	$\frac{\text{g. Humus}}{\text{m. mol SiO}_2}$	SiO_2	Al_2O_3	Humus
1	65	+0.20	3.2	1.2	0.4	0.4	13	20	59
2	65	+0.35	3.3	1.2	0.4	0.4	12	19	55
3	59	+0.52	3.3	1.2	0.4	0.4	11	18	50
4	53	+1.05	3.4	1.2	0.4	0.3	11	17	43
5	35	+1.75	3.5	1.1	0.3	0.3	10	16	35
6	76	+1.51	3.6	1.1	0.3	0.2	18	26	51
7	100	+0.30	4.7	1.2	0.1	0.1	62	95	83
8	100	+0.10	5.0	1.3	0.1	0.1	69	99	98
9	100	-0.09	5.4	1.3	0.1	0.1	69	99	98
10	100	-0.34	5.6	1.4	0.1	0.1	68	95	83
11	94	-0.50	5.8	1.3	0.1	0.1	63	87	82
12	76	-0.55	6.0	1.3	0.1	0.1	54	75	59
13	38	-0.83	6.6	1.3	0.1	0.1	25	35	30
14	0		7.9	0.0	0.0	0.0	0	0	0

TABLE 14.

Relation between the degree of flocculation of each constituent and pH values of mixtures

The ($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{AlCl}_3$) + Na-humate—System

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and 5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Ratio of floc.	Cataph. $\mu/\text{sec.}$ v/cm.	pH	Flocculate			Per cent of floc. amt. on basis of original amount		
				$\frac{\text{SiO}_2}{\text{Al}_2\text{O}_3}$ ratio	$\frac{\text{g. Humus}}{\text{m. mol Al}_2\text{O}_3}$	$\frac{\text{g. Humus}}{\text{m. mol SiO}_2}$	SiO_2	Al_2O_3	Humus
3	54	-0.68	2.2	0.1	0.4	4.1	1	28	73
4	57	-0.40	2.7	0.3	0.4	1.5	3	29	78
5	60	± 0.00	3.0	0.3	0.4	1.0	5	32	80
6	57	+0.35	3.2	0.3	0.4	1.0	5	32	80
7	43	+0.81	3.4	0.3	0.3	1.0	4	27	78
8	40	+1.50	3.6	0.3	0.3	1.0	3	29	79
9	71	+1.15	3.8	1.0	0.3	0.4	17	36	91
10	86	+0.80	3.9	0.8	0.2	0.2	25	72	93
11	91	+0.65	4.1	1.0	0.2	0.2	41	87	94
12	100	+0.14	5.0	1.3	0.1	0.1	62	99	100
13	100	-0.58	6.0	1.3	0.1	0.1	50	87	97
14	71	-0.68	6.2	1.3	0.1	0.1	47	83	83
15	51	-1.02	6.4	1.3	0.1	0.1	43	72	70
16	24	-1.16	6.8	1.3	0.1	0.1	21	36	36
17	trace	-1.85	6.9						
18	0			0.0	0.0	0.0	0	0	0

TABLE 15.

Relation between the degree of flocculation of each constituent and pH values of mixtures

The (Na-humate + AlCl_3) + Na_2SiO_3 -System

A. 10.0 millimols Na_2SiO_3 in L.

B. 2.0 millimols Na-humate and
5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Ratio of floc.	Cataph. ν /sec. ν /cm.	pH	Flocculate			Per cent of floc. amt. on basis of original amount		
				$\frac{\text{SiO}_2}{\text{Al}_2\text{O}_3}$ ratio	g. Humus m. mol Al_2O_3	g. Humus m. mol SiO_2	SiO_2	Al_2O_3	Humus
6	63	-0.20	2.9	0.3	0.4	1.6	3	28	69
7	66	+0.05	3.0	0.3	0.4	1.0	4	30	75
8	63	+0.25	3.1	0.3	0.4	1.0	4	29	73
11	51	+1.62	3.2	0.3	0.4	1.0	3	29	73
12	37	+1.70	3.3	0.3	0.4	1.0	3	27	70
13	29	+1.76	3.5	0.3	0.4	1.0	3	26	68
15	46	+1.23	3.6	0.3	0.4	1.0	5	32	80
16	74	+1.07	4.0	1.0	0.4	0.4	17	38	90
17	94	+1.02	4.2	1.0	0.2	0.3	30	75	93
18	97	+0.93	4.4	1.2	0.2	0.2	55	95	97
19	100	+0.27	4.7	1.3	0.2	0.1	62	98	99
20	100	± 0.00	5.2	1.3	0.2	0.1	65	100	99
21	100	-0.41	5.9	1.3	0.1	0.1	60	97	97
22	51	-0.60	6.4	1.3	0.1	0.1	27	52	50
23	20	-0.98	6.8	1.3	0.1	0.1	10	16	15
24	0		7.1	0.0	0.0	0.0	0	0	0

by humus takes place in nature has been shown by the work of TAMM⁽⁷⁰⁾.

On the other hand, at the second isoelectric point the proportion of the flocculated substances to their original amount was very much lower than that of the first isoelectric point. Namely, at this point was fixed 4 to 5 per cent of silica, 30 per cent of aluminum and 70 to 80 per cent of humus.

In mixtures having a higher hydrogen-ion concentration the quantity of the silica which was fixed in flocculates was noticeably lower than that of the humus. It perhaps depends upon the fact that humus has a higher colloidalness in comparison with silica.

It will be noted that aluminum (iron also) appeared in the solu-

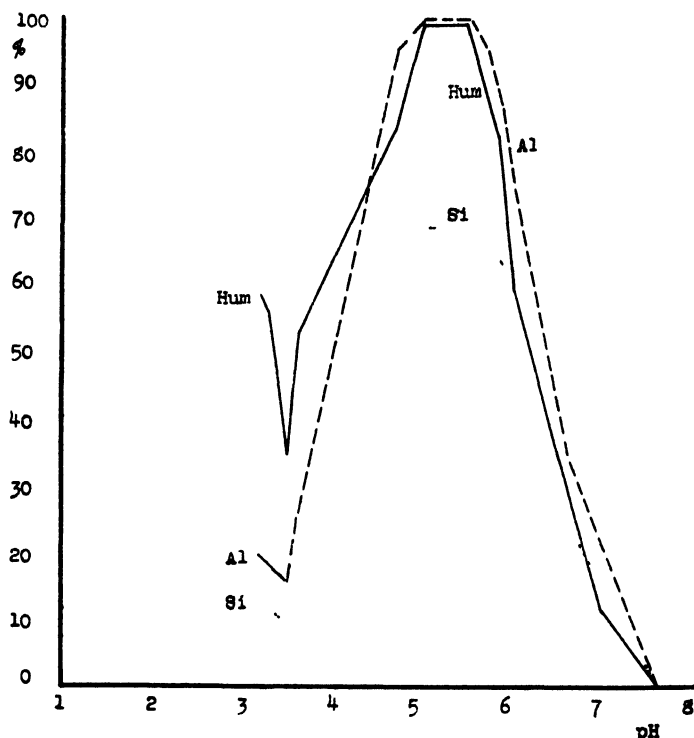


Fig. 2

Relation between the degree of flocculation of each constituent and pH values of mixtures. (Aluminum "silico humates")

tion in increasing quantities with lowering of the pH, but it is doubtful whether they dissociate as free metal cations. MATTSON^{38, 39)} has supposed the possibility of the existence of some complex cation of aluminum with silicon.

The silica-alumina ratio of the flocculate showed higher value with increasing of the pH, and at the first isoelectric point the composition ratio of the flocculate was of $(\text{SiO}_2)_{1.3} \cdot (\text{Al}_2\text{O}_3)_{1.0}$ and at the second point $(\text{SiO}_2)_{0.3} \cdot (\text{Al}_2\text{O}_3)_{1.0}$. The ratio of Al_2O_3 (millimol) to humus (g) in the flocculate was reversely proportional to the pH value, and at the first isoelectric point the ratio was about 0.2 and at the second point 0.4. The ratio of SiO_2 (millimol) to humus (g) in the flocculate also showed a reversed proportion to the pH value.

Although the total amount of humus in the system flocculated at the first isoelectric point, it is doubtful whether all the humus combined with the flocculate as its component. MATTSON has indicated that in the isoelectric precipitates of ferric or aluminum humates free humus exists to some extent.⁽⁴¹⁾

The silica, in the higher concentration, shows a tendency to flocculate when sodium silicate is slightly acidified. In a system of low dilution of silica, therefore, it is possible that a part of free silica may also flocculate together with isoelectric flocculates. This may happen in concentrated mixtures which has extraordinarily high silica-alumina or silica-humus ratios.

b) Ferric "silico-humates"

The results obtained in the ferric system are given in the following tables 16 to 18 and figure 3.

TABLE 16.

Relation between the degree of flocculation of each constituent and pH values of mixtures

The $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{Na-humate}) + \text{FeCl}_3$ —System

A. 5.0 millimols FeCl_3 in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and 2.0 millimols Na-humate in L.

No.	Ratio of floc.	Cataph. $\mu/\text{sec. v cm.}$	pH	Flocculate			Per cent of floc. amt. on basis of original amount		
				$\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$ ratio	$\frac{\text{g. Humus}}{\text{m. mol Al}_2\text{O}_3}$	$\frac{\text{g. Humus}}{\text{m. mol SiO}_2}$	SiO_2	Al_2O_3	Humus
6	0		2.5	0.0	0.0	0.0	0	0	0
7	15	+0.98	3.0	1.0	1.1	1.1	3	7	45
8	76	+0.74	3.1	1.1	0.4	0.4	9	20	53
9	94	+0.20	3.7	1.2	0.3	0.1	48	89	80
10	100	+0.10	3.8	1.3	0.2	0.1	58	98	96
11	100	-0.35	4.4	1.3	0.2	0.1	60	98	96
12	94	-0.56	5.0	1.3	0.2	0.1	58	98	94
13	67	-0.82	5.4	1.3	0.1	0.1	50	90	78
14	60	-0.95	5.8	1.3	0.1	0.1	40	72	62
15	22	-1.25	6.2	1.3	0.1	0.1	28	48	40
16	3	-1.25	6.4	1.3	0.1	0.1	14	24	21
17	trace	-1.83	6.6						
18	0		8.0	0.0	0.0	0.0	0	0	0

TABLE 17.

Relation between the degree of flocculation of each constituent and pH values of mixtures

The $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{FeCl}_3) + \text{Na-humate}$ —System

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and 5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Ratio of floc.	Cataph. $\nu/\text{sec.}$ $\nu/\text{cm.}$	pH	Flocculate			Per cent of floc. amt. on basis of original amount		
				SiO_2 Al_2O_3 ratio	$\frac{\text{g. Humus}}{\text{m. mol Al}_2\text{O}_3}$	$\frac{\text{g. Humus}}{\text{m. mol SiO}_2}$	SiO_2	Al_2O_3	Humus
8	0		2.9	0.0	0.0	0.0	0	0	0
9	12	+1.20	3.0	0.2	0.2	0.9	3	37	46
11	45	+0.85	3.1	0.5	0.2	0.4	9	44	52
12	82	+0.13	3.5	0.6	0.2	0.2	18	77	61
13	100	+0.05	3.9	1.3	0.2	0.1	66	99	99
14	97	-0.10	4.1	1.3	0.2	0.1	66	99	99
15	91	-0.50	4.5	1.0	0.1	0.1	40	92	76
16	trace	-1.36	7.2						
17	0		7.5	0.0	0.0	0.0	0	0	0

TABLE 18.

Relation between the degree of flocculation of each constituent and pH values of mixtures

The $(\text{Na-humate} + \text{FeCl}_3) + \text{Na}_2\text{SiO}_3$ —System

A. 10.0 millimols Na_2SiO_3 in L.

B. 2.0 millimols Na-humate and 5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Ratio of floc.	Cataph. $\nu/\text{sec.}$ $\nu/\text{cm.}$	pH	Flocculate			Per cent of floc. amt. on basis of original amount		
				SiO_2 Al_2O_3 ratio	$\frac{\text{g. Humus}}{\text{m. mol Al}_2\text{O}_3}$	$\frac{\text{g. Humus}}{\text{m. mol SiO}_2}$	SiO_2	Al_2O_3	Humus
9	0		2.9	0.0	0.0	0.0	0	0	0
10	82	+0.79	3.2	1.2	0.3	0.3	48	88	81
11	100	+0.08	3.9	1.3	0.2	0.1	58	98	96
12	100	± 0.00	4.0	1.3	0.2	0.1	62	100	99
13	100	-0.28	4.3	1.3	0.2	0.1	58	98	98
14	68	-0.50	4.8	1.3	0.2	0.1	54	90	91
15	45	-0.65	5.0	1.3	0.2	0.1	36	63	60
16	30	-0.88	5.4	1.3	0.2	0.1	28	42	42
17	15	-1.03	5.7	1.3	0.1	0.1	20	25	20
18	9	-1.15	6.1	1.4	0.1	0.1	9	11	10
19	0		7.1	0.0	0.0	0.0	0	0	0

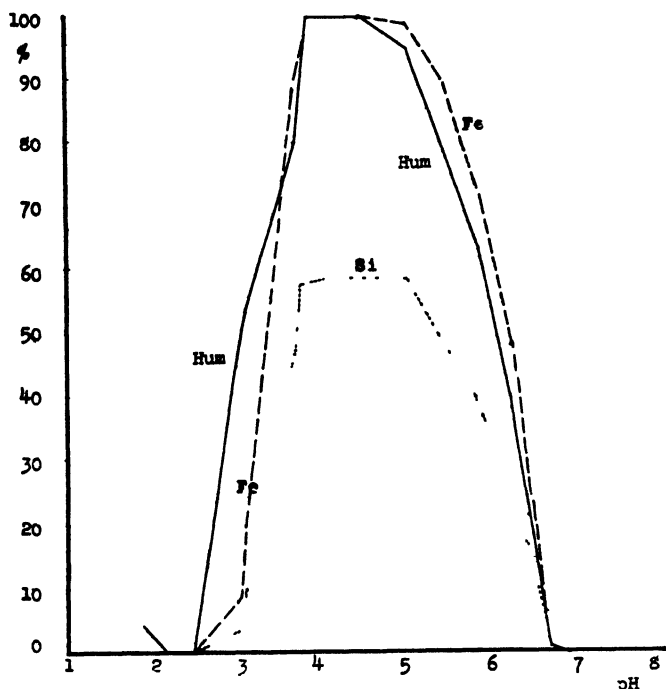


Fig. 3.

Relation between the degree of flocculation of each constituent and pH values of mixtures. Ferric "silico humates"

The relationship between the amount of these three substances which were fixed in the flocculate and the hydrogen-ion concentration of the mixture was almost similar to the case of the aluminum system, and it showed a steep convex curve as given in the figure 3.

The silica-iron ratio of the flocculate showed higher value with increasing of the pH, and at the isoelectric pH the ratio became $(\text{SiO}_2)_{1.3} \cdot (\text{Fe}_2\text{O}_3)_{1.0}$. The ratio of Fe_2O_3 (millimol) to humus (g) in the flocculate was reversely proportional to the pH value and at the isoelectric pH the ratio was about 0.2. These ratios found in the present system were also equal to those of the aluminum. The ratio of SiO_2 (millimol) to humus (g) in the flocculate also showed a reversed proportion to the pH.

C. Influence of the Concentration of Silicon, Humus, Aluminum and Iron in Mixtures Upon the Formation and Nature of Aluminum and Ferric "silico-humates"

In the preceding experiment the formation and nature of aluminum or ferric "silico-humates" in mixtures having the concentration ratio of $\text{SiO}_2:\text{Al}_2\text{O}_3$ or $\text{Fe}_2\text{O}_3:\text{Humus}=5:2.5:1$ millimols was observed.

In general, however, the nature of amphoteric complexes is influenced by the change in concentration ratios among the amphoteloid, acidoid and basoid in systems. In the case of aluminum or ferric "silico-humates" also, therefore, their nature must be perhaps influenced by the change of mutual ratios of the three constituents in systems.

a) Aluminum "silico-humates"

The experiment was carried out by mixing varying proportions of silicon, humus and aluminum as described in the preceding experiment. The pH was adjusted to a suitable value by adding sodium hydroxide or hydrochloric acid, as the case required, before mixing these solutions.

The proportion of the three constituents in mixtures was varied as follows:

No.	$\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus}$ (millimol ratio)		
1	1.3	: 2.5	: 1
2	2.5	: 2.5	: 1
3	5	: 2.5	: 1
4	10	: 2.5	: 1
5	5	: 0.6	: 1
6	5	: 1.3	: 1
7	5	: 2.5	: 1
8	5	: 5	: 1
9	5	: 2.5	: 0.3
10	5	: 2.5	: 0.5
11	5	: 2.5	: 1
12	5	: 2.5	: 2
13	5	: 2.5	: 4

The following subjects were determined by means of the method similar to that in the preceding experiment.

- 1) Amount of flocculates formed at various pH values.
- 2) pH zone of the formation of flocculates.
- 3) Cataphoretic relation.
- 4) pH values of systems.
- 5) Quantity of the three constituents flocculated.

The results are shown in tables 19 to 29.

For the sake of convenience in comparing the results obtained, these data are summarized in the following figures 4 to 6.

From these experiments were obtained the following results. In all the mixtures with various concentration ratios of the constituents, the flocculation occurred at certain hydrogen-ion concentrations, but

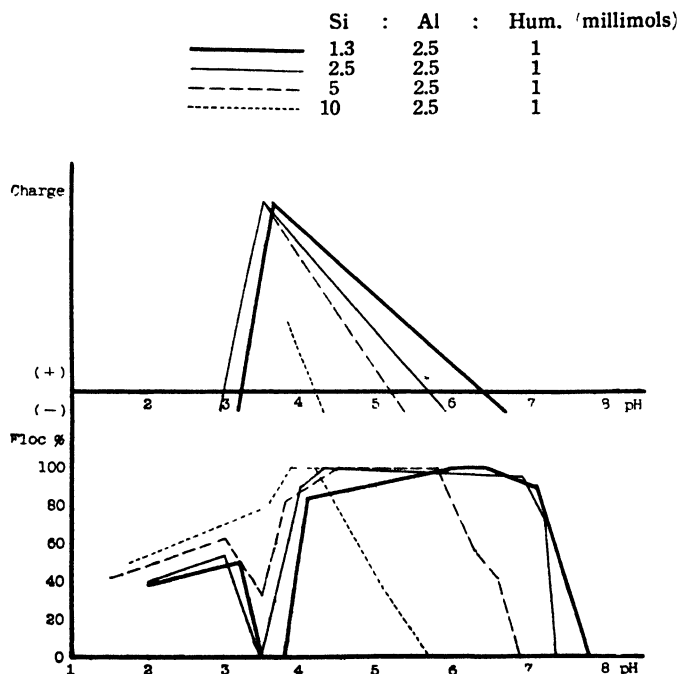


Fig. 4.

Relation between the electrical charge and the degree of flocculation of mixtures with various ratios of constituents.
($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{AlCl}_3 + \text{Na-humate}$)

Si : Al : Hum. (millimols)

5	5	1
5	2.5	1
5	1.3	1
5	0.6	1

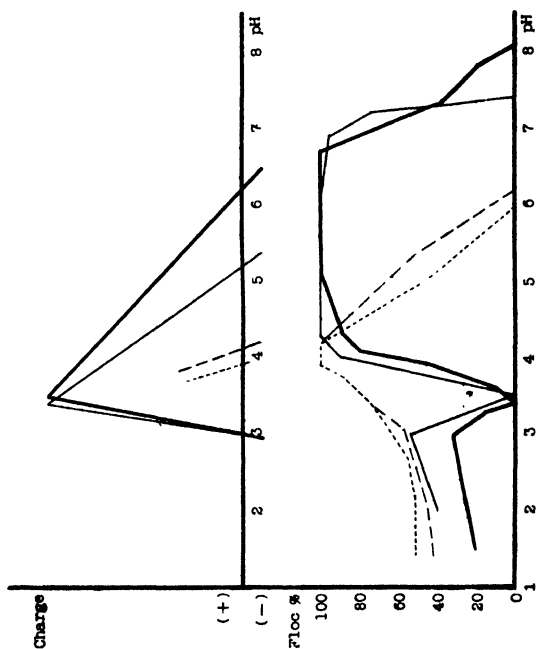


Fig. 5.

Relation between the electrical charge and the degree of flocculation of mixtures with various ratios of constituents.

($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{AlCl}_3 + \text{Na-humate}$)

Si : Al : Hum. (millimols)

5	2.5	0.3
5	2.5	0.5
5	2.5	2
5	2.5	4

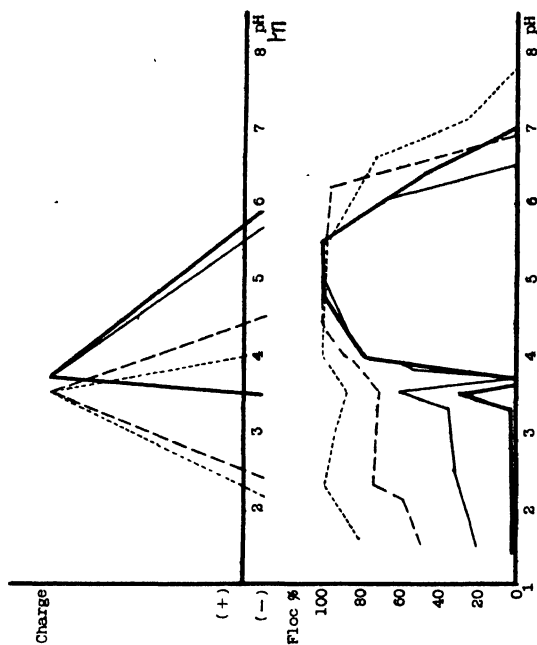


Fig. 6.

Relation between the electrical charge and the degree of flocculation of mixtures with various ratios of constituents.

($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{AlCl}_3 + \text{Na-humate}$)

TABLE 19.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of

 $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 1.3 : 2.5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 2.5 millimols Na_2SiO_3 and5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $v/\text{sec.}$ $v/\text{cm.}$	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt	8	light yellow	ppt	colorless	14	42	-1.08	1.5
2	20	20.0 HCl	"	8	"	"	"	13	39	-0.90	1.9
3	20	15.0 HCl	"	7	"	"	"	13	39	-0.83	2.1
4	20	10.0 HCl	"	8	"	"	"	15	45	-0.71	2.5
5	20	5.0 HCl	"		"	"	"	16	48	-0.60	3.0
6	20	0.0	"		yellow	"	yellow	12	36	+0.86	3.5
7	20	2.5	turbid		brown	"	light brown	slight	slight		3.5
8	20	5.0	clear		"	clear	"	0	0		3.5
9	20	10.0	"		"	"	"	0	0		3.6
10	20	15.0	"		"	"	"	0	0		3.7
11	20	17.5	turbid		"	ppt	"	trace	trace		3.8
12	20	20.0	ppt		light brown	"	yellow	8	24	+2.08	3.9
13	20	20.5	"		yellow	"	light yellow	17	51	+1.80	4.0
14	20	21.0	"	26	"	"	"	17	51	+1.70	4.0
15	20	21.5	"	29	colorless	"	colorless	28	84	+1.58	4.1
16	20	22.0	"	18	"	"	"	30	90	+0.51	5.0
17	20	22.5	"	15	"	"	"	34	100	± 0.00	6.4
18	20	23.0	"	16	light yellow	"	"	30	90	-0.27	7.1
19	20	23.5	"		"	"	"	24	75	-0.41	7.2
20	20	24.0	"		brown	"	brown	8	24	-1.36	7.6
21	20	25.0	clear		"	clear	"	0	0		7.8

(Isoelectric pH 6.4 and 3.2)

TABLE 20.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of

 $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 2.5 : 2.5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 5.0 millimols Na_2SiO_3 and5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours	Over night				Cataph. ν /sec. v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt		colorless	ppt	colorless	13	39	-1.20	1.4
2	20	25.0 HCl	"	20	"	"	"	13	39	-1.10	1.8
3	20	20.0 HCl	"	18	"	"	"	13	39	-0.91	1.9
4	20	15.0 HCl	"	13	"	"	"	14	42	-0.85	2.0
5	20	10.0 HCl	"	12	"	"	"	14	42	-0.71	2.3
6	20	5.0 HCl	"	14	"	"	"	16	48	-0.50	2.6
7	20	0.0	"	9	"	"	"	18	54	± 0.00	3.0
8	20	5.0	"		yellow	"	yellow	7	21	+1.58	3.4
9	20	7.5	"		light brown	"	light brown	3	9	+2.00	3.4
10	20	10.0	"		"	"	"	slight	slight	+2.12	3.5
11	20	12.5	"		"	"	"	3	9	+1.80	3.5
12	20	15.0	"		"	"	"	6	18	+1.76	3.6
13	20	17.5	"		"	"	"	8	24	+1.62	3.7
14	20	20.0	"	16	"	"	"	12	36	+1.16	3.7
15	20	20.5	"	24	colorless	"	colorless	28	84	+1.16	4.0
16	20	21.0	"	25	"	"	"	30	90	+1.02	4.0
17	20	21.5	"	23	"	"	"	33	100	+0.83	4.3
18	20	22.0	"	23	"	"	"	33	100	+0.53	4.4
19	20	22.5	"	16	light yellow	"	"	32	96	-0.51	6.9
20	20	23.0	"		brown	"	brown	10	30	-1.36	7.3
21	20	24.0	clear		"	clear	"	0	0		7.4

(Isoelectric pH 5.7 and 3.0)

TABLE 21.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of

 $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 2.5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours	Over night				Cataph.	
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.	ν , sec. ν , cm.	pH
1	20	50.0 HCl	ppt		light yellow	ppt	colorless	14	42	-1.36	1.5
2	20	35.0 HCl	"	6	"	"	"	14	42	-1.25	1.7
3	20	30.0 HCl	"	7	"	"	"	15	45	-1.12	1.7
4	20	25.0 HCl	"	10	"	"	"	16	48	-1.04	1.8
5	20	20.0 HCl	"	12	"	"	"	16	48	-0.94	2.0
6	20	15.0 HCl	"	19	"	"	"	19	57	-0.86	2.2
7	20	10.0 HCl	"	15	"	"	"	19	57	-0.68	2.6
8	20	5.0 HCl	"	7	"	"	"	21	63	± 0.00	3.0
9	20	0.0	"	7	"	"	light yellow	21	63	+0.84	3.4
10	20	2.5	"		light brown	"	yellow	14	42	+1.06	3.4
11	20	5.0	"		"	"	"	13	39	+1.36	3.5
12	20	7.5	"		"	"	"	12	36	+1.54	3.5
13	20	10.0	"		"	"	light brown	11	33	+1.80	3.5
14	20	15.0	"	16	light yellow	"	light yellow	18	54	+1.30	3.7
15	20	16.5	"	20	colorless	"	colorless	26	78	+1.23	3.7
16	20	17.0	"	20	"	"	"	27	81	+1.10	3.8
17	20	17.5	"	22	"	"	"	32	96	+1.02	3.8
18	20	18.0	"	20	"	"	"	31	93	+0.84	3.9
19	20	18.5	"	20	"	"	"	32	96	+0.63	4.2
20	20	19.0	"	18	"	"	"	34	100	+0.32	4.5
21	20	19.5	"	19	"	"	"	34	100	-0.09	5.4
22	20	20.0	"	16	"	"	"	34	100	-0.49	5.8
23	20	20.5	"	8	light brown	"	light brown	19	57	-0.54	6.3
24	20	21.0	"		"	"	"	14	42	-0.84	6.6
25	20	22.5	turbid		brown	"	brown	slight	slight	-2.15	6.9
26	20	25.0	clear		"	clear	"	0	0		7.6

(Isoelectric pH 5.2 and 3.0)

TABLE 22.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of

 $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 10 : 2.5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 20.0 millimols Na_2SiO_3 and5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. p/sec. v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt		light yellow	ppt	colorless	14	35 Details not clear	1.3
2	20	25.0 HCl	"		"	"	"	14	35		1.6
3	20	20.0 HCl	"		"	"	"	14	35		
4	20	15.0 HCl	"		"	"	"	14	35		1.7
5	20	10.0 HCl	"		"	"	"	14	35		
6	20	5.0 HCl	"		"	"	"	14	35		2.0
7	20	0.0	"		"	"	"	14	35		2.2
8	20	5.0	"		"	"	"	14	35		2.7
9	20	10.0	"	6	colorless	"	"	18	45		
10	20	15.0	"	8	"	"	"	25	63		3.3
11	20	20.0	"	9	"	"	"	30	75 Details not clear	
12	20	25.0	"	13	"	"	"	34	85		3.6
13	20	26.5	"	16	"	"	"	36	90		
14	20	27.0	"	16	"	"	"	37	93		
15	20	27.5	"	15	"	"	"	37	93		3.6
16	20	28.0	"	16	"	"	"	37	93		
17	20	28.5	"	19	"	"	"	39	98		
18	20	29.0	"	19	"	"	"	40	100		3.7
19	20	29.5	"	20	"	"	"	40	100		3.7
20	20	30.0	"	24	"	"	"	40	100		3.8
21	20	30.5	"	20	"	"	"	40	100 +0.35 -0.27 -1.62	
22	20	31.0	"	18	"	"	"	40	100		3.9
23	20	32.5	"	22	"	"	"	37	93		4.3
24	20	34.5	"		brown	"	brown	15	38		5.1
25	20	35.0	turbid		"	"	"	trace	trace		5.7

(Isoelectric pH 4.2)

TABLE 23.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of

 $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5:0.6:1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and1.3 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph.	
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.	μ sec. v cm.	pH
1	20	50.0 HCl	ppt		light yellow	ppt	colorless	12	52	Details not clear	1.4
2	20	25.0 HCl	"	8	"	"	"	12	52		1.6
3	20	20.0 HCl	"	9	"	"	"	12	52		
4	20	15.0 HCl	"	10	"	"	"	12	52		
5	20	10.0 HCl	"	15	"	"	"	12	52		
6	20	5.0 HCl	"		"	"	"	12	52		2.2
7	20	0.0	"		"	"	"	13	57		2.7
8	20	2.5	"	10	colorless	"	"	17	77		3.4
9	20	3.5	"	6	"	"	"	17	77		
10	20	4.0	"	10	"	"	"	18	82		
11	20	4.5	"	8	"	"	"	18	82		
12	20	5.0	"	10	"	"	"	19	87		3.7
13	20	5.5	"	10	"	"	"	22	92		
14	20	6.0	"	12	"	"	"	22	92		
15	20	6.5	"	12	"	"	"	22	92		
16	20	7.0	"	12	"	"	"	22	92	+0.10	3.8
17	20	7.5	"	12	"	"	"	23	100	± 0.00	3.9
18	20	8.0	"	14	"	"	"	23	100	-0.40	4.2
19	20	8.5	"		light brown	"	light brown	10	42		5.1
20	20	10.0	clear		brown	clear	brown	0	0		6.0

(Isoelectric pH 3.9)

TABLE 24.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of

 $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 1.3 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and2.5 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. v/sec. v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt		light yellow	ppt	colorless	12	42	Details not clear	1.4
2	20	25.0 HCl	"		"	"	"	13	46		1.7
3	20	20.0 HCl	"		"	"	"	13	46		
4	20	15.0 HCl	"		"	"	"	13	46		
5	20	10.0 HCl	"		"	"	"	14	50		
6	20	5.0 HCl	"		"	"	"	15	54	+0.41	2.3
7	20	0.0	"	6	"	"	"	16	58	+0.41	3.1
8	20	5.0	"	10	colorless	"	"	23	82	+0.68	3.6
9	20	7.5	"	9	"	"	"	25	89	+0.74	3.7
10	20	10.0	"	10	"	"	"	26	98	+0.51	3.8
11	20	10.5	"	11	"	"	"	27	97	+0.46	3.8
12	20	11.0	"	12	"	"	"	28	100	+0.44	3.9
13	20	11.5	"	11	"	"	"	28	100	+0.40	3.9
14	20	12.0	"	10	"	"	"	28	100	± 0.00	4.1
15	20	12.5	"	11	"	"	"	28	100	-0.98	4.2
16	20	13.0	"		yellow	"	yellow	14	50	-1.76	5.4
17	20	13.5	"		"	"	"	10	34	-2.00	5.6
18	20	15.0	clear		light brown	clear	light brown	0	0		6.2

Isoelectric pH 4.1)

TABLE 25.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of

 $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and10.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\nu/\text{sec.}$ $\nu/\text{cm.}$	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt	8	light yellow	ppt	colorless	10	20	-1.15	1.5
2	20	25.0 HCl	"	14	"	"	"	11	22	-0.81	1.9
3	20	20.0 HCl	"		"	"	"	13	26	-0.70	2.1
4	20	15.0 HCl	"		"	"	"	15	30	-0.45	2.4
5	20	10.0 HCl	"		"	"	"	16	32	± 0.00	3.0
6	20	5.0 HCl	"		"	"	light yellow	14	28	+1.36	3.2
7	20	0.0	"		yellow	"	yellow	9	19	+1.50	3.3
8	20	5.0	"		"	"	"	8	16	+1.62	3.3
9	20	10.0	"		light brown	"	light brown	slight	slight		
10	20	12.5	turbid		brown	"	"	trace	trace		3.4
11	20	15.0	"		"	"	"	"	"		
12	20	17.5	"		"	"	"	"	"		3.4
13	20	20.0	ppt		light brown	"	"	slight	slight		3.4
14	20	25.0	"		"	"	"	4	8		
15	20	30.0	"		"	"	"	5	10	+2.50	3.6
16	20	35.0	"	32	"	"	"	15	30	+2.40	
17	20	37.5	"	63	light yellow	"	light yellow	23	46	+2.21	3.9
18	20	38.5	"	64	"	"	"	29	58	+2.03	
19	20	39.0	"	54	"	"	"	35	70	+1.91	4.1
20	20	39.5	"	47	colorless	"	colorless	36	76	+1.19	
21	20	40.0	"	36	"	"	"	40	80	+0.58	4.1
22	20	40.5	"	40	"	"	"	45	90	+0.14	4.3
23	20	41.0	"	31	"	"	"	50	100	+0.10	5.1
24	20	41.5	"	25	"	"	"	50	100	± 0.00	6.2
25	20	42.5	"	37	"	"	"	50	100	-0.68	6.7
26	20	45.0	"	6	brown	"	light brown	20	40	-1.36	7.3
27	20	47.5	"		"	"	brown	10	20	-1.80	7.8
28	20	50.0	clear		"	"	"	trace	trace		8.1

Isoelectric pH 6.2 and 3.0

TABLE 26.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 2.5 : 0.3$ millimols

A. 0.5 millimol Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. v/sec. v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	turbid		yellow	ppt	colorless	slight			1.4
2	20	25.0 HCl	ppt		light yellow	"	"	"	"		
3	20	20.0 HCl	"		"	"	"	"	"		1.8
4	20	15.0 HCl	"		"	"	"	"	"		
5	20	10.0 HCl	"		"	"	"	"	"		
6	20	5.0 HCl	"		"	"	"	"	"		2.4
7	20	4.5 HCl	"		"	"	"	"	"		
8	20	1.5 HCl	"		"	"	"	"	"		
9	20	1.0 HCl	"		"	"	"	"	"		
10	20	0.5 HCl	"		"	"	"	"	"		
11	20	0.0	"		"	"	"	"	"		3.3
12	20	1.0	"		"	"	"	"	"		3.3
13	20	2.0	"		"	"	"	6	18	-0.83	3.4
14	20	3.0	"		"	"	"	7	21	-0.50	3.4
15	20	4.0	"		"	"	"	8	24	-0.28	3.4
16	20	4.5	"		"	"	"	9	27	± 0.00	3.5
17	20	5.0	"		yellow	"	"	6	18	+0.42	3.5
18	20	10.0	turbid		"	"	yellow	slight	slight	+1.70	
19	20	15.0	"		"	"	"	"	"	+2.05	3.6
20	20	20.0	clear		light yellow	clear	light yellow	0	0		3.7
21	20	22.5	ppt		"	ppt	"	8	24	+1.85	3.8
22	20	23.5	"	4	colorless	"	colorless	16	49	+1.73	
23	20	24.0	"	4	"	"	"	20	61	+1.53	3.9
24	20	24.5	"	7	"	"	"	26	80	+1.27	
25	20	25.0	"	7	"	"	"	25	77	+0.96	4.0
26	20	25.5	"	7	"	"	"	27	83	+0.72	4.1
27	20	26.0	"	7	"	"	"	30	100	+0.25	4.8
28	20	26.5	"	6	"	"	"	30	100	+0.14	5.5
29	20	27.5	"		light yellow	"	light yellow	15	46	-0.80	6.4
30	20	29.0	clear		"	turbid	"	0	0		7.0
31	20	30.0	"		"	clear	"	0	0		7.3

(Isoelectric pH 5.7 and 3.5)

TABLE 27.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2:\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Humus}=5:2.5:0.5$ millimols

A. 1.0 millimol Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and
 50 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph.	
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.	μ sec. v cm.	pH
1	20	50.0 HCl	ppt		colorless	ppt	colorless	5	20		1.5
2	20	25.0 HCl	"		"	"	"	6	24	-1.15	1.8
3	20	20.0 HCl	"		"	"	"	6	24	-0.99	1.9
4	20	15.0 HCl	"		"	"	"	7	28	-0.87	2.0
5	20	10.0 HCl	"		"	"	"	7	28	-0.85	2.2
6	20	5.0 HCl	"		"	"	"	8	32	-0.81	2.5
7	20	0.0	"		"	"	"	9	36	-0.55	3.3
8	20	5.0	"		"	"	"	15	60	± 0.00	3.5
9	20	10.0	"		yellow	"	yellow	8	32	+0.62	3.6
10	20	12.5	turbid		light brown	"	light brown	trace	trace	+2.40	3.7
11	20	15.0	"		"	"	"	slight	slight	+2.30	3.7
12	20	20.0	ppt		light yellow	"	light yellow	13	52	+2.00	3.8
13	20	21.5	"	3	"	"	"	16	64	+1.62	
14	20	22.0	"	2	"	"	"	16	64	+1.36	3.9
15	20	22.5	"	5	colorless	"	colorless	21	84	+1.16	
16	20	23.0	"	8	"	"	"	23	92	+1.02	4.0
17	20	23.5	"	10	"	"	"	23	92	+0.84	4.4
18	20	24.0	"	12	"	"	"	25	100	+0.68	5.0
19	20	24.5	"	11	"	"	"	25	100	± 0.00	5.5
20	20	25.0	"	8	light yellow	"	light yellow	18	72	-0.70	6.0
21	20	27.5	"		light brown	"	light brown	slight	slight		6.5
22	20	29.0	clear		brown	clear	brown	0	0		7.2

(Isoelectric pH 5.5 and 3.5)

TABLE 28.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2:\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Humus}=5:2.5:2$ millimols

A. 4.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. ν /sec. v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt	44	light yellow	ppt	colorless	22	49	-1.36	1.5
2	20	25.0 HCl	"	68	"	"	"	24	53	-0.84	1.9
3	20	20.0 HCl	"	26	"	"	"	22	49	-0.41	2.0
4	20	15.0 HCl	"	54	"	"	"	27	58	-0.20	2.1
5	20	10.0 HCl	"	31	"	"	"	33	73	-0.17	2.3
6	20	5.0 HCl	"	28	"	"	"	33	73	+0.20	2.7
7	20	2.5 HCl	"	20	"	"	"	33	72	+0.27	2.9
8	20	0.0	"	37	colorless	"	"	33	72	+1.02	3.3
9	20	2.5	"	20	"	"	"	32	71	+1.50	3.3
10	20	4.0	"	24	"	"	"	32	71	+1.60	3.4
11	20	5.0	"	24	"	"	"	32	71	+1.76	3.5
12	20	6.0	"	20	"	"	"	32	71	+1.70	3.5
13	20	7.5	"	25	"	"	"	33	73	+1.70	3.6
14	20	10.0	"	28	"	"	"	33	73	+1.60	3.6
15	20	15.0	"	30	"	"	"	35	78	+1.58	3.6
16	20	17.0	"	37	"	"	"	36	80	+1.54	3.8
17	20	18.0	"	32	"	"	"	36	80	+1.36	3.8
18	20	19.0	"	31	"	"	"	37	82	+1.36	3.8
19	20	20.0	"	36	"	"	"	37	82	+1.36	3.9
20	20	21.0	"	28	"	"	"	40	89	+0.27	4.0
21	20	21.5	"	33	"	"	"	45	100	± 0.00	4.4
22	20	22.0	"	40	"	"	"	43	95	-2.10	6.2
23	20	25.0	"		brown	"	brown	slight	slight	-2.80	6.9
24	20	27.5	"		"	"	"	"	"		6.9
25	20	30.0	clear		"	clear	"	0	0		7.6

Isoelectric pH 4.4 and 2.5)

TABLE 29.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2:\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Humus}=5:2.5:4$ millimols

A. 8.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

5.0 millimols AlCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\nu/\text{sec.}$ $\nu/\text{cm.}$	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt	290	light yellow	ppt	light yellow	47	80		1.6
2	20	35.0 HCl	"	320	"	"	"	51	86		1.7
3	20	25.0 HCl	"	270	"	"	"	53	90	-0.84	2.0
4	20	20.0 HCl	"	360	"	"	"	55	93	-0.41	2.1
5	20	15.0 HCl	"	830	"	"	"	58	98	± 0.00	2.3
6	20	10.0 HCl	"	330	"	"	"	57	97	+0.20	2.6
7	20	5.0 HCl	"	200	"	"	"	55	93	+0.87	3.0
8	20	0.0	"	104	"	"	"	52	88	+1.58	3.5
9	20	2.5	"	86	colorless	"	colorless	55	93	+1.48	3.6
10	20	5.0	"	65	"	"	"	55	93	+1.32	3.7
11	20	7.5	"	55	"	"	"	52	88	+1.28	3.7
12	20	10.0	"	57	"	"	"	55	93	+1.07	3.7
13	20	12.5	"	73	"	"	"	57	97	+1.02	3.8
14	20	14.0	"	73	"	"	"	57	97	+0.77	3.8
15	20	15.0	"	63	"	"	"	57	97	+0.23	3.9
16	20	15.5	"	76	"	"	"	57	97	+0.14	3.9
17	20	16.0	"	67	"	"	"	59	100	± 0.00	4.0
18	20	16.5	"	59	"	"	"	57	97	-0.04	4.2
19	20	17.0	"	68	"	"	"	56	95	-0.14	4.2
20	20	17.5	"	70	"	"	"	56	95	-1.02	4.4
21	20	18.0	"	57	"	"	"	58	98	-1.70	5.5
22	20	20.0	"	78	yellow	"	yellow	43	73	-1.76	6.6
23	20	25.0	"		brown	"	brown	13	22	-2.05	7.2
24	20	27.5	clear		"	clear	"	0	0		7.8

(Isoelectric pH 4.0 and 2.3)

the pH zone of the formation of flocculates was modified by the concentration ratio of these constituents. With increasing of the concentration of silicon and humus the pH zone of the flocculation lowered clearly, while the increase of aluminum brought the pH zone up to a higher pH. In other words, the higher the acidoid-amphoteloid ratio the lower is the pH zone of the flocculation. It is indicated, therefore, that the flocculate with lower acidoid-amphoteloid ratio is more soluble at a high pH.

Concentration ratios of the constituents in mixtures modified not only the pH zone of the flocculation, but also changed the isoelectric pH. The introduction of the humate and silicate, of course, lowered the isoelectric point of flocculates because of the addition of the electronegative componets humus and silicon, whereas the augmentation of the aluminum-acidoid ratio increased the isoelectric pH of the flocculates.

The influence of the concentration ratio of these constituents upon the isoelectric point of flocculates is briefly summarized in table 30.

TABLE 30.
The concentration ratio and the isoelectric pH

No.	SiO ₂ : Al ₂ O ₃ : Humus (millimol ratio)			1st isoelec. pH	2nd isoelec. pH
1	1.3	2.5	1	↑ 6.4	↑ 3.2
2	2.5	2.5	1	5.7	3.0
3	5	2.5	1	5.2	3.0
4	↓ 10	2.5	1	4.2	
5	5	0.6	1	3.9	
6	5	1.3	1	4.1	
7	5	2.5	1	5.2	3.0
8	5	↓ 5	1	↓ 6.2	↓ 3.0
9	5	2.5	0.3	↑ 5.7	↑ 3.5
10	5	2.5	0.5	5.5	3.5
11	5	2.5	1	5.2	3.0
12	5	2.5	2	4.4	2.5
13	5	2.5	↓ 4	4.0	2.3

Accordingly, it can be said that the higher acidoid-amphoteloid ratio shows the lower isoelectric point of the flocculate in mixtures. The reason for this, as above mentioned, is that a highly dissociating anion like Cl-ions in flocculates is displaced by a less dissociating anion like silicate- or humate-ions.

The second isoelectric pH was not noticeably influenced by varying the silica-alumina ratio of mixtures, while the humus-alumina ratio had a noticeable influence upon that pH, that is, the higher humus-alumina ratio displaced it remarkably in a direction of lower pH. Such a remarkable displacement may depend upon the fact that the humus gives two isoelectric points to ampholytes like aluminum, and that the humus is a stronger acidoid than the silicon.

The flocculation took place most completely at the first isoelectric point of all hydrogen-ion concentrations. On the other hand, the amount of the flocculate at the second isoelectric point was less than that at the first point and the ratio of the amount of flocculates at the second point to that of the first was modified by the concentration ratio of these constituents as shown in table 31.

TABLE 31.
Ratios of the amount of flocculates at the second isoelectric point to
that of the first isoelectric point

No.	SiO ₂ : Al ₂ O ₃ : Humus (millimol ratio)			Ratio of the amount of flocs, (1st isoelect. pt. - 100)
1	1.3	2.5	1	40
2	2.5	2.5	1	54
3	5	2.5	1	60
4	10	2.5	1	
5	5	0.6	1	
6	5	1.3	1	
7	5	2.5	1	60
8	5	5	1	30
9	5	2.5	0.3	20
10	5	2.5	0.5	60
11	5	2.5	1	60
12	5	2.5	2	73
13	5	2.5	4	98

From the table it is seen that the ratio of the amount of flocculates at the second isoelectric point to that of the first point increased in proportion to the concentration of silicates or humates as acidoids, while it decreased in proportion to that of alumina as ampholytes. The greater the acidoid-amphoteloid ratio, therefore, the higher also was the ratio of the amount of flocculates at the second isoelectric point to that at the first point, because the dispersity of mixtures at the second isoelectric point was depressed more strongly by increasing the acidoid-amphoteloid ratio. If still more quantities of acidoids, especially humus, are added to mixtures, the amount of flocculates at the second isoelectric point will increase as much as that at the first point.

The point of electropositive maxima was observed in all mixtures. Figures 4 to 6 show the interesting relationship between electropositive maxima and hydrogen-ion concentrations. In these mixtures the maximum coincided with pH of 3.5 to 3.7. This means that the ampholyte attains, as colloids, a maximum electropositive activity at these points, i. e., a maximum electrical neutralizing power. At these points particles in the mixture expressed a high dispersity, in some cases even solutions having a molecular high dispersion resulted. Electropositive maxima also were influenced by the concentration ratio of constituents in systems. It was therefore seen that additional increases of silicon or humus in mixtures depressed the pH value and the dispersity of mixtures at electropositive maxima, whereas increases of aluminum showed opposite effects.

In other words, the change of the pH at the maximum charge and of dispersity depends upon acidoid-amphoteloid ratios. That is to say, the higher the ratio the lower was the pH at electropositive maxima, and the lower ratio brought about a higher dispersity and ultimately a molecular high dispersion.

At concentration ratios of $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = <2.5 : 2.5 : 1$ ($\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3 = <1$), $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : >5 : 1$ ($\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3 = <1$) or $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 2.5 : <0.5$ ($\text{Humus}/\text{Al}_2\text{O}_3 = <0.2$) in mixtures, none of flocculates appeared near the point of electropositive maxima, pH

3.5 to 3.7. However, further depression of pH of mixtures formed again flocculates which decrease their positive charge with increasing hydrogen-ion concentrations in mixtures. As seen in the figures 4 to 6, when acidoid-amphoteloid ratios were comparatively large, the curve showing the amount of flocculates showed not so remarkable a depression at the point of electropositive maxima. With decreasing of the ratio the curve gradually showed a concave shape and finally at a lower ratio over a certain limit ($\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3 = <1$, $\text{Humus}/\text{Al}_2\text{O}_3 = <0.2$) the concave part of the curve attained to the grand line, because no more flocculations occurred. As seen from the flocculation curve, therefore, it can be concluded that lowering of acidoid-amphoteloid ratios in mixtures narrows the zone of the flocculation at various hydrogen-ion concentrations.

The ratio of flocculated constituents to the original content at various pH values in mixtures with a millimol ratio of $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 2.5 : 1$ has already been examined.

In the present experiment, the relationship between the ratio of the three constituents in mixtures and the composition ratio of flocculates at the first isoelectric point was therefore determined and the result obtained are shown in table 32.

As may be seen in the table, the added aluminum and humus always entered almost completely in flocculates, while silicon was markedly affected by concentrations of these constituents and their ratios in mixtures. When the concentration of silicon in mixtures was varied, the quantity of silicon in flocculates highered with increase of the $\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$ ratio in mixtures, because of increasing of silicon which was added, whereas the percentage of the flocculated silicon to the originals was in a reverse proportion to the ratio. When the concentration of the amphoteloid in mixtures, however, was changed, both the quantity and percentage of the flocculated silicon lowered with higher $\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$ ratio.

Within these limits of concentration ratios the percentage of the flocculated silicon lies only within the bounds of 27 to 87 per cent. This perhaps depends upon the fact that the combining force of

TABLE 32.

Relation between mutual ratios of constituents in mixtures and composition ratios of flocculates at isoelectric points

The $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{AlCl}_3) + \text{Na-humate}$ —System

No.	$\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus}$ millimol ratio	SiO_2 in foc.		Al_2O_3 in foc.		Humus in foc.		In foc., $\text{SiO}_2 : \text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Humus}$ millimol ratio
		g	%	g	%	g	%	
1	1.3 : 2.5 : 1	0.0062	74	0.0258	99	0.0285	100	0.4 : 1.0 : 0.4
2	2.5 : 2.5 : 1	0.0112	67	0.0256	98	0.0282	99	0.7 : 1.0 : 0.4
3	5 : 2.5 : 1	0.0203	61	0.0259	99	0.0287	100	1.2 : 1.0 : 0.4
4	10 : 2.5 : 1	0.0452	59	0.0262	100	0.0279	98	2.4 : 1.0 : 0.4
5	5 : 0.6 : 1	0.0091	27	0.0066	100	0.0283	99	2.5 : 1.0 : 1.6
6	5 : 1.3 : 1	0.0132	39	0.0131	99	0.0286	100	1.5 : 1.0 : 0.8
7	5 : 2.5 : 1	0.0203	61	0.0258	99	0.0287	100	1.2 : 1.0 : 0.4
8	5 : 5 : 1	0.0290	87	0.0515	99	0.0281	99	0.9 : 1.0 : 0.2
9	5 : 2.5 : 0.3	—	—	0.0254	97	0.0072	100	? : 1.0 : 0.1
10	5 : 2.5 : 0.5	0.0238	71	0.0258	99	0.0140	100	1.4 : 1.0 : 0.2
11	5 : 2.5 : 1	0.0202	61	0.0256	98	0.0285	100	1.2 : 1.0 : 0.4
12	5 : 2.5 : 2	0.0190	57	0.0262	100	0.0571	99	1.1 : 1.0 : 0.8
13	5 : 2.5 : 4	0.0171	51	0.0259	99	0.1145	100	1.0 : 1.0 : 1.6

humus with aluminum is more powerful than that of silicon with aluminum, and MATTSON⁽³¹⁾ has assumed stoichiometrical relations between humus and aluminum (iron also), and that silicon are strongly displaced from amphoteloids and basoids by humus, causing the easy dissociation of silicate-ions in comparison with humate-ions.

As mentioned above, the percentage of silicon which entered into flocculates decreased in direct proportion to the ratio of silicon or humus to the others, and in a reverse relation to the ratio of aluminum to the others. It is therefore concluded that the percentage of silicon which entered into flocculates in its original quantity is affected by the acidoid-amphoteloid ratio, and the higher the ratio, the lower the percentage.

b) Ferric "silico-humates"

In order to observe the influence of the change in concentration of silicon, humus and iron in mixtures upon the formation and nature of flocculates the same experiment as in the aluminum system was conducted. These three constituents were mixed in the following various proportions.

No.	SiO ₂ : Fe ₂ O ₃ : Humus (millimol ratio)		
1	1.3	: 2.5	: 1
2	2.5	: 2.5	: 1
3	5	: 2.5	: 1
4	10	: 2.5	: 1
5	5	: 0.6	: 1
6	5	: 1.3	: 1
7	5	: 2.5	: 1
8	5	: 5	: 1
9	5	: 10	: 1
10	5	: 2.5	: 0.3
11	5	: 2.5	: 0.5
12	5	: 2.5	: 1
13	5	: 2.5	: 2
14	5	: 2.5	: 4
15	1.3	: 5	: 1
16	2.5	: 5	: 1
17	5	: 5	: 1
18	10	: 5	: 1
19	5	: 5	: 0.3
20	5	: 5	: 0.5
21	5	: 5	: 1
22	5	: 5	: 2
23	5	: 5	: 4

The results of the observations are shown in tables 33 to 51 and figures 7 to 9.

From the above results it was clearly found thus: In all the mixtures with different concentration ratios of the three constituents the flocculation took place at certain hydrogen-ion concentrations, however, the pH of the flocculation zone was modified by the concen-

tration of constituents. With increase of the concentration of silicon or humus the pH of the flocculation zone lowered remarkably, whereas increase of aluminum raised the pH of the zone. Accordingly, it can be said that the change of the flocculation zone is in reverse to the acidoid-amphoteloid ratio.

The isoelectric point also was modified by the change in concentrations and mutual ratios of these constituents in mixtures.

The influence of the concentration of these constituents upon the change of isoelectric points was shown in table 52.

TABLE 33.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of

$\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 1.3 : 2.5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 2.5 millimols Na_2SiO_3 and

5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. μ /sec. v cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	ppt	light yellow	18	60	+1.75	2.0
2	20	10.0	"		"	turbid	brown	0	0		2.2
3	20	15.0	"		light brown	ppt	light brown	15	50	+1.86	2.4
4	20	20.0	turbid		"	"	light yellow	25	93	+1.55	2.7
5	20	21.0	ppt		yellow	"	colorless	26	96	+1.41	3.2
6	20	21.5	"		"	"	"	26	96	+1.07	3.4
7	20	22.0	"	5	light yellow	"	"	28	98	+0.90	3.7
8	20	22.5	"	6	colorless	"	"	28	98	+0.80	4.1
9	20	23.0	"	5	"	"	"	29	100	+0.41	4.5
10	20	23.5	"	4	"	"	"	29	100	± 0.00	5.8
11	20	24.0	"	3	light yellow	"	"	29	100	-0.86	6.3
12	20	24.5	"		yellow	"	yellow	13	42	-1.62	6.7
13	20	25.0	"		light brown	"	light brown	9	28	-1.92	6.9
14	20	26.5	clear		brown	clear	brown	0	0		7.6
15	20	30.0	"		"	"	"	0	0		>8.5

(Isoelectric pH 5.8)

TABLE 34.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 2.5 : 2.5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 5.0 millimols Na_2SiO_3 and
 5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. p/sec. v cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	clear	brown	0	0		2.2
2	20	5.0	"		"	"	"	0	0		2.3
3	20	10.0	"		"	turbid	"	0	0		2.5
4	20	12.5	"		"	ppt	"	0	0		2.7
5	20	15.0	ppt		light brown	"	light yellow	22	79	+1.00	2.9
6	20	16.0	"	5	"	"	colorles	23	82	+0.82	3.1
7	20	16.5	"		"	"	"	25	88	+0.57	3.2
8	20	17.0	"	9	light yellow	"	"	26	91	+0.46	3.6
9	20	17.5	"	9	colorles	"	"	27	94	+0.24	3.6
10	20	18.0	"	5	"	"	"	28	100	+0.09	4.3
11	20	18.5	"	6	"	"	"	28	100	-0.46	5.6
12	20	19.0	"		light brown	"	light brown	12	36	-1.09	6.4
13	20	20.0	"		"	"	"	5	15	+1.40	6.8
14	20	22.5	clear		brown	clear	brown	0	0		8.0
15	20	25.0	"		"	"	"	0	0		>8.5

(Isoelectric pH 4.5)

TABLE 35.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 2.5 : 1$ millimols

A, 2.0 millimols Na-humate in L.

B, 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A	Soln. B, 20 cc. + NaOH millimols	After mixing		After a few hours	Over night				Cataph. $\nu/\text{sec.}$ $\nu/\text{cm.}$	pH
			Appearance	Floc. velocity $\frac{\text{min.}}{5 \text{ cm.}}$		Appearance	Color of supernatant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	20.0 HCl	ppt		yellow	ppt	light yellow	15	45	+0.74	1.8
2	20	15.0 HCl	"		"	"	"	14	42	+0.82	1.8
3	20	10.0 HCl	"		"	"	"	12	36	+0.93	2.0
4	20	5.0 HCl	clear		brown	clear	brown	0	0		2.2
5	20	0.0	"		"	"	"	0	0		2.4
6	20	5.0	"		"	"	"	0	0		2.6
7	20	7.5	turbid		"	"	"	0	0		2.9
8	20	10.0	ppt		"	ppt	yellow	24	72	+0.74	3.2
9	20	10.5	"	6	light brown	"	colorles	25	75	+0.41	3.4
10	20	11.0	"	23	yellow	"	"	31	93	+0.17	3.7
11	20	11.5	"	23	"	"	"	31	93	+0.14	3.8
12	20	12.0	"	25	colorles	"	"	33	100	-0.08	4.6
13	20	12.5	"	16	"	"	"	31	93	-0.82	5.8
14	20	13.0	"	7	yellow	"	yellow	15	45	-1.20	6.0
15	20	13.5	"		brown	"	brown	7	21	-1.54	6.2
16	20	14.0	turbid		"	"	"	trace	trace		6.5
17	20	14.5	"		"	"	"	"	"		6.6
18	20	15.0	"		"	"	"	"	"		6.8
19	20	20.0	clear		"	clear	"	0	0		>8.5

(Isoelectric pH 4.0)

TABLE 36.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 10 : 2.5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 20.0 millimols Na_2SiO_3 and
 5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. ν /sec. ν /cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	5.0 HCl	clear		brown	clear	brown	0	0		
2	20	2.5 HCl	"		"	"	"	0	0		2.5
3	20	1.0 HCl	"		"	turbid	"	0	0		2.7
4	20	0.0	ppt		"	ppt	"	slight	slight	+0.68	2.8
5	20	2.5	"		"	"	"	12	36	+0.63	3.2
6	20	3.0	"		"	"	"	13	39	+0.58	3.2
7	20	3.5	"		light brown	"	light brown	14	42	+0.55	3.3
8	20	4.0	"		yellow	"	light yellow	30	90	+0.10	3.5
9	20	4.5	"	33	colorless	"	colorless	39	100	± 0.00	3.7
10	20	5.0	"	35	"	"	"	39	100	-0.84	4.5
11	20	5.5	"	37	light yellow	"	"	34	97	-1.02	5.0
12	20	6.0	"	25	yellow	"	yellow	25	75	-1.36	5.3
13	20	6.5	turbid		brown	"	brown	7	21	-1.62	5.8
14	20	7.0	clear		"	"	"	trace	trace	-1.76	6.3
15	20	7.5	"		"	clear	"	0	0		6.8
16	20	10.0	"		"	"	"	0	0		

(Isoelectric pH 3.7)

TABLE 37.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 0.6 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

1.3 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. p/sec. v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	100.0	ppt		light yellow	ppt	colorless	12	60	+2.50	1.1
2	20	75.0	"		"	"	"	12	60	+2.20	1.3
3	20	50.0	"		"	"	"	13	65	+1.77	1.4
4	20	45.0	"		"	"	"	13	65	+1.50	1.5
5	20	40.0	"		"	"	"	13	65	+1.41	1.5
6	20	35.0	"		"	"	"	13	65	+1.15	1.6
7	20	30.0	"		colorless	"	"	14	70	+1.05	1.7
8	20	25.0	"		"	"	"	14	70	+0.84	1.8
9	20	20.0	"		"	"	"	17	85	+0.78	2.0
10	20	15.0	"	4	"	"	"	18	90	+0.74	2.2
11	20	13.5	"	10	"	"	"	19	95	+0.72	2.3
12	20	12.5	"	7	"	"	"	19	95	+0.70	2.4
13	20	11.0	"	8	"	"	"	20	100	+0.68	2.5
14	20	10.0	"	9	"	"	"	20	100	+0.63	2.6
15	20	9.5	"	8	"	"	"	20	100	+0.58	2.7
16	20	8.5	"	8	"	"	"	20	100	+0.41	2.8
17	20	7.5	"	6	"	"	"	20	100	± 0.00	3.0
18	20	6.5	"		light yellow	"	"	20	100	-0.17	3.3
19	20	6.0	turbid		brown	turbid	brown	0	0		4.0
20	20	5.5	clear		"	clear	"	0	0		4.4
21	20	5.0	"		"	"	"	0	0		4.9
22	20	0.0	"		"	"	"	0	0		8.3

(Isoelectric pH 3.0)

TABLE 38.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2; \text{Fe}_2\text{O}_3; \text{Humus} = 5 \cdot 1.3 \cdot 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 , and
 2.5 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + HCl milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. ν /sec. ν /cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	100.0	ppt		light yellow	ppt	light brown	16	57	+1.86	1.1
2	20	40.0	"	6	"	"	"	16	57	+1.74	1.4
3	20	35.0	"	6	"	"	"	16	57	+1.51	1.4
4	20	30.0	"	5	"	"	"	16	57	+1.42	1.6
5	20	25.0	"	4	"	"	"	17	61	+1.40	1.8
6	20	20.0	"	5	"	"	"	18	64	+1.31	1.9
7	20	15.0	"	9	"	"	colorles	19	68	+1.18	2.0
8	20	10.0	"	12	colorles	"	"	21	75	+1.02	2.2
9	20	5.0	"	13	"	"	"	24	86	+0.68	2.5
10	20	3.0	"	14	"	"	"	26	93	+0.63	2.7
11	20	2.0	"	14	"	"	"	27	97	+0.50	2.8
12	20	1.0	"	11	"	"	"	27	97	+0.49	3.0
13	20	0.0	"	20	"	"	"	28	100	-0.55	3.8
14	20	0.5 NaOH	"	5	yellow	"	yellow	20	72	-0.63	4.7
15	20	1.0 NaOH	turbid		brown	"	brown	6	21	-1.16	5.2
16	20	5.0 NaOH	clear		"	clear	"	0	0		8.1

(Isoelectric pH 3.4)

TABLE 39.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5:5:1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

10.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\nu/\text{sec.}$ $\nu/\text{cm.}$	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	clear	brown	0	0		2.0
2	20	5.0	"		"	"	"	0	0		2.0
3	20	10.0	"		"	"	"	0	0		2.1
4	20	15.0	"		"	"	"	0	0		2.1
5	20	20.0	"		"	ppt	"	trace	trace		2.2
6	20	25.0	turbid		"	"	"	"	"		2.5
7	20	30.0	"		"	"	"	"	"		2.7
8	20	32.5	ppt		"	"	light brown	13	31	+0.67	2.9
9	20	35.0	"		yellow	"	colorles	35	83	+0.58	3.1
10	20	36.0	"		"	"	"	39	93	+0.27	3.3
11	20	36.5	"	23	light yellow	"	"	41	97	+0.17	3.7
12	20	37.0	"	15	colorles	"	"	42	100	+0.14	4.2
13	20	37.5	"	17	"	"	"	42	100	-0.17	4.9
14	20	38.0	"	13	"	"	"	41	97	-0.41	5.5
15	20	38.5	"	17	"	"	"	40	94	-0.84	6.2
16	20	39.0	"	16	yellow	"	yellow	35	81	-1.16	6.5
17	20	39.5	"	14	"	"	"	31	71	-1.36	6.6
18	20	40.0	"		"	"	"	20	50	-1.62	6.7
19	20	45.0	turbid		brown	"	brown	trace	trace		>8.5
20	20	50.0	clear		"	clear	"	0	0		

(Isoelectric pH 4.6)

TABLE 40.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 10 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 , and
 20.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\mu/\text{sec.}$ v cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	clear	brown	0	0		1.5
2	20	5.0	"		"	"	"	0	0		
3	20	10.0	"		"	"	"	0	0		
4	20	15.0	"		"	"	"	0	0		
5	20	20.0	"		"	"	"	0	0		
6	20	25.0	"		"	"	"	0	0		1.8
7	20	30.0	turbid		"	"	"	0	0		
8	20	35.0	"		"	"	"	0	0		
9	20	40.0	"		"	"	"	0	0		
10	20	45.0	"		"	"	"	0	0		2.2
11	20	50.0	"		"	ppt	"	trace	trace		2.3
12	20	55.0	ppt		"	"	"	slight	slight	+0.41	
13	20	60.0	"		"	"	light yellow	12	20	+0.27	3.0
14	20	65.0	"		light yellow	"	colorles	53	85	+0.20	3.7
15	20	68.0	"	22	colorles	"	"	53	85	± 0.00	5.6
16	20	68.5	"	20	"	"	"	53	85	-0.11	6.0
17	20	69.0	"	30	"	"	"	52	83	-0.20	6.1
18	20	69.5	"	30	"	"	"	52	83	-0.84	6.4
19	20	70.0	"	31	"	"	"	51	80	-1.36	6.6
20	20	71.0	"	34	"	"	"	51	80	-1.80	6.9
21	20	72.0	"	28	light yellow	"	"	51	80	-2.08	7.0
22	20	75.0	"	51	yellow	"	light yellow	51	80	-2.20	7.6
23	20	85.0	turbid		brown	"	brown	23	40		>8.5

(Isoelectric pH 5.6)

TABLE 41.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 2.5 : 0.3$ millimols

A. 0.5 millimol Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and 5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\mu/\text{sec.}$ $\text{v}/\text{cm.}$	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	clear	brown	0	0		2.1
2	20	5.0	"		"	"	"	0	0		2.2
3	20	10.0	"		"	"	"	0	0		2.4
4	20	15.0	"		"	"	"	0	0		2.8
5	20	17.5	"		"	turbid	"	0	0		3.5
6	20	18.0	turbid		"	ppt	"	slight	slight	+0.68	3.7
7	20	18.5	"		"	"	"	10	33	+0.41	3.8
8	20	19.0	ppt	6	colorles	"	colorles	30	100	± 0.00	5.4
9	20	19.5	"	5	"	"	"	30	100	-0.20	7.0
10	20	20.0	"	5	"	"	"	30	100	-0.84	7.0
11	20	20.5	"		brown	"	brown	7	23	-1.10	7.1
12	20	21.0	turbid		"	"	"	slight	slight		7.2
13	20	22.5	"		"	turbid	"	0	0		8.1
14	20	25.0	clear		"	clear	"	0	0		>8.5

(Isoelectric pH 5.4)

TABLE 42.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 2.5 : 0.5$ millimols

A. 1.0 millimol Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and 5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\mu/\text{sec.}$ $\text{v}/\text{cm.}$	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	clear	brown	0	0		2.1
2	20	5.0	"		"	"	"	0	0		2.2
3	20	10.0	"		"	"	"	0	0		2.4
4	20	15.0	"		"	"	"	0	0		2.8
5	20	16.5	turbid		"	ppt	light brown	11	38	+0.84	3.2
6	20	17.5	ppt		light yellow	"	colorles	25	86	+0.20	3.6
7	20	18.0	"	8	"	"	"	25	86	+0.14	3.7
8	20	18.5	"	8	colorles	"	"	29	100	± 0.00	4.3
9	20	19.0	"	8	"	"	"	29	100	-0.17	4.6
10	20	19.5	"		"	"	"	28	97	-1.36	6.6
11	20	20.0	"	6	"	"	"	28	97	-1.62	6.7
12	20	20.5	"		yellow	"	yellow	9	31	-1.76	7.0
13	20	21.0	turbid		brown	"	brown	trace	trace		7.3
14	20	21.5	"		"	turbid	"	0	0		7.5
15	20	25.0	clear		"	clear	"	0	0		>8.5

(Isoelectric pH 4.3)

TABLE 43.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2:\text{Fe}_2\text{O}_3:\text{Humus}=5:2.5:2$ millimols

A. 4.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\nu/\text{sec.}$ ν cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt	12	yellow	ppt	light yellow	24	60	-1.05	1.3
2	20	25.0 HCl	"	25	"	"	"	26	65	-0.84	1.5
3	20	20.0 HCl	"	44	"	"	"	26	65	-0.48	1.6
4	20	17.5 HCl	"	50	light yellow	"	"	27	68	-0.14	1.6
5	20	15.0 HCl	"	61	"	"	"	27	68	± 0.00	1.7
6	20	12.5 HCl	"	33	yellow	"	yellow	23	57	+0.44	1.8
7	20	10.0 HCl	"	32	"	"	"	23	57	+0.84	1.8
8	20	5.0 HCl	"	13	light brown	"	light brown	19	47	+1.28	2.0
9	20	0.0	"	5	"	"	"	15	37	+1.32	2.3
10	20	5.0	"		brown	"	brown	14	34	+1.86	2.5
11	20	10.0	"	19	light brown	"	light brown	29	73	+0.84	2.7
12	20	12.0	"	49	light yellow	"	light yellow	35	88	+0.27	3.0
13	20	13.0	"	45	"	"	colorles	36	91	+0.17	3.1
14	20	14.0	"	33	colorles	"	"	36	91	+0.10	3.4
15	20	15.0	"	23	"	"	"	40	100	± 0.00	3.8
16	20	15.5	"	22	"	"	"	39	97	-0.17	4.6
17	20	16.0	"	25	"	"	"	38	95	-0.41	5.2
18	20	16.5	"	28	light yellow	"	light yellow	37	92	-1.16	6.5
19	20	20.0	"		brown	"	brown	5	13	-1.24	6.9
20	20	20.5	clear		"	clear	"	0	0		7.3

(Isoelectric pH 3.8 and 1.7)

TABLE 44.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 2.5 : 4$ millimols

A. 8.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

5.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. v/sec. v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt	175	light brown	ppt	light yellow	44	79	-1.80	1.4
2	20	35.0 HCl	"	78	"	"	"	42	75	-0.84	1.5
3	20	25.0 HCl	"	193	"	"	"	52	93	± 0.00	1.6
4	20	20.0 HCl	"	83	"	"	"	46	83	+0.58	1.7
5	20	15.0 HCl	"	83	"	"	"	48	87	+0.63	1.8
6	20	10.0 HCl	"	77	"	"	"	47	85	+0.68	1.9
7	20	5.0 HCl	"	77	"	"	"	47	85	+0.68	2.1
8	20	0.0	"	57	"	"	"	48	87	+0.93	2.4
9	20	5.0	"	92	"	"	"	50	91	+0.68	2.8
10	20	7.0	"	99	yellow	"	colorless	50	91	+0.58	3.0
11	20	8.0	"	72	light yellow	"	"	53	94	+0.20	3.2
12	20	9.0	"		colorless	"	"	56	100	+0.14	3.3
13	20	9.5	"	40	"	"	"	56	100	-0.14	3.5
14	20	10.0	"	44	"	"	"	52	92	-0.27	3.7
15	20	10.5	"	48	"	"	"	52	92	-0.58	4.0
16	20	11.0	"	43	"	"	"	52	92	-0.84	4.1
17	20	12.0	"	89	light brown	"	light yellow	50	91	-1.36	4.9
18	20	15.0	"		brown	"	brown	20	36	-1.76	6.6
19	20	20.0	"		"	"	"	slight	slight		7.1
20	20	21.0	clear		"	turbid	"	0	0		7.4

(Isoelectric pH 3.4 and 1.6)

TABLE 45.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 1.3 : 5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 2.5 millimols Na_2SiO_3 and
 10.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\nu/\text{sec.}$ $\nu/\text{cm.}$	pH
			Appear- ance	Floc. velocity $\frac{\text{min.}}{5 \text{ cm.}}$		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	ppt	yellow	15	40	+0.97	1.9
2	20	10.0	"		"	"	"	18	49	+0.80	1.9
3	20	15.0	"		"	"	"	17	46	+1.19	2.0
4	20	20.0	"		"	"	light brown	11	30	+1.27	2.1
5	29	25.0	"		"	turbid	brown	0	0		2.2
6	20	30.0	"		"	"	"	0	0		2.3
7	20	32.0	"		"	"	"	0	0		2.3
8	20	32.5	ppt		"	ppt	light brown	15	40	+1.45	2.4
9	20	33.0	"		"	"	"	15	40	+1.23	2.4
10	20	33.5	turbid		"	"	"	12	32	+1.22	2.4
11	20	34.0	"		"	"	"	15	40	+1.12	2.4
12	20	35.0	ppt		light brown	"	yellow	27	73	+1.02	2.5
13	20	36.0	"		yellow	"	"	23	61	+0.62	2.6
14	20	37.0	"		"	"	"	27	73	+0.40	2.6
15	20	38.0	"		light yellow	"	light yellow	27	79	+0.36	2.8
16	20	40.0	"		"	"	"	31	85	+0.27	3.1
17	20	43.0	"	26	colorless	"	colorless	34	91	+0.17	3.6
18	20	44.0	"	13	"	"	"	35	94	+0.14	5.1
19	20	45.0	"	10	"	"	"	37	100	-0.02	6.2
20	20	46.0	"	11	"	"	"	36	97	-0.17	6.7
21	20	47.5	"	11	light yellow	"	light yellow	35	94	-0.41	
22	20	50.0	"		yellow	"	yellow	28	76	-1.27	
23	20	75.0	clear		brown	clear	brown	0	0		

(Isoelectric pH 6.2)

TABLE 46.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 2.5 : 5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 5.0 millimols Na_2SiO_3 and
 10.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\mu/\text{sec.}$ v cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	clear	brown	0	0		1.9
2	20	5.0	"		"	"	"	0	0		1.9
3	20	7.5	"		"	"	"	0	0		2.0
4	20	10.0	"		"	"	"	0	0		2.0
5	20	15.0	"		"	"	"	0	0		2.1
6	20	20.0	"		"	"	"	0	0		2.2
7	20	25.0	"		"	"	"	0	0		2.3
8	20	30.0	"		"	"	"	0	0		2.4
9	20	32.0	turbid		"	turbid	"	trace	trace		2.5
10	20	33.0	"		"	"	"	"	"		2.6
11	20	34.0	"		"	"	"	"	"		2.7
12	20	35.0	"		"	"	"	"	"		2.7
13	20	37.5	ppt		light brown	ppt	light yellow	25	60	+0.93	2.9
14	20	40.0	"		"	"	colorless	37	88	+0.87	3.5
15	20	41.0	"		light yellow	"	"	37	88	+0.67	3.6
16	20	41.5	"		"	"	"	42	100	+0.44	3.8
17	20	42.0	"	31	colorless	"	"	42	100	+0.14	4.4
18	20	42.5	"	19	"	"	"	42	100	± 0.00	5.5
19	20	43.0	"	19	"	"	"	42	100	-0.14	5.6
20	20	43.5	"	13	"	"	"	42	100	-0.20	6.0
21	20	44.0	"		light yellow	"	"	42	100	-0.27	6.2
22	20	45.0	"		yellow	"	"	42	100	-0.41	6.5
23	20	50.0	clear		brown	clear	brown	0	0		7.6
24	20	75.0	"		"	turbid	"	trace	trace		>8.5

(Isoelectric pH 5.5)

TABLE 47.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 10 : 5 : 1$ millimols

A. 2.0 millimols Na-humate in L.

B. 20.0 millimols Na_2SiO_3 and 10.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\mu/\text{sec.}$ v cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	clear	brown	0	0		2.0
2	20	5.0	"		"	"	"	0	0		2.1
3	20	10.0	"		"	"	"	0	0		2.3
4	20	15.0	"		"	"	"	0	0		2.6
5	20	20.0	turbid		"	turbid	"	0	0		2.8
6	20	25.0	ppt		light brown	ppt	yellow	31	62	+0.27	3.6
7	20	26.0	"		colorles	"	colorles	50	100	± 0.00	3.8
8	20	27.0	"		"	"	"	49	98	-0.84	4.4
9	20	27.5	"		"	"	"	49	98	-1.36	4.8
10	20	28.0	"		"	"	"	48	96	-1.44	5.4
11	20	28.5	"		light yellow	"	"	48	96	-1.54	6.0
12	20	30.0	"		light brown	"	light brown	21	42	-2.12	6.5
13	20	35.0	clear		brown	clear	brown	0	0		8.0

(Isoelectric pH 38.)

TABLE 48.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 5 : 0.3$ millimols

A. 0.5 millimol Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and 10.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\mu/\text{sec.}$ v cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	clear	brown	0	0		2.0
2	20	5.0	"		"	"	"	0	0		
3	20	10.0	"		"	"	"	0	0		
4	20	15.0	"		"	"	"	0	0		
5	20	20.0	"		"	"	"	0	0		3.0
6	20	25.0	ppt		light brown	ppt	light brown	15	33	+1.07	3.7
7	20	25.5	"	8	yellow	"	colorles	22	49	+0.93	3.9
8	20	26.0	"	10	colorles	"	"	39	87	+0.46	4.5
9	20	26.5	"	13	"	"	"	45	100	+0.41	6.2
10	20	27.0	"	8	"	"	"	45	100	± 0.00	6.3
11	20	27.5	"	13	"	"	"	44	98	-0.46	6.7
12	20	28.0	"	7	yellow	"	yellow	30	66	-0.56	6.8
13	20	30.0	turbid		brown	"	brown	5	11	-2.00	7.5
14	20	35.0	clear		"	clear	"	0	0		>8.5

(Isoelectric pH 6.3)

TABLE 49.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 5 : 0.5$ millimols

A. 1.0 millimol Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and
 10.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. p/sec. v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	0.0	clear		brown	clear	brown	0	0		
2	20	5.0	"		"	"	"	0	0		
3	20	10.0	"		"	"	"	0	0		
4	20	15.0	"		"	"	"	0	0		
5	20	20.0	"		"	"	"	0	0		2.6
6	20	22.5	turbid		"	ppt	"	trace	trace		3.1
7	20	23.5	"		"	"	"	5	11	+1.30	3.2
8	20	24.0	ppt		"	"	light brown	18	40	+1.23	3.4
9	20	24.5	"		light brown	"	colorles	35	78	+0.58	3.6
10	20	25.0	"	19	colorles	"	"	41	91	+0.45	4.0
11	20	25.5	"	13	"	"	"	45	100	+0.30	4.4
12	20	26.0	"	15	"	"	"	45	100	-0.20	5.4
13	20	26.5	"	17	"	"	"	43	96	-0.58	6.3
14	20	27.0	"	23	"	"	"	43	96	-1.16	6.6
15	20	27.5	"	15	yellow	"	light yellow	43	96	-1.70	6.9
16	20	30.0	turbid		brown	"	brown	4	10	-3.00	7.4
17	20	35.0	clear		"	clear	"	0	0		>8.5

(Isoelectric pH 5.0)

TABLE 50.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 5 : 2$ millimols

A. 4.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and

10.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B. 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\mu/\text{sec.}$ v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt		yellow	ppt	yellow	33	66 Details not clear	1.3
2	20	35.0 HCl	"		"	"	"	31	62		1.4
3	20	30.0 HCl	"		light brown	"	light brown	17	34		1.6
4	20	25.0 HCl	"		"	"	"	17	34		
5	20	20.0 HCl	"		brown	"	brown	11	22		
6	20	15.0 HCl	"		"	"	"	11	22		1.8
7	20	10.0 HCl	"		"	"	"	14	28		
8	20	5.0 HCl	turbid		"	"	"	5	10		1.9
9	20	4.0 HCl	"		"	"	"	slight	slight		1.9
10	20	3.0 HCl	"		"	"	"	"	"		2.0
11	20	2.0 HCl	"		"	"	"	"	" Details not clear	
12	20	1.0 HCl	"		"	"	"	"	"		2.1
13	20	0.0	"		"	"	"	"	"		2.3
14	20	5.0	ppt		"	"	"	5	10		2.5
15	20	10.0	"		"	"	"	11	22		2.7
16	20	15.0	"	30	light brown	"	light brown colories	21	42		3.0
17	20	17.5	"		"	"	"	44	88		+0.58
18	20	20.0	"		yellow	"	"	45	90		+0.41
19	20	20.5	"	31	colories	"	"	48	98		+0.20
20	20	21.0	"	29	"	"	"	48	98		± 0.00
21	20	21.5	"	21	"	"	"	49	100 Details not clear	-0.20
22	20	22.0	"	24	"	"	"	48	98		-0.31
23	20	22.5	"	29	"	"	"	48	98		-0.84
24	20	33.0	"	30	yellow	"	"	48	98		-0.93
25	20	23.5	"	35	"	"	"	48	98		-1.02
26	20	24.0	"	27	light brown	"	light brown	33	66		-1.23
27	20	25.0	"	8	brown	"	brown	18	36		-1.36
28	20	27.5	"		"	"	"	5	10		-1.36
29	20	30.0	clear		"	clear	"	0	0		7.9

(Isoelectric pH 3.9)

TABLE 51.

Formation of flocculates and their nature in the system with a ratio of
 $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 5 : 4$ millimols

A. 8.0 millimols Na-humate in L.

B. 10.0 millimols Na_2SiO_3 and
 10.0 millimols FeCl_3 in L.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + NaOH milli- mols	After mixing		After a few hours Color of super- natant liquid	Over night				Cataph. $\mu/\text{sec.}$ v/cm.	pH
			Appear- ance	Floc. velocity min. 5 cm.		Appear- ance	Color of super- natant liquid	Height of floc. mm.	Ratio of floc.		
1	20	50.0 HCl	ppt		light yellow	ppt	light yellow	50	77		1.3
2	20	25.0 HCl	"		light brown	"	yellow	54	83		1.8
3	20	10.0 HCl	"		"	"	light brown	46	71	+0.84	1.9
4	20	0.0	"		"	"	brown	39	60	+0.84	2.3
5	20	2.5	"		brown	"	"	37	57	+1.07	2.4
6	20	5.0	"		"	"	"	42	64	+0.96	2.5
7	20	10.0	"		light brown	"	colorless	65	100	+0.62	2.7
8	20	15.0	"		yellow	"	"	65	100	+0.41	3.3
9	20	16.0	"	62	colorless	"	"	65	100	+0.17	3.5
10	20	16.5	"	50	"	"	"	65	100	± 0.00	3.6
11	20	17.0	"	34	"	"	"	65	100	-0.17	3.9
12	20	17.5	"	33	"	"	"	59	90	-0.41	4.1
13	20	18.0	"	58	"	"	"	59	90	-0.58	4.7
14	20	18.5	"	46	"	"	"	58	89	-0.68	5.1
15	20	19.0	"		light brown	"	"	58	89	-0.84	5.5
16	20	19.5	"		"	"	"	58	89	-1.02	5.6
17	20	20.0	"	67	"	"	"	58	89	-1.30	5.8
18	20	22.5	"		brown	"	"	21	32	-1.60	6.8
19	20	25.0	"		"	"	brown	10	15	-2.00	6.9
20	20	30.0	turbid		"	clear	"	0	0		7.6
21	20	35.0	clear		"	"	"	0	0		8.5

(Isoelectric pH 3.6)

Si	Fe	Hum. millimols
13	25	1
25	25	1
5	25	1
10	25	1

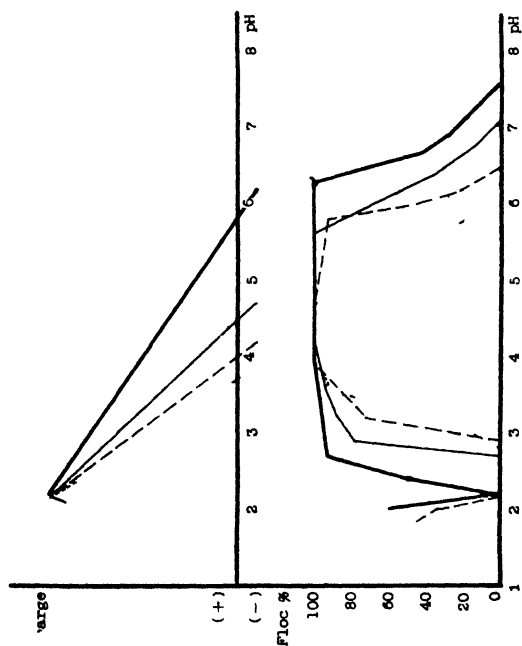


Fig 7
Relation between the electrical charge and the degree
of flocculation of mixtures with various ratios
of constituents
($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{FeCl}_3 + \text{Na humate}$)

Si	Fe	Hum. millimols
5	10	1
5	5	1
5	25	1
5	13	1
5	06	1

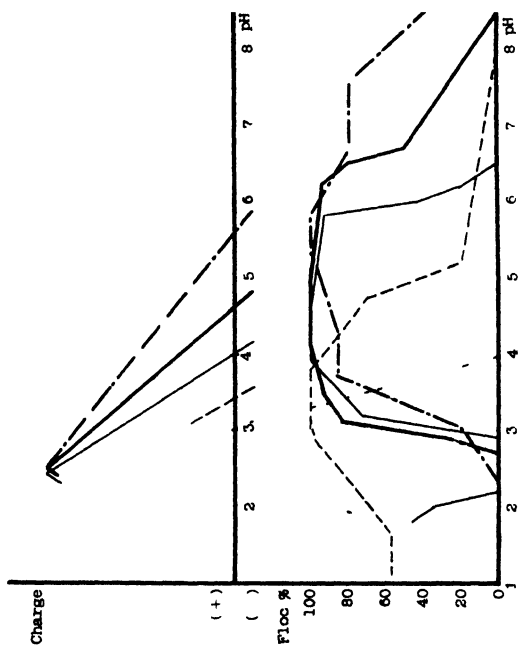


Fig 8
Relation between the electrical charge and the degree
of flocculation of mixtures with various ratios
of constituents
($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{FeCl}_3 + \text{Na humate}$)

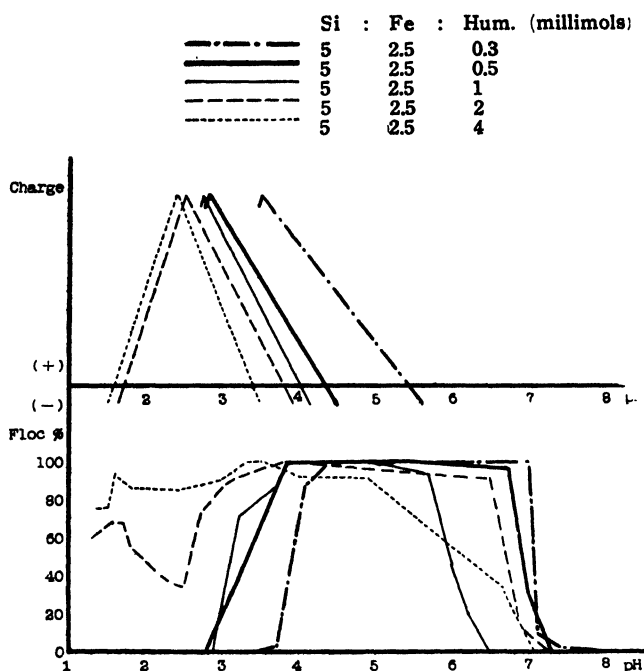


Fig. 9.

Relation between the electrical charge and the degree of flocculation of mixtures with various ratios of constituents.

($\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{FeCl}_3 + \text{Na-humate}$)

The first isoelectric point in these mixtures lay between about pH 3.0 to 6.3. The lower isoelectric point occurs in the mixtures with higher acidoid-amphoteloid ratios, whereas the higher point occurs in those with lower ratios. The reason for this has already been explained. In the case of aluminum "silico-humates" with different concentrations of constituents the first isoelectric point lay between pH 4.0 and 6.4, whereas ferric "silico-humates" showed the point to be at a lower pH value, such as pH 3.0 to 6.3. This depends on the fact that iron is the amphoteloid which is a stronger acidoid than aluminum.

The second isoelectric point in the aluminum system appeared clearly between pH 2.5 and 3.5, while in ferric system it scarcely appeared except in the case of the mixtures which have higher concen-

TABLE 52.

The concentration of constituents and the isoelectric pH

No.	SiO ₂ : Fe ₂ O ₃ : Humus (millimol ratio)	1st isoelec. pH	2nd isoelec. pH
1	1.3 : 2.5 : 1	↑ 5.8	
2	2.5 : 2.5 : 1	4.5	
3	5 : 2.5 : 1	4.0	
4	↓ 10 : 2.5 : 1	3.7	
5	5 : 0.6 : 1	3.0	
6	5 : 1.3 : 1	3.4	
7	5 : 2.5 : 1	4.0	
8	5 : 5 : 1	4.6	
9	5 : ↓ 10 : 1	↓ 5.6	
10	5 : 2.5 : 0.3	↑ 5.4	
11	5 : 2.5 : 0.5	4.3	
12	5 : 2.5 : 1	4.0	
13	5 : 2.5 : 2	3.8	↑ 1.7
14	5 : 2.5 : ↓ 4	3.4	1.6
15	1.3 : 5 : 1	↑ 6.2	
16	2.5 : 5 : 1	5.5	
17	5 : 5 : 1	4.6	
18	↓ 10 : 5 : 1	3.8	
19	5 : 5 : 0.3	↑ 6.3	
20	5 : 5 : 0.5	5.0	
21	5 : 5 : 1	4.6	
22	5 : 5 : 2	3.9	
23	5 : 5 : ↓ 4	3.6	

tration of humus, i. e., 2 to 4 millimols, and higher humus-iron ratio, i. e., about 1 to 2. Thus the influence of the concentration of humus or of the humus-iron ratio upon the occurrence of the second isoelectric point will depend on the characteristics of humus as previously mentioned.

The formation of flocculates was most favorable at the first isoelectric point; on the other hand, the percentage of the amount of flocculates formed at the second point compared to that of flocculates at the first point was only about 70 to 90 per cent.

In all the mixtures electropositive maxima appeared at a certain hydrogen-ion concentration. Figures 7 to 9 bring out an interesting

relationship between electropositive maxima and hydrogen-ion concentrations. In the aluminum system the maxima coincided with pH of 3.5 to 3.7, whereas the ferric system attained a maximum positive charge at pH between about 2 and 3. At this pH range mixtures dispersed most highly, so that the formation of flocculates was strongly prevented, and in some cases, appeared solutions having a molecular high dispersion.

The pH value at a maximum charge and the dispersity of mixtures were strongly influenced by concentration ratios of acidoids and amphoteloids, as seen in the aluminum system.

At the ratio of $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus} = 5 : 5 : <2$ ($\text{Humus}/\text{Fe}_2\text{O}_3 = <0.4$), $5 : 2.5 : <1$ ($\text{Humus} / \text{Fe}_2\text{O}_3 = <0.4$), $>1.3 : 5 : 1$ ($\text{SiO}_2 / \text{Fe}_2\text{O}_3 = >0.25$) or $5 : >2.5 : 1$ ($\text{SiO}_2 / \text{Fe}_2\text{O}_3 = <2.0$) in mixtures, the flocculation never appeared near the pH at a maximum charge. Beyond these points, at still lower pH values, the flocculation appeared again, and the flocculate decreased its positive charge when the hydrogen-ion concentration was increased. These phenomena are graphically shown in figures 7 to 9, in which was indicated that lowering the acidoid-amphoteloid ratio in mixtures narrows the zone of the flocculation at different hydrogen-ion concentrations.

Further, it was determined whether the percentage of the amount of flocculated constituents at the first isoelectric point is influenced by the change of their concentration in mixtures.

The relationship between the ratio of the three constituents in mixtures and that of flocculates at the first isoelectric point is shown in table 53.

The results obtained here also showed a similar tendency to the case of the aluminum system. That is, the added iron and humus always entered almost completely into flocculates, while silicon was remarkably affected by the concentration of these three constituents and their ratios in mixtures.

The percentage of silicon which was flocculated decreased in a direct proportion to concentrations of silicon and humus in mixtures, but in a reverse relation to that of iron. It is therefore indicated

TABLE 53.

Relation between mutual ratios of constituents in mixtures and composition ratios of flocculates at isoelectric points

The $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 + \text{FeCl}_3) + \text{Na-humate}$ —System

No.	$\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus}$ millimol ratio	SiO_2 in floc.		Fe_2O_3 in floc.		Humus in floc.		In floc. $\text{SiO}_2 : \text{Fe}_2\text{O}_3 : \text{Humus}$ millimol ratio
		g	%	g	%	g	%	
1	1.3 : 2.5 : 1	0.0061	63	0.0393	98	0.0285	100	0.3 : 1.0 : 0.4
2	2.5 : 2.5 : 1	0.0116	60	0.0385	96	0.0282	99	0.6 : 1.0 : 0.4
3	5 : 2.5 : 1	0.0228	59	0.0397	99	0.0285	100	1.2 : 1.0 : 0.4
4	10 : 2.5 : 1	0.0363	47	0.0401	100	0.0279	98	1.9 : 1.0 : 0.4
5	5 : 0.6 : 1	0.0155	40	0.0101	100	0.0282	99	3.2 : 1.0 : 1.6
6	5 : 1.3 : 1	0.0170	44	0.0192	96	0.0285	100	1.8 : 1.0 : 0.8
7	5 : 2.5 : 1	0.0228	59	0.0397	99	0.0285	100	1.2 : 1.0 : 0.4
8	5 : 5 : 1	0.0259	67	0.0794	99	0.0285	100	0.7 : 1.0 : 0.2
9	5 : 10 : 1	0.0321	83	0.1604	100	0.0282	99	0.4 : 1.0 : 0.1
10	5 : 2.5 : 0.3	0.0282	73	0.0393	98	0.0071	100	1.4 : 1.0 : 0.1
11	5 : 2.5 : 0.5	0.0271	70	0.0401	100	0.0143	100	1.4 : 1.0 : 0.2
12	5 : 2.5 : 1	0.0228	59	0.0393	98	0.0279	98	1.2 : 1.0 : 0.4
13	5 : 2.5 : 2	0.0220	57	0.0401	100	0.0564	99	1.1 : 1.0 : 0.8
14	5 : 2.5 : 4	0.0205	53	0.0401	100	0.1140	100	1.0 : 1.0 : 1.6
15	1.3 : 5 : 1	0.0074	76	0.0802	100	0.0285	100	0.2 : 1.0 : 0.2
16	2.5 : 5 : 1	0.0130	67	0.0794	99	0.0274	96	0.3 : 1.0 : 0.2
17	5 : 5 : 1	0.0240	62	0.0786	98	0.0279	98	0.6 : 1.0 : 0.2
18	10 : 5 : 1	0.0441	57	0.0802	100	0.0279	98	1.1 : 1.0 : 0.2
19	5 : 5 : 0.3	0.0309	80	0.0802	100	0.0071	100	0.8 : 1.0 : 0.05
20	5 : 5 : 0.5	0.0305	79	0.0802	100	0.0143	100	0.8 : 1.0 : 0.1
21	5 : 5 : 1	0.0259	67	0.0778	97	0.0285	100	0.7 : 1.0 : 0.2
22	5 : 5 : 2	0.0251	65	0.0802	100	0.0559	98	0.7 : 1.0 : 0.4
23	5 : 5 : 4	0.0216	56	0.0794	99	0.1117	98	0.6 : 1.0 : 0.8

that the percentage of silicon which entered into flocculates in its original quantity is affected by the acidoid-amphoteloid ratio, and the higher the ratio, the lower the percentage.

In comparison with results obtained in the aluminum and ferric system the following facts are shown.

In the aluminum and ferric system with different concentrations of three constituents the formation of flocculates of aluminum or ferric "silico-humates" was observed at certain hydrogen-ion concentrations, however, the pH zone of the flocculation was modified by the change of the mutual ratio of constituents.

At any ratio of constituents, in both the aluminum and ferric systems, the isoelectric point always appeared, but the position of the point was varied by each concentration and the mutual ratio of the three constituents in mixtures. The influence of the acidoid-amphoteloid ratio upon the modification of the isoelectric pH was stronger than that of the absolute concentration of constituents.

The curve showing the relation between the isoelectric pH and the mutual ratio of constituents in both systems is given in figure 10.

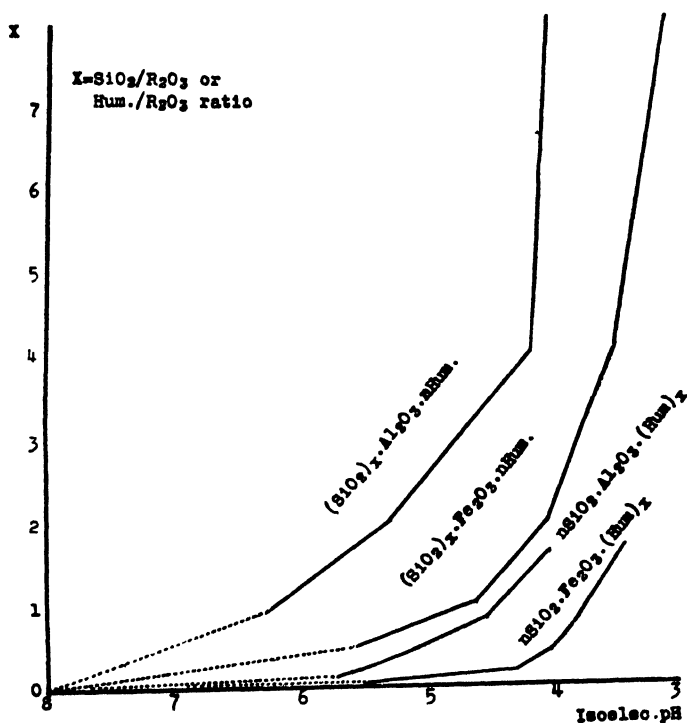


Fig. 10.
Relation between isoelectric pH and ratios of constituents in mixtures.

In any case, the increase of the acidoid-amphoteloid ratio lowered the isoelectric pH, and the humus-sesquioxide ratio affected more strongly the change of the isoelectric pH than in the silica-sesquioxide ratio. At the same acidoid-amphoteloid ratio the ferric system showed a lower isoelectric pH than that of the aluminum system.

The formation of flocculates took place most favorably at the first isoelectric point, and their smaller amount was formed at the second isoelectric point. In the ferric system, however, the second point appeared only in mixtures with higher humus content and higher humus-iron ratio. The second point, which appeared always in the aluminum system, lowered with increase of the acidoid-amphoteloid ratio.

There were maximum points of the electropositive charge, at the pH of 3.4 to 3.7 in the aluminum system and at the pH of about 2 to 3 in the ferric system. At the zone of these pH, mixtures showed the highest dispersity. The degree of the dispersion was affected by the acidoid-amphoteloid ratio of mixtures, and the extreme lowering of the ratio dispersed the mixture to the degree of the molecular high dispersion. It was seen consequently that lower acidoid-amphoteloid ratios narrowed the pH zone of the flocculation.

When humus, silicon and aluminum or iron were mixed together in any concentration and proportion, the constituents except silicon always entered almost complete into flocculates at the isoelectric point, while the percentage of silicon flocculated to its original quantity is affected by the acidoid-amphoteloid ratio, and the higher the ratio, the lower the percentage.

In the foregoing experiment the Cl-ion has represented a part of the mineral anion in mixtures because of the application of chlorides of iron and aluminum. If their sulfates are employed instead of the chlorides, the SO_4 -ion will show the following behaviour according to its characteristics. Since the SO_4 -ion is less dissociated by complexes than is the monovalent Cl-ion, a greater proportion of the SO_4 -ion must be present in mixtures in order to make the anionic dissociation balance with the cationic dissociation at the isoelectric pH of mixtures. Consequently the isoelectric point of sulfated mixtures should be lower than that of the chloridated mixtures.

D. Summary

This chapter dealt with the interaction between humus substances and silicon, iron and aluminum, which are the main mineral constituents in soil colloids.

From the observation of various phenomena which took place by mutual mixing of these constituents of soil colloids under different conditions an attempt was inductively made to study the condition of the formation of humus complexes with other constituents. The samples of silicon, iron and aluminum were applied in the form of Na_2SiO_3 , $\text{FeCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, and $\text{AlCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ respectively, and Merck's humic acid was used as the sample of humus substances.

The interaction among these substances and the composition of flocculates formed were examined under the following various conditions.

1. Varying the concentration of constituents and their ratio in mixtures.
2. Varying the hydrogen-ion concentrations in mixtures.
3. Varying the order of mixing these constituents in mixtures.

The results obtained are briefly shown as follows :

The interaction among these constituents was observed, that is, their isoelectric flocculation took place at a certain hydrogen-ion concentration. Beyond this isoelectric point, at still lower or higher pH values, the flocculation was gradually prevented with change of pH values of mixtures, and the dispersity also increased with the moving of pH of mixtures from the isoelectric point, and at lower or higher pH a molecular high dispersion appeared.

Properties of flocculates consisting of these constituents differed from those of the originals.

The formation of flocculates and their amount and electrical charge were influenced by the concentration of constituents and their ratio in mixtures.

The change of order of mixing these constituents, however, showed no noticeable influence upon the formation of flocculates.

The isoelectric point of flocculates was lowered with higher concentration of acidoids, such as silicon and humus, in mixtures, while proportional to that of amphoteloids, such as aluminum and iron. In other words, the higher concentration of silicon and humus in mixtures formed a favorable flocculate at lower pH values.

The isoelectric point of flocculates was more depressed by increase of humus than that of silicon. Humus displaced, therefore, to more acidic side the favorable reaction for the formation of flocculates, in comparison with silicon.

Ferric "silico-humates" were always flocculated isoelectrically at lower pH than the case of aluminum "silico-humates" having the same ratio of the three constituents to the former.

More humus entered easily into isoelectric flocculates than silicon.

The electric conductivity of these three constituents in mixtures was most strongly lowered at the isoelectric point, causing the most favorable entrance into flocculates at this point.

Higher concentration of amphoteloids, such as iron and aluminum, in mixtures did not only make the wider pH zone of the flocculation which takes place near the isoelectric point, but also enlarged the pH zone of the dissolution of flocculates at acidic side of the isoelectric point. On the contrary, acidoids, such as silicon and humus, narrowed the zone of the flocculation and of the dissolution.

In short, when these constituents, i. e., humus, silicon and aluminum or iron were mixed together under certain conditions, they made the interaction with one another and flocculated isoelectrically at certain hydrogen-ion concentrations. Their interaction was observed in detail under various conditions.

III. INTERACTION BETWEEN SOIL COLLOIDS AND HUMUS SUBSTANCES

A. Experimental

The preceding chapter showed numerous suggestions on the mutual action of humus substances and soil forming mineral constituents in their mixtures under various conditions.

The present experiment treats of the interaction between mineral soil colloids and humus substances. One of the objects of this paper is to show, by means of chemical and physico-chemical investigations, whether humus substances in soils exist only in forms of mixtures with other components or in a certain chemical combination with mineral soil particles. At the same time it is also important to know under what conditions humus substances are fixed most favorably by soil mineral colloids.

It was observed in the above experiment that humus substances flocculate with iron or aluminum forming a new complex whose nature differs from that of each these materials. Further, 'when humus substances are added to soils, will any colloid-chemical change between the substances take place? On these problems the experiment in this chapter was conducted.

Studies on the coagulation of zeolite- and soil suspensions by ampholytes like aluminum and iron salts and on their isoelectric relations were carried out by MATTSOⁿ and his co-workers^(42, 63), and it was shown that these amphoteric compounds entered so clearly into combination with colloidal clays that the chemical and colloid-chemical nature of clay particles was changed to some extent.

The fact that humus substances and clay particles react protectively with each other under certain conditions and thereby the stability of the mixture is increased, has already been observed^(18, 61). Since this action is owing to the same sign of their electrical charge, it does not always take place in any hydrogen-ion concentration, because of amphoteric nature of clay particles. DEMOLON and BARBIER, in their

experiment ¹²⁾, have observed that humic acids in the state of humate solutions were fixed by various quantities of clays and formed homogeneous flocculates when a concentration of electrolytes in the mixture was sufficiently high.

In the following experiment it was, therefore, determined that humus substances are fixed to some extent by colloidal particles of various soils under conditions of different pH values and of various concentrations of these substances. The sample of soil colloids used was the hydrogen-clay suspension with a diameter of less than about $1\ \mu$, which was separated by the sedimentation method from the soils derived from sandstone-shale and andesite soils in Taiwan, namely,

- D. 370 Taihoku-syu, Mt. Sitisei, 500 m Height, humus soil, andesite soil.
- D. 375 Taihoku-syu. Kaizan-gun, lateritic soil, sandstone-shale soil.
- D. 435 Taihoku-si, Tomita-mati, sandstone-shale soil.
- D. 436 Sintiku-syu, Tyureki-gun, lateritic soil, sandstone-shale soil.

These hydrogen-clay suspensions were prepared by means of electro-dialysis using a MATTSON's cell for long days. As the sample of humus substances, Merck's humic acid was employed in the form of the nearly neutralized Na-humate solution, in which the humic acid combines equivalently with sodium hydroxide as described in previous experiment.

A known quantity of the hydrogen-clay was mixed with different concentrations of the Na-humate solution and the mutual action between these substances was examined at different hydrogen-ion concentrations. The experimental procedure is as follows: Accurately measured portions of the hydrogen-clay suspension with a known concentration, and of the Na-humate solution with a different concentration to be mixed, were placed in separate flasks. The mixing was rapidly done by pouring the contents of one of the flasks into the other and then back into the first, then again into the second, and finally into a large Jena test tube. The pH value in mixtures was

adjusted by adding hydrochloric acid before mixing these solutions.

The flocculations after the solutions were mixed and after they were allowed to stand over night are recorded in tables. From the supernatant liquid was determined the pH values by means of the chinhydrone method, the tube was then shaken and the cataphoresis measurements were made by means of MATTSON's cataphoretic apparatus.

First of all, the relation between the stability of the Na-humate solution and hydrogen-ion concentrations was examined, and it was determined at what pH values the flocculation of humic acids takes place. Although there are the studies of ODEN⁴⁷⁾, OSTWALD and STEINER⁽⁴⁸⁾ on the influence of electrolytes upon the flocculation of humic acids, the relation between the stability and the pH of mixtures has to be further examined.

The results obtained are shown in tables 54 to 57.

TABLE 54.

Relation between the flocculation of humate solutions and hydrogen-ion concentrations
(0.10% humus solution)

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.04g humic acid
B. Distilled water

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + HCl millmols	After mixing	After a few hours	Over night			pH
			Appear- ance	Color of supernatant liquid	Appear- ance	Color of supernatant liquid	Ratio of floc.	
1	20	0.0	clear	brown	clear	brown	0	7.6
2	20	5.0	"	"	"	"	0	4.8
3	20	10.0	"	"	turbid	"	0	2.8
4	20	15.0	turbid	"	ppt	light brown	60	2.0
5	20	17.5	ppt	light brown	"	yellow	80	2.1
6	20	20.0	"	yellow	"	light yellow	95	2.1
7	20	25.0	"	light yellow	"	"	98	2.0
8	20	30.0	"	"	"	"	98	1.9
9	20	40.0	"	"	"	"	99	1.9
10	20	60.0	"	"	"	"	99	1.8
11	20	100.0	"	"	"	"	99	1.8

TABLE 55.

Relation between the flocculation of humate solutions and hydrogen-ion concentrations
(0.05% humus solution)

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.02 g humic acid.

B. Distilled water.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + HCl millmols	'After mixing	After a few hours	Over night			pH
			Appear- ance	Color of supernatant liquid	Appear- ance	Color of supernatant liquid	Ratio of floc.	
1	20	0.0	clear	brown	clear	brown	0	7.2
2	20	5.0	"	"	"	"	0	3.1
3	20	10.0	"	"	"	"	0	2.3
4	20	15.0	turbid	"	ppt	yellow	80	2.0
5	20	17.5	"	"	"	"	85	2.0
6	20	20.0	ppt	yellow	"	light yellow	99	1.9
7	20	25.0	"	light yellow	"	"	99	1.9
8	20	30.0	"	"	"	"	99	1.9
9	20	40.0	"	"	"	"	99	1.8
10	20	60.0	"	"	"	"	99	1.8

TABLE 56.

Relation between the flocculation of humate solutions and hydrogen-ion concentrations
(0.025% humus solution)

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.01 g humic acid.

B. Distilled water.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc. + HCl millmols	After mixing	After a few hours	Over night			pH
			Appear- ance	Color of supernatant liquid	Appear- ance	Color of supernatant liquid	Ratio of floc.	
1	20	0.0	clear	brown	clear	brown	0	7.0
2	20	5.0	"	"	"	"	0	2.9
3	20	10.0	"	"	turbid	"	0	2.5
4	20	12.5	"	"	ppt	light yellow	92	2.3
5	20	15.0	ppt	"	"	"	93	2.2
6	20	17.5	"	yellow	"	"	94	2.2
7	20	20.0	"	"	"	"	95	2.1
8	20	22.5	"	"	"	"	96	2.1
9	20	25.0	"	"	"	"	97	2.0
10	20	50.0	"	colorless	"	"	99	2.0
11	20	100.0	"	"	"	"	99	1.9

TABLE 57.

Relation between the flocculation of humate solutions and hydrogen-ion concentrations
(0.005% humus solution)

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.002 g humic acid.

B. Distilled water.

No.	Soln. A cc.	Soln. B, 20 cc.+ HCl millmols	After mixing	After a few hours	Over night			pH
			Appear- ance	Color of supernatant liquid	Appear- ance	Color of supernatant liquid	Ratio of floc.	
1	20	0.0	clear	yellow	clear	yellow	0	6.7
2	20	5.0	"	"	"	"	0	2.7
3	20	10.0	"	"	turbid	"	0	2.4
4	20	15.0	turbid	"	ppt	colorless	97	2.2
5	20	20.0	"	"	"	"	97	2.1
6	20	25.0	"	"	"	"	98	2.1
7	20	30.0	"	"	"	"	98	2.0
8	20	50.0	"	"	"	"	99	2.0
9	20	100.0	"	"	"	"	99	1.9

The stability of the clear black colored solution with various concentrations of Na-humate decreased gradually with increase of hydrogen-ion concentrations, and a large part of the content flocculated suddenly as soon as its reaction reached a certain pH value. In concentrations of 0.1 to 0.005 per cent of humus the pH zone of flocculation of the humate solution lay at lower pH than that of about 2.3 to 2.4. The pH zone of the flocculation was not noticeably moved by the difference in concentrations of humus.

In the experiment with colloidal humic acids, KAWAMURA and SAITO⁽³²⁾ have observed that the suspension containing 0.1176 per cent of humic acids brought about a marked flocculation below about pH 2.7. From the above results it was, therefore, seen that humus in these both states, i. e., solutions and suspensions, is flocculated at the zone of lower pH than about 2.3 to 2.7.

Next, as a preliminary test, suspensions of hydroxides of aluminum and iron which were prepared freshly from their chlorides and were purified by means of electrodialysis were employed instead of clay particles. A known quantity of the hydroxide suspension was

mixed with the solution containing varying quantities of Na-humate at various hydrogen-ion concentrations which were previously adjusted by adding hydrochloric acid or sodium hydroxide before the mixing of these solutions. Particles in the suspension of the hydroxides were prepared less than 1μ in diameter by means of sedimentation method. The flocculation, pH, isoelectric point and fixation of humus, etc. were examined.

The results obtained are given in tables 58 to 63.

Humus substances were flocculated with mineral colloids at a definite hydrogen-ion concentration of mixtures. In the ferric system the amount of flocculated humus substances increased in a reverse proportion to pH values and reached a constant value at a certain pH, whereas in the aluminum system the maximum point of the flocculation of humus substances took place at a certain pH value. The flocculation resulting from mixing of the humate solution and the suspension of the hydroxides was also isoelectrical, and near the isoelectric point the most favorable flocculation of these substances took place.

TABLE 58.

Interaction between ferric hydroxide suspensions and Na-humate solutions

Humus (mg)
— 1 m. mol/L $\text{Fe}(\text{OH})_3$ — ratio=500

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.020 g humic acid.

B. 20 cc. of 2 m. mols/L $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension.

No.	Solution B +HCl millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Cataphoresis $\mu/\text{sec.}/\sqrt{\text{cm.}}$	pH	Per cent of humus fixed by iron
1	0.0	100	-1.20	7.2	0
2	2.5	95	-1.05	3.7	5
3	5.0	20	-0.85	3.2	80
4	7.5	10	-0.63	2.8	90
5	10.0	0	-0.35	2.6	100
6	15.0	0	-0.20	2.4	100
7	20.0	0	-0.10	2.1	100
8	30.0	0	+0.05	2.0	100
9	40.0	0	+0.30	1.8	100
10	50.0	0	+0.45	1.7	100

(Isoelectric pH 2.0)

TABLE 59.

Interaction between ferric hydroxide suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (mg)}}{1 \text{ m. mol/L Fe(OH)}_3} \text{ ratio}=50$$

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.002 g humic acid

B. 20 cc. of 2 m. mols/L Fe(OH)_3 suspension.

No.	Solution B+HCl millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Cataphoresis $\mu/\text{sec}/\text{v}/\text{cm.}$	pH	Per cent of humus fixed by iron
1	0.0	100	-1.76	7.1	0
2	0.5	100	-0.68	4.5	0
3	1.0	100	-0.58	3.3	0
4	1.5	100	-0.55	3.1	0
5	2.0	55	-0.43	2.8	45
6	2.5	30	-0.34	2.6	70
7	5.0	10	-0.20	2.5	90
8	7.5	0	± 0.00	2.4	100
9	10.0	0	+0.05	2.3	100
10	12.5	0	+0.10	2.3	100

(Isoelectric pH 2.4)

TABLE 60.

Interaction between ferric hydroxide suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (mg)}}{1 \text{ m. mol/L Fe(OH)}_3} \text{ ratio}=12.5$$

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.0005 g humic acid.

B. 20 cc. of 2 m. mols/L Fe(OH)_3 suspension.

No.	Solution B+HCl millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Cataphoresis $\mu/\text{sec}/\text{v}/\text{cm.}$	pH	Per cent of humus fixed by iron
1	0.0	10	-1.36	7.1	0
2	0.2	10	-0.93	6.7	0
3	0.3	0	-0.85	5.1	100
4	0.5	0	-0.44	4.5	100
5	1.0	0	-0.33	3.8	100
6	1.5	0	-0.21	3.4	100
7	2.0	0	-0.05	3.1	100
8	2.5	0	± 0.00	2.9	100
9	5.0	0	+0.10	2.6	100
10	7.5	0	+0.27	2.4	100
11	10.0	0	+0.40	2.3	100
12	12.5	0	+0.43	2.2	100

(Isoelectric pH 2.9)

TABLE 61.

Interaction between aluminum hydroxide suspensions and Na-humate solutions

Humus (mg)
 --- 1 m. mol/L Al(OH)₃ --- ratio=250

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.01 g humic acid.

B. 20 cc. of 2 m. mols/L Al(OH)₃ suspension.

No.	Solution B+HCl millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Cataphoresis μ /sec./v/cm.	pH	Per cent of humus fixed by aluminum
1	5.0	54	+1.36	2.9	46
2	2.0	28	+1.00	4.3	72
3	1.0	0	+0.14	6.3	100
4	0.8	0	-0.04	6.5	100
5	0.5	0	-0.41	6.6	100
6	0.4	1	-0.80	6.7	99
7	0.3	1	-0.94	6.8	99
8	0.0	5	-1.20	7.0	95
9	0.1 NaOH	45	-1.36	7.1	55
10	0.2 NaOH	64	-1.53	7.2	36
11	0.3 NaOH	82	-1.74	7.4	18
12	0.4 NaOH	91	-1.80	7.5	9

(Isoelectric pH 6.5)

TABLE 62.

Interaction between aluminum hydroxide suspensions and Na-humate solutions

Humus (mg)
 --- 1 m. mol/L Al(OH)₃ --- ratio=50

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.002 g humic acid.

B. 20 cc. of 2 m. mols/L Al(OH)₃ suspension.

No.	Solution B+ NaOH millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Cataphoresis μ 'sec./v'cm.	pH	Per cent of humus fixed by aluminum
1	0.0	100	+1.40	5.8	0
2	0.1	100	+1.02	6.0	0
3	0.2	95	+0.84	6.2	5
4	0.3	90	+0.68	6.3	10
5	0.4	10	+0.51	6.4	90
6	0.5	8	+0.41	6.5	92
7	0.8	0	+0.34	6.5	100
8	1.0	0	+0.05	6.7	100
9	2.0	3	-0.41	9.1	97
10	3.0	8	-1.02	9.9	92
11	5.0	95	-1.16	10.8	5
12	7.5	95	-1.35	10.9	5
13	10.0	95	-1.42	11.6	5

(Isoelectric pH 6.9)

TABLE 63.

Interaction between aluminum hydroxide suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (mg)}}{1 \text{ m. mol/L Al(OH)}_3} \text{ ratio}=12.5$$

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.0005g humic acid.

B. 20 cc. of 2 m. mols/L Al(OH)_3 suspension.

No.	Solution B+ NaOH millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Cataphoresis $\mu/\text{sec.}/\text{v}/\text{cm.}$	pH	Per cent of humus fixed by aluminum
1	0.0	75	+1.30	5.5	25
2	0.1	80	+1.25	5.7	20
3	0.3	80	+1.18	5.8	20
4	0.5	75	+1.10	6.1	25
5	0.8	20	+1.02	6.4	80
6	1.0	0	+0.84	6.4	100
7	1.3	0	+0.58	6.7	100
8	1.5	0	+0.00	7.9	100
9	2.5	95	-0.58	9.8	5
10	4.0	98	-0.83	10.1	2
11	5.0	95	-1.36	10.3	5
12	10.0	7	-1.80	10.9	93

(Isoelectric pH 7.9)

The isoelectric point was modified by varying the humus-hydroxide ratio, that is, the higher ratio showed lower pH of the isoelectric point. The relation between the isoelectric point and the humus-hydroxide ratio is shown as follows:

In the ferric system		In the aluminum system	
Humus (mg) $1 \text{ m. mol/L Fe(OH)}_3$	ratio,	Humus (mg) $1 \text{ m. mol/L Al(OH)}_3$	ratio,
500	2.0	250	6.5
50	2.4	50	6.9
12.5	2.9	12.5	7.9

The change of the isoelectric point depending upon the humus-hydroxide ratio and the difference of the isoelectric point between the ferric and aluminum system can be explained by the same reason mentioned in the second chapter. It can be accordingly said that suspensions of aluminum and iron interact with humate solutions, just as their respective solutions interact.

Further, the experiment concerning the interaction between soil colloidal suspensions and humate solutions was held as shown in the following.

The sample of soil colloids, the method of the preparation of hydrogen-clay suspensions and the experimental procedure are described at the beginning of this chapter.

The results are shown in tables 64 to 78.

The stability of soil colloidal suspensions which were mixed with different concentrations of the Na-humate solution was changed by hydrogen-ion concentrations in mixtures, that is, the stability of the mixtures decreased with increase of hydrogen-ion concentrations and finally the flocculation of these substances was appeared.

DEMOLON and BARBIER⁽¹²⁾ also examined concerning the flocculation of humic acids in soil suspensions at various pH values and obtained the following result:

pH of mixtures	3.85	5.0	5.9	6.95	7.25	7.55	8.5
Humus fixed, per } 100 humus added }	96.0	80.8	72.6	62.8	53.7	46.5	20.5

TABLE 64.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus(g)}}{\text{Clay(g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{10}$$

Soil sample: D. 370, Andesite soil

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.003 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.03 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100	—	6.7	0
2	0.5	90	—	3.6	10
3	1.0	3		3.4	97
4	1.5	0		3.1	100
5	2.0	0		2.9	100
6	2.5	0		2.8	100
7	5.0	0		2.6	100
8	10.0	0		2.2	100
9	15.0	0	—	2.0	100
10	20.0	0	—	1.9	100
11	25.0	0	?	1.8	100
12	50.0	0	?	1.8	100

TABLE 65.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (g)}}{\text{Clay (g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{2}$$

Soil sample: D. 370, Andestite soil

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.015 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.03 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100	—	7.3	0
2	0.5	100		5.0	0
3	1.0	99		4.6	1
4	1.5	99		3.7	1
5	2.0	98		3.1	2
6	2.5	10		3.0	90
7	5.0	3		2.4	97
8	10.0	0	—	2.1	100
9	15.0	0	—	2.0	100
10	20.0	0	?	1.9	100
11	25.0	0	?	1.8	100

TABLE 66.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (g)}}{\text{Clay (g)}} \text{ ratio} = 1$$

Soil sample: D. 370, Andesite soil

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.03 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.03 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100	—	7.4	0
2	0.5	100		6.5	0
3	1.0	100		6.3	0
4	1.5	98		5.2	2
5	2.0	97		4.1	3
6	2.5	95		3.3	5
7	5.0	10		2.6	90
8	7.5	1		2.3	99
9	10.0	0	—	2.1	100
10	15.0	0	—	2.0	100
11	25.0	0	?	1.9	100
12	50.0	0	?	1.8	100

TABLE 67.

Relation between soil colloidal suspensions and hydrogen-ion concentrations

Soil sample: D. 375, Lateritic soil.

A. 20 cc. of distilled water.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.014 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH
1	0.0	100	—	5.2
2	0.3	0	—	2.7
3	0.5	0	—	2.6
4	1.3	0	±0	2.5
5	2.0	0	+	2.4
6	2.5	0	+	2.3
7	4.0	0		2.1
8	5.0	0		1.9
9	7.5	0		1.8
10	12.5	0		1.7
11	25.0	0		1.5
12	50.0	0		1.2

TABLE 68.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (g)}}{\text{Clay (g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{10}$$

Soil sample: D. 375, Lateritic soil.

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.0015 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.014 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100		6.2	0
2	0.3	85		3.2	15
3	0.5	40		2.8	60
4	1.3	5		2.6	95
5	2.0	2		2.5	98
6	2.5	1		2.3	99
7	4.0	0		2.1	100
8	5.0	0	—	1.9	100
9	7.5	0	—	1.8	100
10	12.0	0	±0	1.7	100
11	25.0	0	±0	1.5	100
12	50.0	0	+	1.2	100

TABLE 69.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (g)}}{\text{Clay (g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{5}$$

Soil sample: D. 375, Lateritic soil.

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.003 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.014 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100		6.3	0
2	0.3	93		3.5	7
3	0.5	90		2.8	10
4	1.3	10		2.6	90
5	2.0	5		2.5	95
6	2.5	3		2.3	97
7	4.0	1		2.1	99
8	5.0	0		1.9	100
9	7.5	0	-	1.8	100
10	12.5	0	±0	1.7	100
11	25.0	0	+	1.5	100
12	50.0	0		1.2	100

TABLE 70.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (g)}}{\text{Clay (g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{2}$$

Soil sample: D. 375, Lateritic soil.

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.007 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.014 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100		6.5	0
2	0.3	95		4.3	5
3	0.5	93		3.0	7
4	1.3	70		2.8	30
5	2.0	20		2.6	80
6	2.5	5		2.4	95
7	4.0	2		2.2	98
8	5.0	0		2.0	100
9	7.5	0		1.9	100
10	12.5	0	-	1.8	100
11	25.0	0	±0	1.5	100
12	50.0	0	+	1.2	100

TABLE 71.

Relation between soil colloidal suspensions and hydrogen-ion concentrations

Soil sample: D. 435, Sandstone-shale soil.

A. 20 cc. of distilled water.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.02 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH
1	0.0	110		6.4
2	1.3	10		3.0
3	2.5	3		2.6
4	5.0	0		2.4
5	10.0	0		2.0
6	20.0	0	-	1.7
7	25.0	0	+	1.5
8	30.0	0		1.4
9	35.0	0		1.3
10	45.0	0		1.2
11	50.0	0		1.2

TABLE 72.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus(g)}}{\text{Clay(g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{10}$$

Soil sample: D. 435, Sandstone-shale soil.

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.002 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.02 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100		6.5	0
2	1.3	85		2.7	15
3	1.5	50		2.6	50
4	1.8	45		2.6	55
5	2.0	20		2.5	80
6	2.2	15		2.5	85
7	2.5	10		2.4	90
8	5.0	3		2.2	97
9	10.0	0		2.1	100
10	15.0	0		2.0	100
11	20.0	0		1.9	100
12	25.0	0		1.8	100
13	30.0	0	-	1.7	100
14	35.0	0	+	1.6	100
15	40.0	0		1.5	100
16	45.0	0		1.4	100
17	50.0	0		1.3	100

TABLE 73.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (g)}}{\text{Clay (g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{5}$$

Soil sample: D. 435, Sandstone-shale soil.

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.004 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.02 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100		6.6	0
2	1.3	85		2.7	15
3	2.5	20		2.5	80
4	3.8	5		2.4	95
5	5.0	3		2.2	97
6	7.5	0		2.0	100
7	15.0	0		1.9	100
8	20.0	0		1.8	100
9	25.0	0		1.7	100
10	30.0	0	-	1.6	100
11	35.0	0	+	1.5	100
12	40.0	0		1.4	100
13	45.0	0		1.3	100
14	50.0	0		1.2	100

TABLE 74.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (g)}}{\text{Clay (g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{2}$$

Soil sample: D. 435, Sandstone-shale soil.

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.01 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.02 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100		7.1	0
2	0.5	93		4.3	7
3	1.3	92		3.2	8
4	1.8	91		2.9	9
5	2.5	90		2.7	10
6	3.8	25		2.4	75
7	5.0	15		2.3	85
8	7.5	5		2.2	95
9	15.0	3		2.0	97
10	20.0	0		1.9	100
11	25.0	0		1.8	100
12	37.5	0	-	1.5	100
13	45.0	0	+	1.4	100
14	50.0	0		1.3	100

TABLE 75.

Relation between soil colloidal suspensions and hydrogen-ion concentrations

Soil sample: D. 436, Lateritic soil.

A. 20 cc. of distilled water.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.02 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH
1	0.0	100		5.7
2	0.3	40		2.7
3	0.8	3		2.3
4	1.2	1		2.1
5	2.5	0		2.0
6	5.0	0		1.8
7	7.5	0	-	1.7
8	10.0	0	+	1.6
9	12.5	0		1.5
10	15.0	0		1.4
11	20.0	0		1.3
12	25.0	0		1.2

TABLE 76.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (g)}}{\text{Clay (g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{10}$$

Soil sample: D. 436, Lateritic soil.

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.002 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.02 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100		6.6	0
2	0.5	90		2.8	10
3	1.3	89		2.5	11
4	1.5	88		2.5	12
5	2.0	45		2.4	55
6	2.5	20		2.3	80
7	3.8	8		2.2	92
8	5.0	3		2.1	97
9	10.0	0		1.9	100
10	15.0	0	-	1.7	100
11	25.0	0	+	1.5	100
12	50.0	0		1.2	100

TABLE 77.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (g)}}{\text{Clay (g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{5}$$

Soil sample: D. 436, Lateritic soil.

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.004 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.02 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100		6.6	0
2	0.5	97		2.9	3
3	1.3	93		2.6	7
4	1.8	90		2.4	10
5	2.5	80		2.3	20
6	3.8	15		2.2	85
7	5.0	3		2.1	97
8	6.2	1		2.0	99
9	7.5	0		2.0	100
10	12.5	0	-	1.9	100
11	25.0	0	+	1.5	100
12	50.0	0		1.2	100

TABLE 78.

Interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions

$$\frac{\text{Humus (g)}}{\text{Clay (g)}} \text{ ratio} = \frac{1}{2}$$

Soil sample: D. 436, Lateritic soil.

A. 20 cc. of Na-humate solution containing 0.01 g humic acid.

B. 20 cc. of clay suspension containing 0.02 g clay.

No.	HCl in the system, millimols	Over night, turbidity of supernatant solution	Electrical charge	pH	Per cent of humus fixed by soil colloid
1	0.0	100		6.7	0
2	0.5	93		3.2	7
3	1.3	89		2.8	11
4	1.8	88		2.6	12
5	2.5	87		2.4	13
6	3.8	20		2.3	80
7	5.0	5		2.2	95
8	6.3	3		2.1	97
9	7.5	1		2.0	99
10	12.5	0	-	1.9	100
11	25.0	0	+	1.5	100
12	50.0	0		1.2	100

From this result they recognized the presence of the direct relation between the flocculation of humic acids with soil particles and the pH of mixtures.

Flocculation of humus substances with soil colloids, however, showed no linear relation to the pH of mixtures. It was accelerated suddenly at a certain pH value. The point of the sudden change of the flocculation of humus substances with soil colloids lay near the pH of 2.5 to 3, and it was lowered to some extent with increase of the humus-clay ratio in mixtures.

Although the cataphoretic measurement of soil suspensions was not determined as accurately as in the previous experiment with mineral constituents because of the fineness of soil colloidal particles, at least the difference of the sign of the electrical charge could be determined. The mixture of these hydrogen-clay suspensions and the humate solution showed an isoelectric point at certain pH values, though in the clay suspension D. 370 the point was not clearly observed within these pH zones. These isoelectric points were depressed to a little extent by increase of the humus-clay ratio.

The isoelectric point of the soil colloidal suspensions, in comparison with that of aluminum or ferric "silico-humates" and aluminum or ferric "hydroxide-humates" in the previous experiments, was found at lower pH than that of these artificial humates. The fact that the electrical charge of the soil suspension remained negative until the pH of the mixtures lowered remarkably may perhaps be due to less anionic dissociations in soil particles than in other artificial amphoteric complexes.

The presence of isoelectric points in mixtures with soil suspensions and humate solutions, and the change of the point by the difference of acidoid-amphoteloid ratios indicate undoubtedly that a certain mutual action took place between soil particles and the Na-humate solution, and also indicate that a possibility of the occurrence of some chemical and colloid-chemical change in the mixtures. But it is very doubtful whether all the humus combined with soil particles. Since the free humus is carried down with the flocculate there

is no direct way of telling to what extent combination took place. Considering MATTSON's experiment⁽⁴⁰⁾ and the result of the previous chapter, it is supposed that a part of humus substances at least may be precipitated in a free state, and that the amount of the precipitated free humus substance may be increased in a direct proportion to the higher acidity of mixtures.

B. Summary

This chapter dealt with the interaction between soil colloidal suspensions and Na-humate solution. First of all, as a preliminary experiment, observations were made concerning the relation between the flocculation of the humate solution and hydrogen-ion concentrations, and the mutual action between suspensions of aluminum or ferric hydroxide and the humate solution.

The Na-humate solution of various concentrations decreased gradually its stability with additional increase of hydrogen-ion concentration, and a large part of the humic acid flocculated suddenly as soon as the reaction of the solution had reached a certain pH value, i. e., near pH 2.3 to 2.4. The result obtained from the humate solution was slightly different from the data obtained from humic acid suspensions by KAWAMURA and SAITO. The point of the sudden change in the stability of humic acids was slightly modified by their concentration.

The suspension of aluminum or ferric hydroxide whose particles were below $1\ \mu$ in diameter and were purified as much as possible by means of electrodialysis, was mixed with the Na-humate solution of different concentrations. As a consequence, the following result was obtained. Humus substances were carried down with iron or aluminum salt at a certain pH value. In the ferric system the amount of flocculated humus substances increased in a reverse proportion to the pH value, but it became finally constant at a certain pH, whereas in the aluminum system a maximum point of the flocculation of humus substances was found at a certain pH value. The flocculation which took place by mixing the humate solution and the suspension

of the hydroxides was isoelectrical and near the isoelectric point was produced the most favorable flocculation of these substances. The isoelectric point was moved to lower side of pH as the humus hydroxide ratio was increased. In the ferric system whose $\frac{\text{Humus (mg)}}{1 \text{ m. mol/L Fe(OH)}_3}$ ratio lies between 12.5 and 500, the isoelectric points were found between the pH of 2.9 to 2.0; on the other hand, in the aluminum system whose $\frac{\text{Humus (mg)}}{1 \text{ m. mol./L Al(OH)}_3}$ ratio lies between 12.5 and 250, the points lay in the zone of pH 7.9 to pH 6.5. The entrance of humus substances into suspensions of hydroxides of aluminum and iron was affected by the isoelectric relation of mixtures. It is therefore suggested that under the suspended condition of aluminum and iron also, as well as under their dissolved condition, the interaction took place between the hydroxides and humus substances.

The hydrogen-clay suspension whose particles were below 1μ in diameter was prepared from the soil derived from the sandstone-shale, the lateritic and the andesite soil in Taiwan, and was mixed with a different concentration of Na-humate solutions.

The stability of soil colloidal suspensions containing different concentrations of humates was influenced by hydrogen-ion concentrations of mixtures. That is to say, the stability of mixtures decreased with increase of hydrogen-ion concentrations, and the higher the acidity of mixtures the greater the flocculation of these substances. However, the flocculation was not only in smooth linear relation with pH of mixtures, but suddenly accelerated at a certain pH value, near the pH of 2.5 to 3, which was lowered to some extent with increase of the humus-clay ratio in mixtures.

The flocculation found in these mixtures of soil colloids and humates was also isoelectrical and the isoelectric points were modified to more or less by varying the humus-clay ratio.

Thus, the presence of the isoelectric relation between clay particles and humus substances shows that they made the interaction with each other, instead of a simple mechanical mixing.

IV. CONSIDERATION ON THE ISOELECTRIC RELATION OF SOIL COMPONENTS

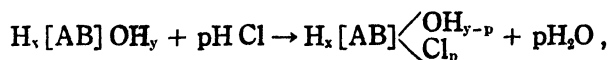
The ampholyte constituting soil colloids divides itself into two parts as follows :

1. Primary amphoteric colloids . . . Aluminum hydroxide, ferric hydroxide and protein.

2. Secondary amphoteric colloids . . . Silicate, phosphate and humate of iron and aluminum, and silicate and humate of protein, etc.,

These various ampholytes in soil components naturally play the main role in soils. Since ampholytes behave as acidoids and basoids according to the variation of hydrogen-ion concentrations of media, there are isoelectric points at which ampholytes dissociate an equal number of anions and cations. The general formula representing soil colloids can be shown as follows: $H[AB]OH$, where A and B are acidoid and basoid components, respectively, which combine with each other in different proportions. The letters inside the brackets represent a non-diffusible part of soil colloids. Both H and OH are diffusible ions in soil colloids and represent an acid and base with polyvalency. The formula can therefore be written as follows: $H_x[A_mB_n]OH_y$, where x, m, n, y mean ion numbers.

In this unsaturated colloid $H[AB]OH$ the degree of the dissociation of the H- and OH-ion is very low, and as a result these diffusible aions behave as weak acids or bases. When the OH-ion is weaker than another, as well as in the case of natural common soil colloids, the basicity causing the OH-ion is compensated by the stronger dissociable H-ion, and consequently the colloid shows the acid reaction as a whole, gives a negative electric charge. When any acid like hydrochloric acid is added to soil colloids under the above condition the following change takes place.



Since the degree of the dissociation of the Cl-ion which entered into the colloid is greater than that of the original OH-ion, the anionic

dissociation of colloidal particles is increased. Higher hydrogen-ion concentrations of soils resulting from the further addition of hydrochloric acid decrease the cationic dissociation and the negative charge of colloids. Finally the colloid shows the isoelectric point at which its diffusible anion and cation dissociates to equal numbers. The further additional increase of hydrochloric acid over this point gives reversely the positive charge to the colloid.

In the acid side of the isoelectric point the ampholyte shows the same behaviour as a base and is able to interact with any other anion, while in the basic side of the point it behaves the same as an acid and interacts with any other cation.

Ions dissociated from the non-diffusible part keep themselves electrostatically at the surroundings of the particle. The degree of dissociation of these colloidal particles varies greatly with the sort and nature of ions contained in colloids, and is also affected by the nature and concentration of all ions which are present in the state of equilibrium in solutions. The isoelectric point of soil colloids is therefore modified by the nature and sort of ions added to the system.

Thus, if other ions come into contact with amphoteric colloids the various interaction takes place between the ions added and the diffusible ions of colloids, according to the nature of ions, and consequently some chemical and physico-chemical changes of the nature of colloids are brought about.

Further, two amphoteric colloids having different isoelectric points will react with each other isoelectrically, forming a new complex at a certain pH which lies between the each isoelectric point of both these components. This law was made clear by MATTSON in 1932⁽⁴²⁾, in which it was shown that a pair of such colloids actually do unite chemically with each other, as evidenced by the fact that the colloid having the highest isoelectric point loses a part of its power to bind acids, and that the colloid having the lowest isoelectric point loses a part of its power to bind bases, when the two are mixed.

The occurrence of the ionic mutual action in mixtures of two different colloids can be assumed, it is then conceivable that the action

between two amphoteric colloids can be included in the category of the chemical reaction⁽⁷³⁾.

According to the present day theory the chemical combination is due to the parting and union of valency. Atoms or atom groups having the electrical charge, i. e., ions, combine mutually by valency. Colloidal particles of aluminum and iron salts and silicates each consist of the union of numerous molecules and a part of them dissociates as either base or acid with high valency. The dissociated part, however, nondiffusible and consequently has an electrical charge and it is seen to be the same as ions.

From the above, therefore, it can be assumed that the mutual action between mixtures of two different colloids is a chemical reaction in a wide sense, for even stoichiometrical relations are not always found in it.

It is accordingly supposed that in mixtures of negative colloidal silicates and positive colloidal sesquioxides a weak chemical combination takes place. For, since silicates behave as weak acids and sesquioxides as weak bases, they can not combine so completely with each other in comparison with the combination between strong acids and strong bases like hydrochloric acid and sodium hydroxide. It is therefore considered that colloidal silicates and sesquioxides also free a part of their valency, and that a new free valency may be also formed because of the mutual combination of the two⁽⁸¹⁾.

MATTSON⁽⁸⁹⁾ has given an example of the above combination as shown by the following formula $\begin{matrix} \text{HO} \\ \text{HO} \end{matrix} \diagup \text{Al} - \text{O} - \text{SiO}_2 - \text{OH}$. This formula, however, represents simply the condition in the case of $\text{SiO}_2 / \text{Al}_2\text{O}_3 = 2$. Silicates and aluminum salts (also ferric salts) are, as mentioned above, bases or acids with so much high valency that even their one colloidal particle is an aggregation of a few million molecules, and MATTSON expresses it by the term "ionogen". Accordingly, it can be assumed that the mutual ratio of the extent to which these colloids combine with each other is variable, in other words, the molecular ratio for combining the two colloids is not constant.

It has been assumed that, as above described, some weak or partial chemical combination will occur by mixing two colloids. Further, it has been found that certain substances bring about a clear chemical reaction in their colloidal mixture. For example, FREUNDLICH and his co-workers⁽¹⁹⁾ have detected a chemical combination in mixing colloidal trisulfide of silver and arsenic sol, in mixing colloidal sulfur and selenium sol, and in mixing colloidal sulfur and silver sol⁽¹⁸⁾. BILZ and PAULI have also observed the chemical process in the action of selenium sol upon gold and sulfide sol, and recently SAUER and STEINER⁽⁵⁵⁾ observed a change of color in the mixture brought about by the mutual action between copper and sulfur sol, and determined that this color change depends on the chemical transformation of these colloidal constituents to Cu-(1)-sulfide and later to Cu-(2)-sulfide.

Considering the above facts, it can be said that between different kinds of colloids some chemical interaction can take place, broadly speaking. This will be considered further in a later chapter.

V. CHEMICAL ANALYSIS OF SOIL SAMPLES

Chemical compositions and some important properties of the several soil samples which are to be employed in later experiments were examined.

Since in the plains of tropical and subtropical Taiwan there are few soils showing the black color that comes from the accumulation of humus substances, such soils have to be sought among the cool uplands. It appears that soils derived from andesites accumulate comparatively much humus even in the plains, whereas soils originated from sedimentary rocks accumulate far less humus under the same environmental conditions as the former.

This fact might give some suggestion as to the present study, and therefore in these experiments soils derived from igneous and sedimentary rocks in Taiwan were employed. A large part of soils in Taiwan belongs geologically to sedimentary origins; as a consequence, the distribution of soils of igneous origins has been greatly limited.

Soils taken in the experiment are as follows :

(a) Soils of igneous origins (Andesite soils).

- D. 368 Taihoku-syu, Sitisei-gun, Mt. Sitisei, 800 m Height,
humus soil, surface soil.
- D. 370 do, 500m Height, humus soil (< 15 cm Depth).
- D. 371 do, light black color, 15-22 cm Depth.
- D. 572 do, red brown color, 22-39 cm Depth.
- D. 373 do, red brown color, > 39 cm Depth.
- Andesite, do, mother rock which lay in the under
layer of the above.

(b) Soils of sedimentary origins (Soils derived from
sandstone-shale).

- D. 374 Taihoku-syu, Kaizan-gun Ooka-syo, lateritic soil,
surface soil (< 3 cm Depth), a little stained
with humus.
- D. 375 do, red brown color, 3-100 cm Depth.
- D. 376 do, neighbouring place with D. 374, < 3 cm
Depth.
- D. 377 do, red brown color, 3-23 cm Depth.
- D. 378 do, red brown color, 23-43 cm Depth.
- D. 379 do, red brown color, 43-63 cm Depth.

By using these soil samples which were sifted through a 0.5 mm sieve the following experiment was carried out.

1. Hygroscopic moisture.
2. Loss on ignition.
3. Aluminum and iron which are soluble in sp. gr. 1.15 hot hydrochloric acid.
4. Silica which is soluble in hot sodium carbonate solution.
5. Silica which is soluble in sp. gr. 1.15 hot hydrochloric acid.
The analysis of these components was conducted by the usual gravimetric method.
6. Humus which is soluble in 4 per cent ammonia solution. It was measured by means of SHIBUYA's method^(62, 63).

7. Exchange acidity. 5 g of soils were taken in an Erlenmeyer flask with 100 cc. capacity and into the flask were poured 50 cc. of 0.04 N KCl solution. The content was stoppered closely and was allowed to stand over night with occasional shaking. After the filtration 20 cc. of the filtrate were heated to boiling to expel carbondioxide. After cooling, the filtrate was titrated by the standard alkaline solution with the brom cresol purpul as an indicator.

The result was shown by a milligram equivalent of hydrogen in 100 g of dried soils.

The result obtained is given in table 79.

TABLE 79.
Analytical results of soils (Per cent in dried soils)

	Soils derived from igneous rocks						Soils derived from sedim. rocks					
	D. 368	D. 370	D. 371	D. 372	D. 373	Ande-site	D. 374	D. 375	D. 376	D. 377	D. 378	D. 379
Loss on ignition	33.69	24.37	19.50	17.33	14.11	1.30	8.11	7.42	6.73	5.43	4.24	4.31
Humus	14.90	9.50	7.17	slight	slight	trace	3.42	—	2.69	1.89	slight	slight
Fe ₂ O ₃ sol. in HCl	5.88	10.99	12.38	12.11	7.88	5.11	3.45	7.19	2.81	2.83	2.95	3.31
Al ₂ O ₃ sol. in HCl	5.91	6.56	22.57	24.74	46.39	17.59	7.61	23.26	8.12	7.33	8.87	10.56
SiO ₂ sol. in HCl	0.22	0.66	0.60	1.06	1.16	0.51	0.13	0.15	0.11	0.10	0.19	0.22
SiO ₂ sol. in Na ₂ CO ₃	22.90	34.99	32.90	32.20	34.90	29.12	13.43	17.79	12.53	11.31	12.11	13.66
Total SiO ₂	23.12	35.65	33.50	33.27	36.06	29.63	13.56	17.94	12.65	11.41	12.31	13.88
Exch. acidity, H m. e./100g soil	1.22	2.02	1.43	0.82	0.00	0.00	0.94	1.89	0.75	1.05	1.19	1.50
SiO ₂ /R ₂ O ₃	4.07	4.46	1.87	1.75	1.19	2.41	2.35	1.09	2.19	2.13	1.93	1.86
SiO ₂ /Al ₂ O ₃	6.66	9.20	2.50	2.29	1.32	2.86	3.04	1.31	2.67	2.65	2.35	2.23
SiO ₂ /Fe ₂ O ₃	10.43	8.65	7.20	7.34	12.18	15.46	10.35	6.63	12.10	10.86	10.90	11.41

The soils of igneous origins in comparison with those of sedimentary origins were generally higher in the percentage of loss on ignition, humus, hydrochloric acid soluble alumina and iron, and total silica, etc. .

At the surface layer silica-sesquioxides and silica-alumina ratios were remarkably higher in the soils of igneous origins than those of sedimentary one.

Comparing the content of these constituents in the soils of igneous origins in various soil layers, the humus content and the exchange acidity were in reverse to the progression of the depth. The aluminum content showed a remarkable increase while in iron and total silicon was only found a little variation through all the layers. Consequently, silica-sesquioxides ratios were highest i. e., 4.46, at the surface.

In the soils of sedimentary origins, humus, iron, aluminum and total silicon decreased on the whole with the lowering of the horizon, especially the content of iron and aluminum was considerably large at the surface layer. Accordingly silico-sesquioxides ratios at the surface showed the lowest value of all the layers, i. e., only 1.09. It is therefore seen from the result, that the soils of sedimentary origins are in the condition that the lateritization process is progressing.

Further consideration of these soils will be given in a later chapter.

VI. DISSOLVING OF HUMUS SUBSTANCES FROM VARIOUS HUMATES AT DIFFERENT HYDROGEN-ION CONCENTRATIONS

The term "humus" does not designate a definite organic substance, but a main part of humus substances will be represented by humic acids. A large part of humus substances exists together with various other components in soils. The solubility of humus substances at any hydrogen-ion concentration must be affected by the difference of the states in soils and of the degree of humification of humus substances in soils.

This chapter dealt with the experiment for the study of the form of humus substances in soils or in mixtures with mineral substances. Humus substances were extracted successively by the alkaline solution with different hydrogen-ion concentrations. On the basis of the amount of humus substances which were dissolved at definite hydrogen-ion concentrations their states in soils were examined.

Humus substances have been classified in several groups, for example, humus-, hymatomelanic- and fulvic acid. Each of these groups has its characteristic reaction to solvents, for instance, humus acid is soluble in alkali, insoluble in acid, alcohol and water, and hymatomelanic acid is soluble in alkali and alcohol, insoluble in acid and water, and fulvic acid is soluble in alkali, alcohol and water. Thus, it is common for all groups to be soluble in alkali.

The solubility of humus substances in alkaline solvents is greatly affected by the kind of solvents, accordingly many workers have recommended various alkaline solvents for the purpose of dissolving humus substances. In this experiment hydroxide of sodium was employed as an alkaline solvent.

A. Humic Acids and Humates

Successive extractions of humus substances by the alkaline solution with different hydrogen-ion concentrations were conducted. Samples used were as follows:

1. Merck's humic acid. Merck's humic acid was dissolved into sodium hydroxide solution and then a suitable amount of hydrochloric acid was poured into this dark brown colored alkaline solution in order to precipitate the humic acid. After decantation the residue was dialyzed until the impurity was removed almost completely. This purified fresh humic acid was taken as a sample.

2. Humic acids separated from the humus soil D. 147 (sedimentary origin, described at the next paragraph). Fine earthy part of the soil were repeatedly extracted by hot acetone in order to exclude resin, and after filtration an excess of acetone was evaporated from the soil by means of vacuum evaporation⁷¹. The residue was sufficiently washed with distilled water and then extracted by 4 per cent sodium hydroxide solution. A suitable amount of hydrochloric acid was poured into the dark colored solution in order to flocculate humic acids. After decantation the flocculate was washed with distilled water and then dialyzed until the impurity was removed almost

completely. This purified fresh humic acid separated from the humus soil D. 147 was used in the experiment.

3. Humic acids separated from the humus soil D. 370 (igneous origin). The separation was carried out by the same method as that in the above soil.

4. Aluminum humates. Given quantities of aluminum chloride and Na-humate solutions were mixed with each other at the isoelectric pH. The ratio of Al_2O_3 to humus in the mixture was 2.5:1 millimols. The isoelectric flocculate was filtered and washed with distilled water until the reaction of Cl-ions no longer appeared. The freshly prepared and purified flocculate was taken for the experiment.

5. Ferric humates. From ferric chloride and Na-humate solutions, the sample was prepared isoelectrically by a procedure similar to that of the aluminum humate.

6. Aluminum "silico-humates." By the method similar to that in the previous chapter aluminum "silico-humates" were prepared, and at that time the mutual ratio of Al_2O_3 : SiO_2 :Humus in mixtures was 2.5:5:1 millimols.

7. Ferric "silico-humates". The method of preparation and the mutual ratio of the three constituents were the same as in the above case.

The experimental procedure is described briefly as follows: A known quantity of samples to be extracted was taken in a flask with 300 cc. capacity, and in order to make the extraction at various pH values, a given quantity of sodium hydroxide solutions with different concentrations was added to the flask and the total volume was raised to 200 cc. by adding water. pH values, at which the extraction was carried out, divided themselves into the following five grades, namely, pH 8, 9, 10, 11 and 12.

The contents of the flask were allowed to stand for 24 hours with a definite shaking at 30°C and then one half of the solution, containing the dissolved humus substance, was pipetted into another vessel, and the sodium hydroxide solution of the same pH as that of the flask was added again to the residual solution in the flask to an

[illegible]

[illegible]

[illegible]

lutions at the first extraction. Accordingly the solubility of the humic acid in the alkaline solutions with various pH values was markedly high.

2. Humic acids separated from the soil D. 147 and D. 370 (Tables 81 and 82): Their solubility was almost similar to that of Merck's humic acid. At higher pH values than 8 these acids from the both soils were extracted completely by the first extraction.

3. Aluminum humates (Table 83): At various pH values excepting the highest pH of all, humus substances were not extracted completely at the first extraction. The quantity which dissolved at the first extraction lowered directly proportional to decrease of pH values. The residual humus substance dissolved successively by the later extractions, and the dissolved quantity at every single extraction lowered with repeated extractions. The humus substance which was extracted during the all extraction times highered in its amount with increase of pH values, and the percentage in relation to its original content was about 31 per cent at pH 8, 56 per cent at pH 9, 81 per cent at pH 10 and 100 per cent at the pH of 11 and 12.

4. Ferric humates (Table 84): The solubility of humus substances of ferric humates did not differ so noticeably from that of the aluminum humates. The per cent of the total dissolved humus substance in the original content was about 46 per cent at pH 8, 59 per cent at pH 9, 84 per cent at pH 10, and at the pH of 11 and 12 all the humus substance was extracted.

Thus, humus substances in the aluminum and ferric humate were less soluble in alkaline solutions with various pH values than that of the free humic acids.

5. Aluminum "silico-humates" (Table 85):

6. Ferric "silico-humates" (Table 86):

In these systems also, the solubility of humus substances in alkaline solutions was almost similar to that of the aluminum and ferric humate. That is, a large part of the humus substances entered into solutions at the first extraction and the quantity was proportional to the pH values of the solutions, and the residual humus substances

were successively extracted by the later extractions. While at the highest pH value they were completely extracted at the first extraction. The quantity of the humus substances which dissolved throughout the all extraction times highered with increase of pH values, and in the aluminum system the percentage in the original humus substances was about 43 per cent at pH 8, 66 per cent at pH 9, 87 per cent at pH 10 and 100 per cent at pH 11 and 12. In the ferric system the percentage was about 38 per cent at pH 8, 40 per cent at pH 9, 99 per cent at pH 10, and 100 per cent at the pH of 11 and 12. As it was seen, the solubility of these humates also, as well as in the aluminum and ferric humate, was markedly lower than that of the free humic acids.

From the above data the following result can be concluded. The solubility of humus substances were raised by increasing pH values of solvents and the solubility in solutions with a definite pH value markedly differed from each other between the free humic acids and humates. The former was more soluble at any pH value than the latter. In this case, the influence of the difference in physical properties of solutes upon the solubility should be so perceptible, for these solutes were in the similar physical condition to one another. It is therefore conclusively said that humus substances in the free state were more easily soluble in the alkaline solution than those in combination with other components like iron, aluminum and silicon, and that humus substances in the aluminum or ferric "silico-humate" were present in the state similar to those in the aluminum and ferric humate, because their solubility in these solvents was not so different between the humates and "silico-humates".

B. Natural Soils

In the preceding experiment it was observed that the humus substance which combined with other components dissolved to less extent in the alkaline solvent than that in the free state.

The comparative examination of the solubility in the alkaline

solvent was therefore made between humus substances in soils and those in a free state.

The soil sample employed in this experiment is shown in the following description.

- D. 147 Tainan-syu, Mt. Ari, 2500 m Height, humus soil, surface soil, sedimentary origin.
- D. 374 Taihoku-syu, Kaizan-gun, Ooka-syo, lateritic soil, surface soil, sedimentary origin.
- D. 376 Taihoku-syu, Kaizan-gun, Ooka-sho, near the above place.
- D. 396 Taityu-syu, Noko-gun, Central mountain chain, 3200 m Height, humus soil, surface soil, sedimentary origin.
- D. 368 Taihoku-syu, Mt. Sitisei, 800 m Height, humus soil, surface soil, igneous origin.
- D. 370 Taihoku-syu, Mt. Sitisei, 500 m Height, humus soil, surface soil, igneous origin.

The fine earth from each soil, which was sifted through a 0.5 mm sieve, was treated in the same manner as that in the preceding experiment.

For the sake of convenience in comparing the results obtained, the quantity of humus substances which were successively extracted from each soil by the alkaline solution with pH 12 until no more humus substances appeared in solution at 30°C, was presumed here as a total humus content of the soils.

The following explanation is given for the results shown in tables 87 to 92.

The quantity and percentage of humus substances which were dissolved by the extraction with the alkaline solution were always proportional to pH values of the solvent.

The per cent of the dissolved humus substances at every extraction in their total original content varied with the number of extractions. The first extraction always showed the highest quantity of them, and with added extractions less of humus substances was dissolved. There was no clear difference in their solubility between the soils of sedimentary and igneous origins.

TABLE 87.

Successive extractions of humus substances from a soil D. 147.

Total humus=67.5 mg.

pH	Extraction times								Sum
	1	2	3	4	5	6	7	8	
A mg of humus dissolved at every single extraction									
8	3.0	0.4	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	4.4
9	5.4	0.8	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.1	7.5
10	9.7	0.7	0.7	0.6	0.5	0.5	0.2	0.2	13.1
11	21.9	4.6	2.6	2.6	2.0	1.3	0.9	0.9	36.8
12	50.1	8.4	2.4	1.1	0.9	0.8	0.7	0.3	64.6
(B) Per cent of (A) in its original content									
8	4.5	0.6	0.5	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	6.5
9	8.0	1.2	0.5	0.5	0.5	0.3	0.3	0.2	11.1
10	14.4	1.6	1.0	0.9	0.7	0.7	0.3	0.3	19.4
11	32.5	6.8	3.9	3.9	3.0	1.9	1.3	1.3	54.5
12	74.2	12.5	3.6	1.6	1.3	1.2	1.0	0.5	95.7

TABLE 88.

Successive extractions of humus substances from a soil D. 374

Total humus=72.4 mg.

pH	Extraction times								Sum
	1	2	3	4	5	6	7	8	
(A) mg of humus dissolved at every single extraction									
8	1.6	0.5	0.2	0.1	trace	trace	trace	trace	2.4
9	1.8	0.5	0.2	0.2	0.1	trace	trace	trace	2.8
10	3.9	0.8	0.5	0.4	0.3	0.3	0.2	0.1	6.5
11	14.1	3.8	3.3	1.5	1.1	1.1	1.0	1.0	26.9
12	32.3	11.2	3.4	2.3	1.2	1.2	1.2	1.1	53.9
(B) Per cent of (A) in its original content									
8	2.2	0.7	0.3	0.1	trace	trace	trace	trace	3.3
9	2.5	0.7	0.3	0.3	0.1	trace	trace	trace	3.9
10	5.4	1.1	0.7	0.6	0.4	0.4	0.3	0.1	9.0
11	19.5	5.3	4.6	2.1	1.5	1.5	1.4	1.4	37.2
12	44.7	15.5	4.7	3.2	1.7	1.7	1.7	1.5	74.5

TABLE 89.

Successive extractions of humus substances from a soil D. 376

Total humus=80.5 mg.

pH	Extraction times								
	1	2	3	4	5	6	7	8	Sum
(A) mg of humus dissolved at every single extraction									
8	1.2	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	2.4
9	1.9	0.7	0.5	0.3	0.3	0.2	0.1	0.1	4.1
10	4.5	1.1	0.6	0.5	0.3	0.3	0.2	0.2	7.7
11	18.2	2.3	2.2	2.0	1.9	1.9	1.5	1.5	31.5
12	28.9	10.3	4.8	4.2	3.7	2.2	2.2	2.0	58.3
(B) Per cent of (A) in its original content									
8	1.5	0.4	0.4	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	3.0
9	2.4	0.9	0.6	0.4	0.4	0.3	0.1	0.1	5.1
10	5.6	1.4	0.7	0.6	0.4	0.4	0.3	0.3	9.6
11	22.6	2.9	2.7	2.5	2.4	2.4	1.9	1.9	39.1
12	35.9	12.8	6.0	5.2	4.6	2.7	2.7	2.5	72.4

TABLE 90.

Successive extractions of humus substances from a soil D. 396

Total humus=51.9 mg.

pH	Extraction times								
	1	2	3	4	5	6	7	8	Sum
A mg of humus dissolved at every single extraction									
8	0.5	0.3	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.1	2.1
9	1.1	0.6	0.5	0.4	0.4	0.2	0.2	0.2	3.6
10	4.3	1.2	0.9	0.5	0.5	0.4	0.4	0.3	8.5
11	10.0	1.9	1.4	1.2	0.9	0.8	0.8	0.6	17.6
12	24.2	7.1	5.5	3.7	2.8	2.1	1.6	1.5	49.4
B) Per cent of (A) in its original content									
8	1.0	0.6	0.6	0.6	0.4	0.4	0.4	0.2	4.1
9	2.1	1.2	1.0	0.8	0.8	0.4	0.4	0.4	6.9
10	8.3	2.3	1.7	1.0	1.0	0.8	0.8	0.6	16.4
11	19.5	3.7	2.7	2.8	1.7	1.5	1.5	1.2	33.9
12	46.6	13.7	10.6	7.1	5.4	4.1	3.1	2.9	95.2

TABLE 91.
Successive extractions of humus substances from a soil D. 368
Total humus=68.4 mg.

pH	Extraction times								
	1	2	3	4	5	6	7	8	Sum
(A) mg of humus dissolved at every single extraction									
8	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1.2
9	0.5	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.1	2.0
10	2.3	2.0	1.1	1.0	0.9	0.7	0.3	0.2	8.5
11	12.6	4.4	2.8	2.7	2.1	2.1	1.8	1.8	30.3
12	26.8	9.6	8.3	5.0	3.2	2.5	2.4	2.2	60.1
(B) Per cent of (A) in its original content									
8	0.4	0.3	0.3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.8
9	0.7	0.4	0.4	0.3	0.3	0.3	0.3	0.2	2.9
10	3.4	2.9	1.6	1.5	1.3	1.0	0.4	0.3	12.4
11	18.4	6.4	4.1	4.0	3.1	3.1	2.6	2.6	44.3
12	39.2	14.0	12.1	7.3	4.7	3.7	3.5	3.2	87.9

TABLE 92.
Successive extractions of humus substances from a soil D. 370
Total humus=47.5 mg.

pH	Extraction times								
	1	2	3	4	5	6	7	8	Sum
(A) mg of humus dissolved at every single extraction									
8	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9
9	0.4	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	1.1
10	1.0	0.3	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	2.0
11	9.7	1.8	1.8	1.7	1.7	1.5	1.4	1.3	21.0
12	20.2	8.1	3.3	3.2	1.8	1.6	1.1	0.8	40.1
(B) Per cent of (A) in its original content									
8	0.4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.9
9	0.8	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	2.3
10	2.1	0.6	0.4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	4.2
11	20.4	3.8	3.8	3.6	3.6	3.2	3.0	2.7	44.2
12	42.5	17.1	7.0	6.7	3.8	3.4	2.4	1.7	84.4

The average values of the percentage of dissolved humus substances during the all extraction times in the total original content were about 3.4 per cent at pH 8, 5.4 per cent at pH 9, 12.0 per cent at pH 10, 42.2 per cent at pH 11 and 85.0 per cent at pH 12.

If the free humus substances separated from the humus soils D. 147 and 370 are compared with the humus substances in these humus soils, the solubility of the former is much higher at any pH than that of the latter. That is, the former was completely dissolved at the every pH value by successive extractions. On the contrary, the solubility of the humus substances in the soils was rather near that of the various humates, though the former was comparatively less.

Next came the successive extraction of the soil humus by the strong alkaline solution. As a strong alkaline solution a 4 per cent solution of ammonium hydroxide was applied. The extraction was repeated continuously until the humus substance ceased dissolving in the solvent.

The procedure was along two different lines. At first, one portion of soil samples was washed with a 1 per cent hydrochloric acid solution to separate calcium from Ca-humates and then it was extracted by 500 cc. of the 4 per cent ammonia solution at 30°C with a definite shaking. After extraction for 48 hours one half of the whole solution was removed to another vessel in order to estimate the amount of dissolved humus substances. An equal amount of the 4 per cent ammonia solution was again added to the residual solution and was extracted again for 48 hours. This treatment was repeated until the humus substance ceased dissolving in the solvent. The estimation of the humus substance was carried out after the SHIBUYA's hydrogen peroxide method^(62, 63).

Another portion of soil samples was not washed with the diluted hydrochloric acid solution before extraction by the ammonia solution. The other procedures were similar to the above experiment.

The 4 per cent ammonia solution applied in this experiment showed a value of about pH 14.

Soil samples employed are shown as follows:

D. 368 Taihoku-syu, Mt. Sitisei, 800 m Height, humus soil, surface soil, igneous origin.

D. 370 do, 500 m Height, humus soil, surface soil.

D. 371 do, under layer of D. 370, A₂ horizon.

D. 374 Taihoku-syu, Kaizan-gun, Ooka-syo, lateritic soil, surface soil, sedimentary origin.

D. 376 do, near the above place, lateritic soil, surface soil.

D. 377 do, under layer of D. 376, A₂ horizon.

The experimental result is given in the following tables 93 and 94.

TABLE 93.

Successive extractions of humus substances from soils of igneous origins
by 4 per cent ammonium hydroxide solution

		D. 368			D. 370			D. 371
Extraction times		Without HCl treatment						
	mg of humus dissolved at every single extract.	% of dissolved humus in its total content	mg of humus dissolved at every single extract.	% of dissolved humus in its total content	mg of humus dissolved at every single extract.	% of dissolved humus in its total content		
1	592.6	79.6	335.0	70.5	248.6	69.6		
2	45.0	6.0	39.8	8.4	32.8	9.2		
3	40.2	5.4	24.0	5.1	16.8	4.7		
4	18.2	2.4	20.0	4.2	15.0	4.2		
5	15.2	2.0	18.6	3.9	14.4	4.0		
6	13.8	1.9	15.8	3.3	14.0	3.9		
7	10.0	1.3	14.8	3.1	10.0	2.8		
8	8.0	1.1	6.0	1.3	3.6	1.0		
9	1.8	0.2	1.0	0.2	1.8	0.5		
Sum	744.0		475.0		357.0			

With HCl treatment						
1	555.6	70.9	311.8	71.7	214.8	71.4
2	72.2	9.2	29.8	6.9	23.0	7.6
3	44.6	5.7	26.6	6.1	20.4	6.8
4	40.6	5.2	20.8	4.8	13.0	4.3
5	20.0	2.6	16.0	3.7	10.0	3.3
6	19.0	2.5	9.4	2.2	9.6	3.2
7	16.4	2.1	8.4	1.9	4.6	1.5
8	7.4	0.9	6.8	1.6	3.8	1.3
9	7.4	0.9	5.2	1.2	1.8	0.5
Sum	783.8		434.8		301.0	

TABLE 94.

Successive extractions of humus substances from soils of sedimentary origins
by 4 per cent ammonium hydroxide solution

Extraction times	D. 374		D. 376		D. 377	
	Without HCl treatment					
	mg of humus dissolved at every single extract.	% of dissolved humus in its total content	mg of humus dissolved at every single extract.	% of dissolved humus in its total content	mg of humus dissolved at every single extract.	% of dissolved humus in its total content
1	106.6	62.3	83.6	62.2	59.4	62.9
2	37.2	21.7	30.3	22.3	22.8	24.2
3	9.0	5.3	8.0	6.0	5.8	6.1
4	8.0	4.7	5.8	4.3	3.0	3.2
5	6.8	4.0	5.4	4.0	2.2	2.3
6	3.6	2.1	1.6	1.2	1.2	1.3
Sum	171.2		134.4		94.4	
With HCl treatment						
1	113.4	82.8	90.6	79.2	68.4	89.3
2	8.6	6.3	10.0	8.7	4.2	5.5
3	7.0	5.1	7.0	6.1	2.0	2.6
4	5.6	4.1	4.8	4.2	1.2	1.6
5	2.0	1.5	2.0	1.8	0.6	0.8
6	0.4	0.3	slight	slight	0.2	0.3
Sum	137.0		114.4		76.6	

In any case the quantity and percentage of the dissolved humus substance decreased in a reverse proportion to the increase in the number of extractions. In such a strong alkaline solution, however, a great part of the humus substance was dissolved in the solvent by the first extraction, and after the second a far smaller amount was successively dissolved in the solution.

The per cent of the dissolved humus substance at the first extraction in its total content was far greater in the present case than that of pH 12.

The extraction of humus substances in the soils of sedimentary origins was completed more rapidly than those of igneous origins.

In short, the solubility of humus substances in the alkaline solutions was different to a large extent among the free humic acids, the vari-

ous humates and the soils. The free humic acids showed the highest solubility at any pH value, while the lower was seen in the humates and soils and their solubility was not so different between them, although the former was comparatively higher than the latter. It is shown, therefore, that free humus substances are more easily soluble at given hydrogen-ion concentrations than humus substances which are in combination with other components; that in soils their humus substances must not only present in a free state but also in combination with others; and further that the combining form of humus substances in soils must be resemble to some extent that of these humates, because the solubility of humus substances in the humates and soils was nearly similar to one another at the various hydrogen-ion concentrations.

C. Summary

The present chapter dealt with the experiment for the successive extraction of humus substances from humic acids, humates and natural soils at different hydrogen-ion concentrations. Thereby it was ascertained whether differences in the form of humus substances influence their solubility in a certain solvent.

The sample for the experiment included the following substances : 1) Humic acids (Merck's humic acid, humic acid separated from soils), 2) Humates (aluminum humates, ferric humates, aluminum "silico-humates" and ferric "silico-humates"), 3) Various soils.

The samples were extracted successively several times by sodium hydroxide solutions and ammonia solutions having the pH of 8 to 14 at a temperature of 30°C. The experimental procedure was as follows. A known quantity of samples from which their humus substances were to be extracted was placed in a flask. In order to make the extraction at various pH values a given quantity of sodium hydroxide and ammonium hydroxide solutions with different concentrations was added to the flask and the total volume was made up to 200 cc. by adding water. These alkaline solvents were made of six

grades of pH values, i. e., pH 8, 9, 10, 11, 12 and 14. The contents in the flask were allowed to stand for 24 hours with a definite shaking, and then one half of the solution, in which were dissolved humus substances, was transferred to another vessel in order to estimate the quantity of dissolved humus substances. The alkaline solvent of the same pH as that of the flask was added again to the residual solution in the flask to an amount equal to that of the removed solution. The solution which was renewed by one half, was allowed to stand 24 hours and then one half of the contents were exchanged again. This treatment was repeated successively several times.

The results obtained are briefly summarized as follows :

The quantity of dissolved humus substances was highest at the first extraction and thereafter decreased gradually with added extractions. Humus substances which were extracted during the all extraction times were always proportional to pH values of the solvents.

There was a definitely noticeable difference in the solubility at any pH value among the free humic acids, the humates which were prepared isoelectrically, and the natural soils. The free humic acids showed the highest solubility at any pH value, whereas in the humates and the soils was found a far lower solubility, which was not so different between them, although the solubility of the humates was comparatively higher than that of the soils.

Between Merck's humic acid and the humic acids which were separated from soils almost no difference in their solubility in the solvents could be observed.

The solubility of free humus substances separated from natural humus soils was markedly lower than that of humus substances in the same soils. This gives some suggestion concerning the form of humus substances in natural soils.

Since free humus substances were more easily soluble at any pH value than humus substances which are in combination with other components, and further the solubility between the various humates and natural soils showed a no marked difference, it is conclusively said that humus substances in natural soils, as well as in the humates

prepared isoelectrically, are not present only in a free state but exist in a less soluble state which combines with others.

VII. DISSOLVING OF IRON AND ALUMINUM FROM THEIR HUMATES AT DIFFERENT HYDROGEN-ION CONCENTRATIONS

A. Experimental

The preceding chapter treated of the experiment dealing with the solubility of humus substances in various forms at different hydrogen-ion concentrations, and then from their solubility some consideration was given to the form of humus substances in their humates and in natural soils.

The present experiment seeks to determine to what extent the iron or aluminum in their humates is attacked by solvents with various hydrogen-ion concentrations.

As samples hydroxides of aluminum and iron, humates of aluminum and iron, and aluminum and ferric "silico-humates", were employed. Natural soils were not taken in this experiment, because aluminum and iron exist in complicated conditions in soils and accordingly their solubility in solvents can not be compared simply with the single compound of iron and aluminum.

The samples were prepared by the following procedure :

1. Hydroxides of aluminum and iron : From Merck's aluminum or ferric chloride their hydroxides were precipitated by the addition of an alkaline reagent. The flocculate was continuously washed with distilled water, then dialyzed electrically for the removal of impurities. The pure hydroxide gel obtained was applied in the experiment.

2. Humates of aluminum and iron : From the mixture of the 20 millimols/L solution of $\text{FeCl}_3 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$ or $\text{AlCl}_3 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$ with an equal volume of the 8 millimols/L solution of Na-humate, isoelectric flocculates were completely made and they were purified sufficiently.

Consequently, the ratio of humus to aluminum or iron in the each flocculate was 1:2.5 millimols.

3. Aluminum and ferric "silico-humates": They were prepared isoelectrically by means of the method similar to that in the previous chapter. Their ratio of SiO_2 : R_2O_3 :Humus was 5:2.5:1 millimols.

From these samples iron and aluminum were extracted successively ten times at various hydrogen-ion concentrations, then were estimated gravimetrically. One series of a given weight of these samples was taken in flasks with 300 cc. capacity and a known quantity of the solution which was acidified to various pH values of 2, 3, 4 and 7 by hydrochloric acid was added to it. After the solution had stood for 24 hours at 30°C with a definite shaking, one half of the supernatant solution was transferred to another vessel in order to estimate the amount of aluminum and iron extracted. Then a new acidic solution of same pH and having the same volume as the removed solution was again poured into the residual solution in the original flask, and after 24 hours one half of the solution was changed again. This treatment was repeated successively ten times and the quantity of aluminum and iron dissolved at every single extraction was determined quantitatively.

The results obtained are given in tables 95 to 100.

1. Hydroxide of aluminum: At pH of 7 none of aluminum was extracted during the all extraction times, while at the other pH the total amount of aluminum dissolved completely within several extractions.

The quantity and percentage of the dissolved aluminum at the first extraction, at which a large part of aluminum entered into solutions, increased in reverse proportion to the value of pH.

The lower the pH value the less times were needed to complete the extraction.

2. Hydroxide of iron: In this case a result similar to that in the case of aluminum hydroxide was generally obtained. At pH of 3 and 4, however, all of the iron was not extracted within ten times. Accordingly the solubility of the iron in the solutions with a definite

7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4.6	4.3	1.7	0.1	0.1	0.1	trace	0	0	0	10.9
3	11.5	6.5	5.8	4.6	4.5	2.4	2.3	0.5	trace	0	38.1
2	58.6	40.3	1.1	0	0	0	0	0	0	0	100.0

TABLE 97.

Successive extractions of aluminum from aluminum humates

Total $\text{Al}_2\text{O}_3 = 438.4$ mg.

pH	Extraction times										Sum
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
(A) mg of Al_2O_3 dissolved at every single extraction											
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	16.6	6.1	48.1	2.2	trace	trace	trace	trace	trace	trace	
3	67.1	39.5	28.5	18.4	16.6	14.0	8.3	5.3	2.0	trace	
2	178.0	100.0	99.5	26.3	18.4	7.5	7.5	3.9	trace	0	
(B) Per cent of (A) in its original content											
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	3.4	1.4	1.1	0.5	trace	trace	trace	trace	trace	trace	6.7
3	15.3	9.0	6.5	4.0	3.8	3.2	1.9	1.2	0.5	trace	45.4
2	40.6	22.9	22.7	6.0	4.2	1.7	1.7	0.9	trace	0	100.0

TABLE 98.

Successive extractions of iron from ferric humates

Total $\text{Fe}_2\text{O}_3 = 356.2$ mg.

pH	Extraction times										Sum
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
(A) mg of Fe_2O_3 dissolved at every single extraction											
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	15.4	12.1	4.4	4.4	trace	trace	trace	trace	trace	trace	
3	42.0	42.0	33.1	21.3	12.2	12.0	trace	trace	trace	trace	
2	55.6	44.2	34.9	31.0	22.8	16.4	9.3	7.1	6.8	5.7	
B) Per cent of (A) in its original content											
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	4.4	3.3	1.1	1.1	trace	trace	trace	trace	trace	trace	9.9
3	12.3	12.3	9.2	6.0	3.2	3.1	trace	trace	trace	trace	45.0
2	15.6	13.4	9.8	8.7	6.4	4.6	2.6	2.0	1.9	1.6	65.6

TABLE 99.
Successive extractions of aluminum "silico-humates"

Total $\text{Al}_2\text{O}_3 = 401.3$ mg.

pH	Extraction times										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Sum
(A) mg of Al_2O_3 , dissolved at every single extraction											
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	0	77.0	30.9	15.6	15.2	4.0	4.0	4.0	3.1	2.0	
3	200.7	65.8	26.9	7.6	4.0	4.0	4.2	3.2	2.4	2.4	
2	173.8	127.2	46.1	15.6	11.2	4.2	4.4	3.9	2.1	trace	
(B) Per cent of (A) in its original content											
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	19.2	7.7	3.9	3.8	1.0	1.0	1.0	0.8	0.5	38.9
3	50.0	16.4	6.7	1.9	1.0	1.0	1.0	0.8	0.6	0.6	80.0
2	43.3	31.7	11.5	3.9	2.8	1.0	1.0	1.0	0.5	trace	96.7

TABLE 100.
Successive extractions of iron from ferric "silico-humates"

Total $\text{Fe}_2\text{O}_3 = 306.5$ mg.

pH	Extraction times										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Sum
(A) mg of Fe_2O_3 , dissolved at every single extraction											
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	8.6	trace	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	37.4	19.9	11.3	8.6	6.4	5.8	5.8	3.1	3.1	3.1	
2	171.9	26.1	18.4	15.3	8.6	3.7	3.1	3.1	2.5	1.8	
(B) Per cent of (A) in its original content											
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	2.8	trace	0	0	0	0	0	0	0	0	2.8
3	12.2	6.5	3.7	2.8	2.1	1.9	1.9	1.0	1.0	1.0	34.1
2	56.1	8.5	6.0	5.0	2.8	1.2	1.0	1.0	0.8	0.6	83.0

acidity was comparatively lower than that of the aluminum which was seen in the preceding case. This perhaps depends upon the difference between their nature that iron is weaker as a base than aluminum, and therefore the isoelectric point of the former lies at more acidic side than that of the latter.

3. Aluminum humates and aluminum "silico-humates": The general behavior of these samples in the presence of the solvent with various pH values, in comparison with that of aluminum hydroxide, did not differ remarkably. It was, however, seen that aluminum in these samples was less soluble in the solvent with same pH than the aluminum hydroxide. Below pH 4 all the aluminum hydroxide dissolved completely within the course of the extractions, whereas the aluminum humate dissolved only to an extent of 7 per cent at pH 4, 45 per cent at pH 3, and the aluminum "silico-humate" was extracted only to an extent of 39 per cent at pH 4, 80 per cent at pH 3 and 97 per cent at pH 2.

The fact that the aluminum component in these humates dissolved to less extent at various hydrogen-ion concentrations than that of the hydroxide of aluminum, gives some certainty to the assumption that the aluminum component in the aluminum "silico-humate" exists not independently of other components, but in a combined condition similar to the aluminum humate which has been assumed as a chemical compound.

4. Ferric humates and ferric "silico-humates": In this case also, as well as in the case of the hydroxide of iron, the solubility of the iron increased in a reverse proportion to the value of pH, and the ratio of the dissolved iron at each extraction to its total original content varied regularly with additional extractions.

The per cent of the dissolved iron at any pH value was considerably lower in this case than in the case of the ferric hydroxide. In other words, it indicates that the solubility of the iron component in the humates was lower than that of the ferric hydroxide and that all of the iron component in the humates may therefore not exist in

a simple form such as hydroxide but, at least a part of it, in combination with other components.

B. Summary

In the present experiment iron and aluminum were extracted from their various humates at various hydrogen-ion concentrations in order to examine their form.

As samples the following materials were employed: Hydroxides of iron and aluminum, humates of iron and aluminum, and "silico-humates" of iron and aluminum, which were isoelectrically prepared. These samples were successively extracted for ten times by the solvent which was kept at various hydrogen-ion concentrations, i. e., pH 2, 3, 4 and 7, by means of the addition of hydrochloric acid. By the observation of the quantity, percentage and extraction velocity of aluminum and iron which dissolved in the solvent, the structures of these samples were compared and further the form of both components in these samples was assumed.

The results obtained are briefly summarized as follows: The quantity and percentage of these components, i. e., iron and aluminum which dissolved within the course of the extractions were reversely proportional to the value of pH.

The per cent of these dissolved components at every single extraction in their total original content showed not a constant value but varied regularly with the increase of extractions.

The solubility of iron and aluminum in the ferric and aluminum "silico-humate" was considerably lower than that of the hydroxide, and showed a value nearly similar to that of the humate of iron and aluminum. This fact gives therefore some certainty to the assumption that these components in the aluminum and ferric "silico-humate" exist not independently of the other components but may combine in a condition almost similar to their simple humates which have been assumed as chemical compounds.

VIII. CONDUCTMETRIC INVESTIGATIONS ON THE REACTION OF HUMUS SUBSTANCES TO OTHER SUBSTANCES

A. Experimental

In the previous studies various conditions for the formation of various humates and the form of humus substances in them have been considered. The present experiment dealt with the interaction between humus substances and others which exist together in one system, by means of the conductmetric method.

The systems, in which two different substances, i. e., A and B, are present together in mutual ratios of 0 to 100 respectively, should show different electric conductivity according to the variation of the mutual ratio of the two substances. In this case, the difference of the conductivity should be affected by some factor, such as the difference of the mutual action between the two substances. The following three cases were selected according to the change of the conductivity.

Changes in the conductivity of electrolytes is not accurately proportional to their degree of dilution, as shown by the DEBYE-HÜCKEL theory^{10, 11}, but this beyond question has no practical meaning for this experiment with dilute solutions of electrolytes.

1. A and B do not interact mutually: In this case the conductivity of the system will be in agreement with the sum of the individual conductivity and therefore the curve will show a straight line such as the line m n in figure 11.

2. Between A and B only a mechanical adsorption takes place: In this case the conductivity will be lower to some extent in every ratio of them than the sum of the individual conductivity, and in consequence the curve will lie under the line m n, like that of the line m q n.

3. Between A and B a chemical or ionic interaction takes place: In this case the conductivity curve will lie on both sides of the line m n, according to the nature of the individual substance.

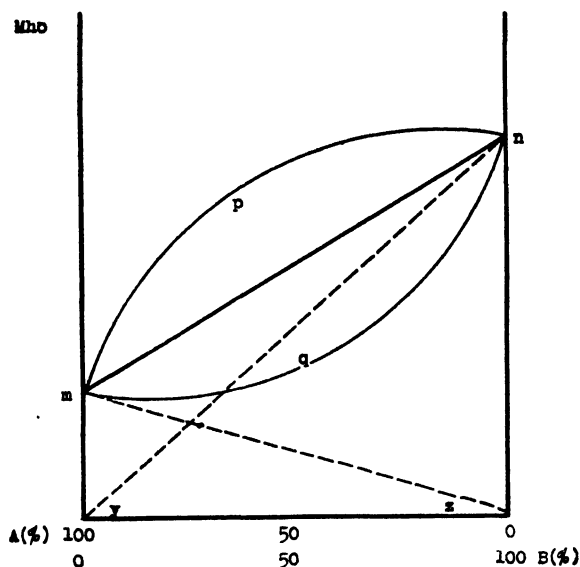


Fig. 11.

Changes in conductivity of mixtures of two substances,
depending on varying their proportions.

Line m z: Conductivity of A itself.

Line y n: Conductivity of B itself.

Line m n: Sum of the individual conductivity.

On the basis of such differences of conductivity, it was determined whether a chemical or ionic interaction takes place between humus substances and another in the system. The conductivity and pH value were therefore determined in all the mixtures of the various substances.

The combination of the two substances was given as follows :

1. Humic acid suspension + NH_4OH solution.
2. " + NaOH solution.
3. " + Na_2SiO_3 solution.
4. " + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension.
5. " + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension.
6. Na-humate Solution + AlCl_3 solution.
7. " + FeCl_3 solution.
8. " + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension.

9. Na-humate Solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension.
10. „ + Na_2SiO_3 solution.
11. Na_2SiO_3 solution + AlCl_3 solution.
12. „ + FeCl_3 solution.
13. „ + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension.
14. „ + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension.
15. (Na_2SiO_3 solution + Na-humate solution) + AlCl_3 solution.
16. („ + „) + FeCl_3 solution.
17. („ + „) + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension.
18. („ + „) + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension.
19. Soil clay suspension + Na-humate solution.
20. Soil clay suspension + NaOH solution.

The substances used in the experiment were prepared by means of the following method.

1. Humic acid suspension: Merck's humic acid.
2. Na-humate: The equivalent combination of Merck's humic acid and sodium hydroxide.
3. Aluminum hydroxide suspension: From the concentrated aluminum acetate solution the hydroxide was prepared after the method described by Wo. OSTWALD⁵⁰⁾ and was purified by electrodialysis.
4. Ferric hydroxide suspension: The ferric hydroxide solution was hydrolysed after the method described by Wo. OSTWALD⁵⁰⁾, and the hydroxide suspension obtained was sufficiently purified by means of electrodialysis.
5. Soil clay suspension: The sample was taken from A horizon of the lateritic soil in Taihoku-syu. From this soil was prepared hydrogen-clay, whose diameter is below about $1\ \mu$.

Each of the two substances was mixed with the other in different proportions and the mixtures were stoppered closely, then were allowed to stand over night at a temperature of 30°C with a definite shaking. Thereafter the specific conductivity and pH value of these mixtures were determined. As the apparatus for the determination of the conductivity the Tinsley's "Universal Bridge" with an amplifier was employed. The results obtained in the experiment were shown in tables 101 to 120 and figures 12 to 31.

TABLE 101.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

(A) 2 millimols humic acid suspension +

(B) 2 millimols NH_4OH solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	+	2.5	2.5	± 0.0	3.8
2	98	2	+	2.9	4.1	+ 1.2	6.1
3	96	4	+	3.3	6.9	+ 3.6	6.5
4	94	6	+	3.7	11.9	+ 8.2	6.8
5	92	8	+	4.1	14.6	+10.5	7.2
6	90	10	-	4.5	16.0	+11.5	7.4
7	80	20	-	6.3	16.5	+10.2	8.4
8	70	30	-	8.2	17.2	+ 9.0	
9	60	40	-	10.1	17.5	+ 7.4	
10	50	50	-	12.0	18.4	+ 6.4	
11	40	60	-	13.9	19.2	+ 5.3	
12	30	70	-	15.8	19.2	+ 3.4	
13	20	80	-	17.7	19.5	+ 1.8	
14	10	90	-	19.6	20.4	+ 0.8	
15	0	100	-	21.5	21.5	± 0.0	

TABLE 102.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

(A) 2 millimols humic acid suspension +

(B) 2 millimols NaOH solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	+	2.5	2.5	± 0.0	3.9
2	90	10	+	7.1	2.5	- 4.6	4.9
3	80	20	+	11.7	3.8	- 7.9	5.5
4	70	30	+	16.4	5.7	-10.7	5.9
5	60	40	+	21.1	7.9	-13.2	6.5
6	50	50	-	25.9	10.3	-15.6	6.9
7	40	60	-	30.6	14.3	-16.3	7.7
8	30	70	-	35.4	18.6	-16.8	
9	20	80	-	40.0	25.2	-14.8	
10	10	90	-	44.6	32.0	-12.6	
11	0	100	-	48.9	48.9	± 0.0	

TABLE 103.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

(A) 2 millimols humic acid suspension +

(B) 2 millimols Na_2SiO_3 solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	+	2.5	2.5	± 0.0	3.9
2	90	10	+	5.0	0.8	- 4.2	5.0
3	80	20	+	7.4	3.5	- 3.9	5.8
4	70	30	+	9.7	5.9	- 3.8	6.1
5	60	40	+	12.2	7.9	- 4.3	6.6
6	50	50	+	14.6	10.0	- 4.6	7.2
7	40	60	-	17.0	12.7	- 4.3	7.8
8	30	70	-	19.3	15.0	- 4.3	
9	20	80	-	21.6	18.3	- 3.3	
10	10	90	-	24.0	21.8	- 2.2	
11	0	100	-	26.2	26.2	± 0.0	

TABLE 104.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

(A) 2 millimols humic acid suspension +

(B) 2 millimols $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension.

No.	A %	B %	Floc	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	+	2.7	2.7	± 0.0	3.8
2	90	10	+	3.2	2.8	- 0.4	4.3
3	80	20	+	3.7	3.1	- 0.6	4.6
4	70	30	+	4.2	3.5	- 0.7	4.7
5	60	40	+	4.8	4.0	- 0.8	4.8
6	50	50	+	5.3	4.7	- 0.6	4.9
7	40	60	+	5.8	4.9	- 0.9	5.0
8	30	70	+	6.3	5.5	- 0.8	5.1
9	20	80	+	6.8	5.9	- 0.9	5.2
10	10	90	+	7.3	6.9	- 0.4	5.3
11	0	100	+	7.9	7.9	± 0.0	5.4

TABLE 105.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending
on varying their proportions

(A) 2 millimols humic acid suspension +

(B) 2 millimols $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of con- duct. of A, B. .10 ⁻⁵ Mho	Conduct. found in mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Difference .10 ⁻⁵ Mho	pH
1	100	0	+	2.7	2.7	± 0.0	3.8
2	90	10	+	2.8	3.6	+ 0.8	3.8
3	80	20	+	2.8	3.5	+ 0.7	3.8
4	70	30	+	2.9	3.8	+ 0.9	3.9
5	60	40	+	3.0	3.8	+ 0.8	3.9
6	50	50	+	3.1	3.5	+ 0.4	4.0
7	40	60	+	3.2	3.0	- 0.2	4.1
8	30	70	+	3.3	2.8	- 0.5	4.4
9	20	80	+	3.3	2.7	- 0.6	4.7
10	10	90	+	3.4	2.8	- 0.6	4.9
11	0	100	+	3.4	3.4	± 0.0	5.3

TABLE 106.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending
on varying their proportions

(A) 2 millimols Na-humate solution +

(B) 2 millimols AlCl_3 solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of con- duct. of A, B. .10 ⁻⁵ Mho	Conduct. found in mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Difference .10 ⁻⁵ Mho	pH
1	100	0	-	18.6	18.6	± 0.0	7.3
2	96	4	-	24.6	22.4	- 2.2	7.3
3	95	5	-	25.5	23.5	- 3.0	7.2
4	94	6	-	27.6	24.5	- 3.1	7.1
5	92	8	-	30.6	24.7	- 5.9	6.9
6	90	10	+	34.0	26.2	- 7.8	6.8
7	88	12	+	36.8	25.6	-11.2	6.4
8	80	20	+	48.8	38.9	- 9.9	4.0
9	70	30	+	64.2	56.0	- 8.2	3.8
10	60	40	+	80.0	72.5	- 7.5	3.7
11	50	50	+	94.0	89.1	- 4.9	3.7
12	40	60	+	110.0	107.0	- 3.0	3.7
13	30	70	+	125.5	122.3	- 3.2	3.7
14	20	80	+	140.0	137.8	- 2.2	3.7
15	10	90	+	154.3	154.3	± 0.0	3.7
16	0	100	+	170.6	170.6	± 0.0	3.7

TABLE 107.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

- (A) 2 millimols Na-humate solution +
(B) 2 millimols FeCl_3 solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	—	17.9	17.9	± 0.0	7.3
2	98	2	—	27.5	22.4	— 5.1	7.3
3	96	4	—	33.3	23.9	— 9.4	7.2
4	94	6	—	42.9	23.9	— 19.0	7.1
5	90	10	+	59.5	26.0	— 33.5	6.6
6	80	20	+	100.0	68.0	— 32.0	2.8
7	70	30	+	140.5	115.0	— 25.5	2.7
8	60	40	+	180.9	162.5	— 18.4	2.4
9	50	50	+	220.0	210.8	— 9.2	2.3
10	40	60	+	259.5	251.2	— 8.3	2.2
11	30	70	+	299.0	297.4	— 1.9	2.1
12	20	80	+	339.3	340.2	— 0.9	2.0
13	10	90	+	379.5	379.0	— 0.5	2.0
14	0	100	—	416.6	416.6	± 0.0	2.0

TABLE 108.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

- (A) 2 millimols Na-humate solution +
(B) 2 millimols $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	—	18.6	18.6	± 0.0	7.3
2	90	10	+	17.5	17.9	+ 0.4	7.3
3	80	20	+	16.4	17.2	+ 0.8	7.2
4	70	30	+	15.2	16.2	+ 1.0	7.2
5	60	40	+	14.0	15.1	+ 1.1	7.1
6	50	50	+	12.9	14.4	+ 1.5	6.7
7	40	60	+	11.8	12.4	+ 0.6	6.5
8	30	70	+	10.5	10.9	+ 0.4	5.9
9	20	80	+	9.4	9.2	+ 0.2	5.6
10	10	90	+	8.2	7.9	+ 0.3	5.4
11	0	100	+	7.2	7.2	± 0.0	5.3

TABLE 109.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending
on varying their proportions

(A) 2 millimols Na-humate solution +

(B) 2 millimols $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	—	17.9	17.9	± 0.0	7.3
2	90	10	+	16.4	15.9	-0.5	7.1
3	80	20	+	14.9	14.7	-0.2	7.0
4	70	30	+	13.4	13.7	$+0.3$	6.9
5	60	40	+	11.9	12.6	$+0.7$	6.8
6	50	50	+	10.5	11.2	$+0.7$	6.6
7	40	60	+	9.0	9.4	$+0.4$	6.5
8	30	70	+	7.4	7.8	$+0.4$	6.4
9	20	80	+	5.9	5.9	± 0.0	6.1
10	10	90	+	4.4	4.4	± 0.0	5.6
11	0	100	+	2.7	2.7	± 0.0	5.4

TABLE 110.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending
on varying their proportions

(A) 2 millimols Na-humate solution +

(B) 2 millimols Na_2SiO_3 suspension.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	—	17.1	17.1	± 0.0	7.3
2	90	10	—	18.1	18.4	$+0.3$	7.8
3	80	20	—	19.1	19.1	± 0.0	
4	70	30	—	20.0	20.0	± 0.0	
5	60	40	—	20.9	20.2	-0.7	
6	50	50	—	21.8	20.8	-1.0	
7	40	60	—	22.7	22.1	-0.6	
8	30	70	—	23.7	22.9	-0.8	
9	20	80	—	24.5	24.0	-0.5	
10	10	90	—	25.4	25.4	± 0.0	
11	0	100	—	26.2	26.2	± 0.0	

TABLE 111.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending
on varying their proportions

(A) 2 millimols Na_2SiO_3 solution +

(B) 2 millimols AlCl_3 solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	—	25.6	25.6	\pm 0.0	8.8
2	95	5	—	32.5	27.0	— 5.5	
3	90	10	—	39.5	28.7	—10.8	7.6
4	80	20	+	52.1	35.8	—16.3	4.3
5	70	30	+	65.8	53.3	—12.5	4.0
6	60	40	+	79.5	71.7	— 7.8	3.7
7	50	50	+	92.1	86.0	— 6.1	3.7
8	40	60	+	106.0	100.9	— 5.1	3.7
9	30	70	+	120.0	116.3	— 3.7	3.7
10	20	80	+	132.7	132.7	\pm 0.0	7.7
11	10	90	+	146.4	146.4	\pm 0.0	3.7
12	0	100	+	160.7	160.7	\pm 0.0	3.7

TABLE 112.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending
on varying their proportions

(A) 2 millimols Na_2SiO_3 solution +

(B) 2 millimols FeCl_3 solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	—	26.2	26.2	\pm 0.0	9.1
2	90	10	—	64.9	28.4	—36.5	6.6
3	80	20	+	104.0	66.4	—37.6	2.8
4	70	30	+	142.5	119.4	—23.1	2.5
5	60	40	+	183.0	170.6	—12.4	2.3
6	50	50	+	222.5	235.7	+13.2	2.2
7	40	60	+	262.0	284.4	+22.4	2.1
8	30	70	+	301.5	325.7	+24.2	2.0
9	20	80	+	340.0	373.2	+33.2	1.9
10	10	90	+	379.0	402.6	+23.1	1.9
11	0	100	+	416.6	416.6	\pm 0.0	1.9

TABLE 113.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

(A) 2 millimols Na_2SiO_3 solution +
(B) 2 millimols $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	—	24.1	24.1	± 0.0	
2	90	10	+	22.4	22.1	-0.3	
3	80	20	+	20.7	20.2	-0.5	
4	70	30	+	19.0	18.7	-0.3	
5	60	40	+	17.3	15.9	-1.4	7.8
6	50	50	+	15.6	14.6	-1.0	7.2
7	40	60	+	14.0	13.4	-0.6	6.5
8	30	70	+	12.3	11.6	-0.7	6.1
9	20	80	+	10.6	10.0	-0.6	5.7
10	10	90	+	8.9	8.0	-0.9	5.5
11	0	100	+	7.2	7.2	± 0.0	5.3

TABLE 114.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

(A) 2 millimols Na_2SiO_3 solution +
(B) 2 millimols $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	—	26.2	26.2	± 0.0	
2	90	10	+	23.8	24.2	+0.4	
3	80	20	+	21.5	20.8	-0.7	
4	70	30	+	19.1	18.9	-0.2	
5	60	40	+	16.8	16.3	-0.5	
6	50	50	+	14.6	13.5	-1.1	
7	40	60	+	12.2	11.4	-0.8	8.1
8	30	70	+	9.9	8.8	-1.1	7.8
9	20	80	+	7.5	7.4	-0.1	6.8
10	10	90	+	5.2	5.2	± 0.0	6.4
11	0	100	+	2.9	2.9	± 0.0	5.4

TABLE 115.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

- (A) (4 millimols Na_2SiO_3 +4 millimols Na-humate) solution +
(B) 2 millimols AlCl_3 solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	—	31.5	31.5	\pm 0.0	
2	95	5	—	41.0	37.0	— 4.0	
3	90	10	—	47.0	41.7	— 5.3	7.9
4	80	20	—	59.5	44.8	—14.7	7.2
5	70	30	+	72.0	54.3	—17.7	4.2
6	60	40	+	84.8	67.6	—17.2	3.9
7	50	50	+	97.4	86.3	—11.1	3.8
8	40	60	+	110.0	99.5	—10.5	3.8
9	30	70	+	125.0	121.5	— 4.0	3.8
10	20	80	+	136.2	136.2	\pm 0.0	3.8
11	10	90	+	148.1	148.1	\pm 0.0	3.8
12	0	100	+	159.2	159.2	\pm 0.0	3.8

TABLE 116.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

- (A) 4 millimols Na_2SiO_3 +4 millimols Na-humate) solution +
(B) 2 millimols FeCl_3 solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. found in mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Difference $\cdot 10^{-5}$ Mho	pH
1	100	0	—	35.1	35.1	\pm 0.0	
2	95	5	—	53.5	39.4	— 4.1	
3	90	10	—	72.1	41.2	—30.9	7.9
4	80	20	—	110.5	39.8	—70.7	5.6
5	70	30	+	149.1	77.9	—71.2	3.2
6	60	40	+	188.0	131.7	—56.3	2.7
7	50	50	+	226.2	162.9	—63.3	2.5
8	40	60	+	264.8	226.8	—38.0	2.3
9	30	70	+	303.4	247.1	—56.3	2.2
10	20	80	+	341.7	319.9	—21.8	2.1
11	10	90	+	380.0	351.3	—28.7	2.0
12	0	100	+	416.6	416.6	\pm 0.0	2.0

TABLE 117.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

(A) (4 millimols Na_2SiO_3 + 4 millimols Na-humate) solution +

(B) 2 millimols $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. .10 ⁻⁵ Mho	Conduct. found in mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Difference .10 ⁻⁵ Mho	pH
1	100	0	+	33.1	38.1	±0.0	
2	90	10	+	34.9	35.3	+0.4	
3	80	20	+	31.9	31.2	-0.7	
4	70	30	+	28.8	28.0	-0.8	
5	60	40	+	25.7	25.8	-0.1	
6	50	50	+	22.7	22.4	-0.3	7.7
7	40	60	+	19.6	19.1	-0.5	7.1
8	30	70	+	16.4	17.1	+0.7	6.3
9	20	80	+	13.3	13.7	+0.4	6.0
10	10	90	+	10.2	9.4	-0.8	5.7
11	0	100	+	7.3	7.3	±0.0	

TABLE 118.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

(A) (4 millimols Na_2SiO_3 + 4 millimols Na-humate) solution +

(B) 2 millimols $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. .10 ⁻⁵ Mho	Conduct. found in mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Difference .10 ⁻⁵ Mho	pH
1	100	0	+	38.1	38.1	±0.0	
2	90	10	+	34.5	34.5	±0.0	
3	80	20	+	31.0	32.3	+1.3	
4	70	30	+	27.4	27.4	±0.0	
5	60	40	+	24.0	23.7	-0.3	
6	50	50	+	20.4	21.3	+0.9	
7	40	60	+	17.0	17.9	+0.9	
8	30	70	+	13.5	15.4	+1.9	7.6
9	20	80	+	10.0	10.0	±0.0	7.1
10	10	90	+	6.1	6.2	+0.1	6.4
11	0	100	+	2.7	2.7	±0.0	5.8

TABLE 119.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

(A) 2 g/L H-clay suspension from D. 376 +

(B) 2 millimols Na-humate solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. .10 ⁻⁵ Mho	Conduct. found in mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Difference .10 ⁻⁵ Mho	pH
1	100	0	+	2.1	2.1	± 0.0	4.2
2	95	5	+	3.1	2.1	- 1.0	4.6
3	90	10	+	4.0	2.7	- 1.3	5.1
4	80	20	+	5.9	5.1	- 0.8	5.8
5	70	30	+	7.9	7.1	- 0.8	6.0
6	60	40	+	9.8	8.7	- 1.1	6.2
7	50	50	+	11.6	11.1	- 0.5	6.4
8	40	60	+	13.6	13.3	- 0.3	6.5
9	30	70	+	15.6	14.9	- 0.7	6.7
10	20	80	+	17.5	17.1	- 0.4	6.8
11	10	90	+	19.3	19.3	± 0.0	7.0
12	5	95	+	20.1	20.1	± 0.0	7.0
13	0	100	+	21.1	21.1	± 0.0	7.1

TABLE 120.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions

(A) 2 g/L H-clay suspension from D. 376 +

(B) 2 millimols NaOH solution.

No.	A %	B %	Floc.	Sum of conduct. of A, B. .10 ⁻⁵ Mho	Conduct. found in mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Difference .10 ⁻⁵ Mho	pH
1	100	0	+	2.1	2.1	± 0.0	5.0
2	95	5	+	4.5	2.0	- 2.5	5.1
3	90	10	+	6.8	2.7	- 4.1	5.6
4	80	20	+	11.5	4.4	- 7.1	6.1
5	70	30	+	16.0	6.7	- 9.3	6.5
6	60	40	+	20.8	9.3	-11.5	7.2
7	50	50	+	25.6	12.5	-13.1	7.6
8	40	60	+	30.2	18.1	-12.1	7.8
9	20	80	+	39.7	33.2	- 6.5	
10	0	100	-	48.9	48.9	± 0.0	

Figs. 12-31. Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on varying their proportions.

Fig. 12.

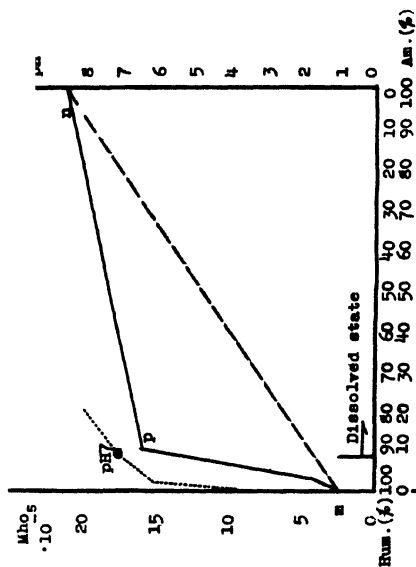
Humic acid susp. + NH_4OH solution

Fig. 13.

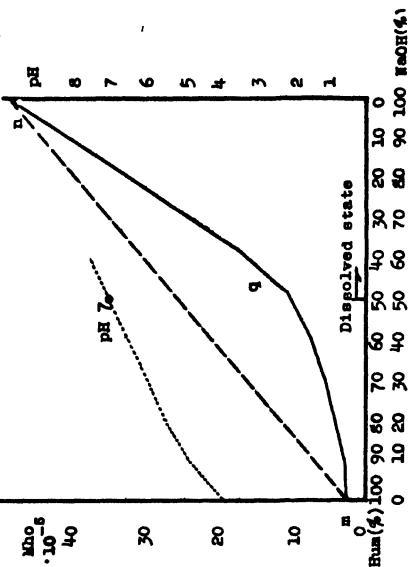
Humic acid susp. + NaOH solution

Fig. 14.

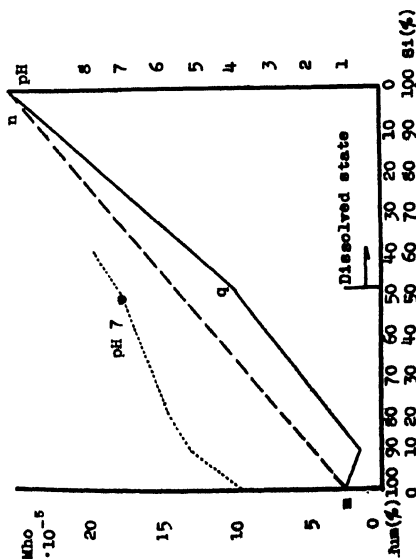
Humic acid susp. + Na_2SiO_3 solution

Fig. 15.

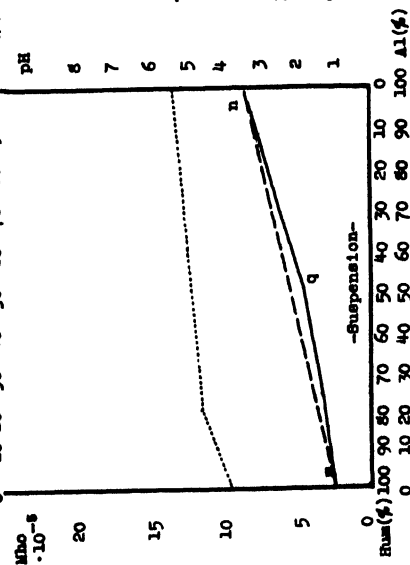
Humic acid susp. + $\text{Al}(\text{OH})_3$ susp.

Fig. 16.

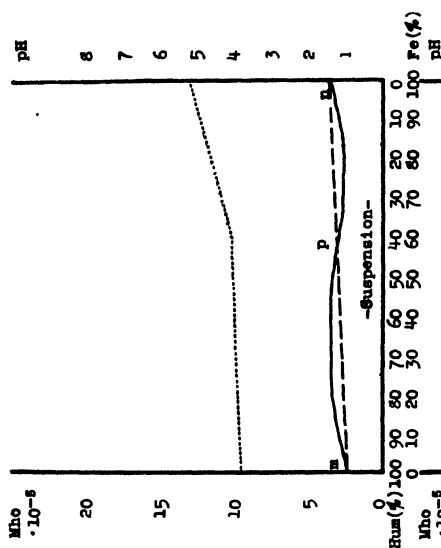
Humic acid susp. + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ susp.

Fig. 17.

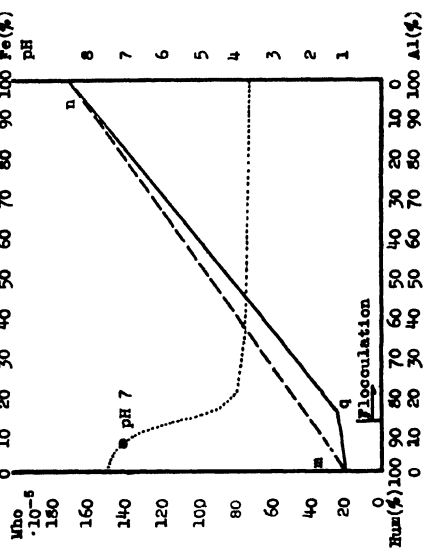
Na-humate solution + AlCl_3 solution

Fig. 18.

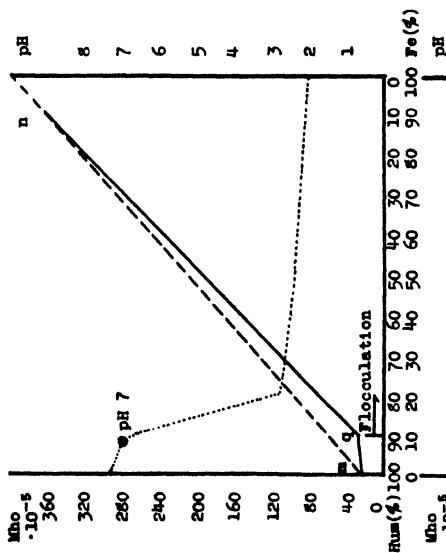
Na-humate solution + FeCl_3 solution

Fig. 19.

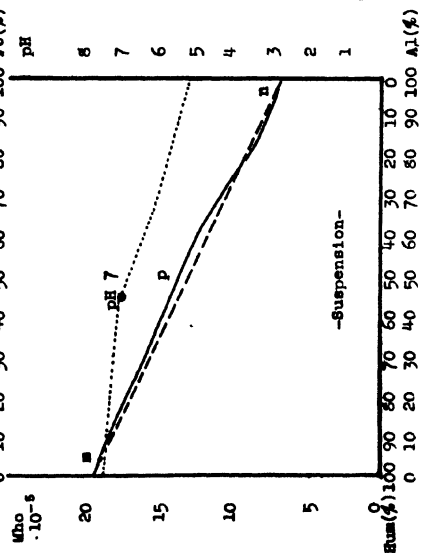
Na-humate solution + $\text{Al}(\text{OH})_3$ susp.

Fig. 20.

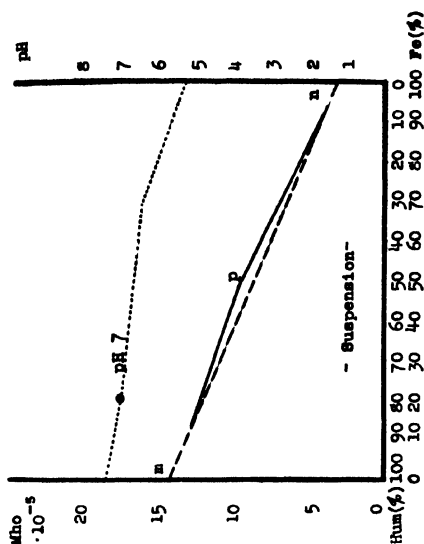
Na-humate solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ susp.

Fig. 21.

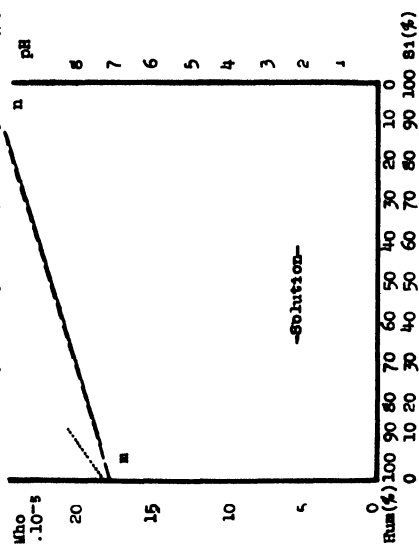
Na-humate solution + Na_2SiO_3 solution

Fig. 22.

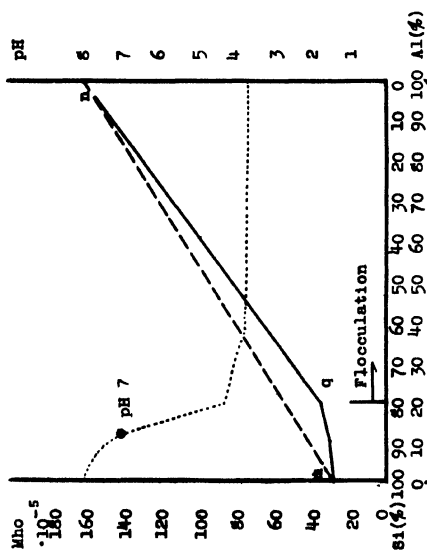
 Na_2SiO_3 solution + AlCl_3 solution

Fig. 23.

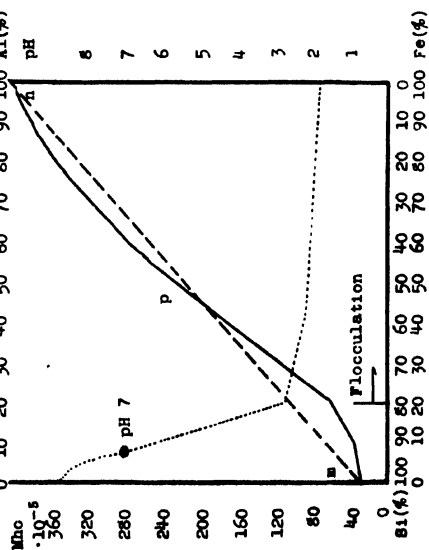
 Na_2SiO_3 solution + FeCl_3 solution

Fig. 24.

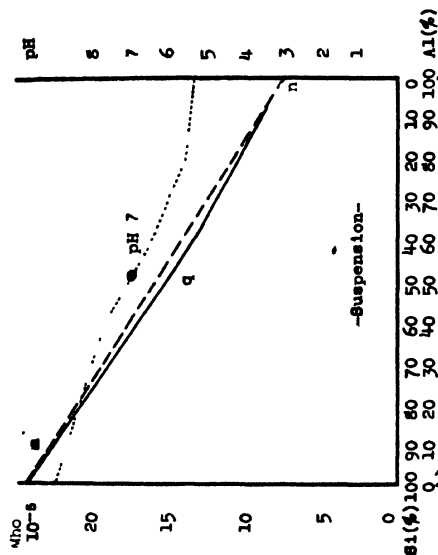
 Na_2SiO_3 solution + $\text{Al}(\text{OH})_3$ susp.

Fig. 25.

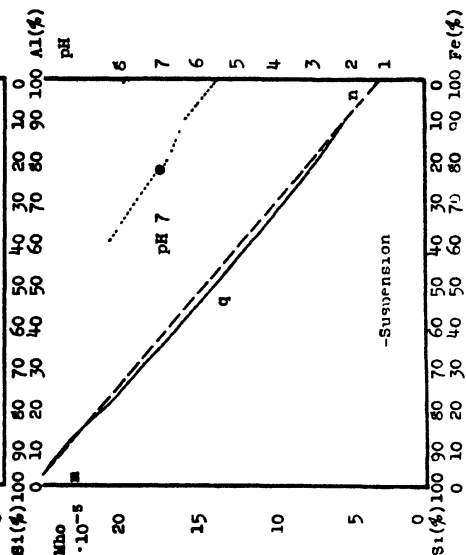
 Na_2SiO_3 solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ susp.

Fig. 26.

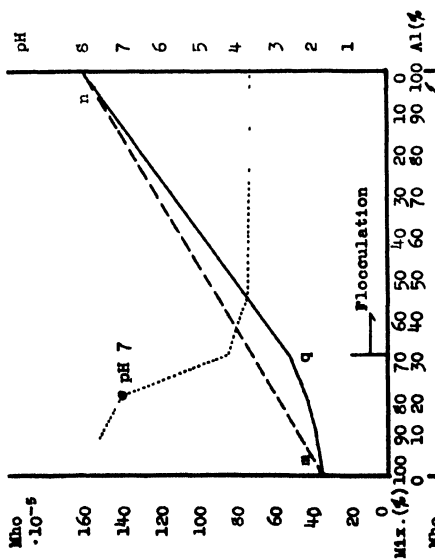
 $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 \text{ solution} + \text{Na-humate solution})$
+ AlCl_3 solution

Fig. 27.

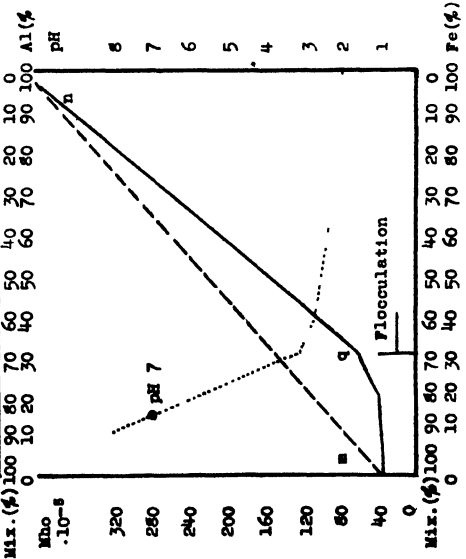
 $(\text{Na}_2\text{SiO}_3 \text{ solution} + \text{Na-humate solution})$
+ FeCl_3 solution

Fig. 28.

(Na_2SiO_3 solution + Na-humate solution)
+ $\text{Al}(\text{OH})_3$ susp.

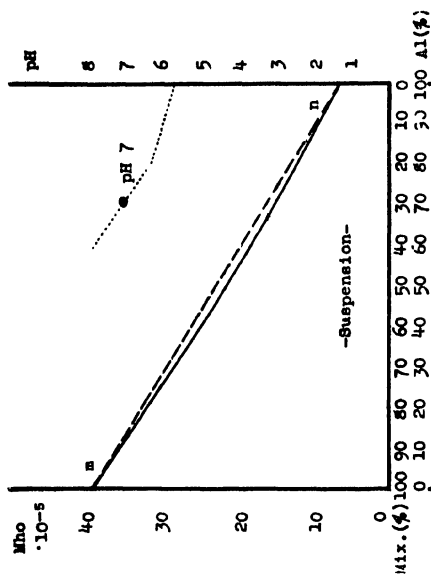


Fig. 29.

(Na_2SiO_3 solution + Na-humate solution)
+ $\text{Fe}(\text{OH})_3$ susp.

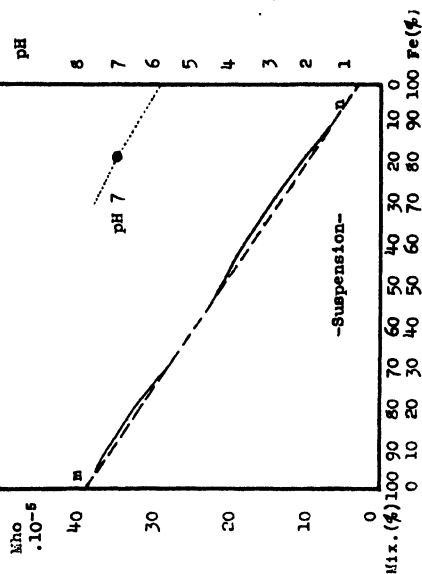


Fig. 30.

Soil clay susp. + Na-humate solution

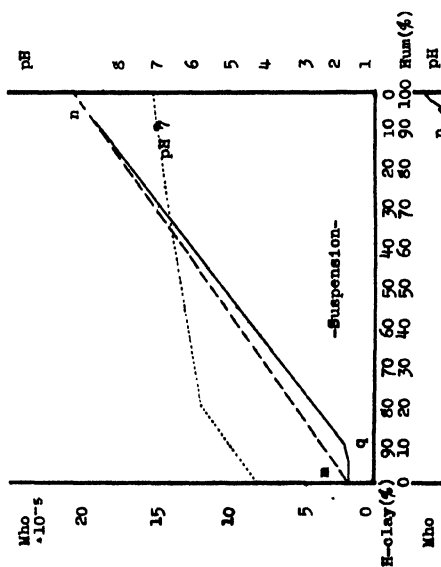
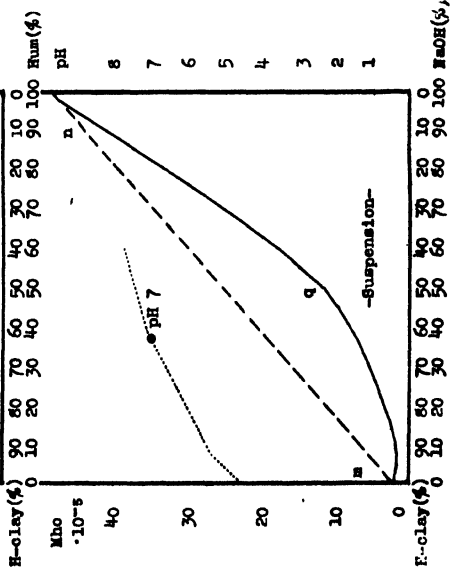


Fig. 31.

Soil clay susp. + NaOH solution



From these results came the following considerations.

1. Humic acid suspension + NH_4OH solution (Table 101 and Figure 12): The conductivity of the mixture increased strongly with additional increase of the percentage of ammonium hydroxide until it reached the point p which lies near the neutral point and thereafter advanced slowly and finally reached the conductivity of ammonia itself.

Accordingly, the conductivity curve of the mixture lay on the upper side of the line m n and showed a convex curve against the abscissa axis. If both substances do not interact mutually in the mixture, the conductivity will show the line m n. But the conductivity curve in the present case was convex. The fact that the conductivity of the mixture of the humic acid and ammoniacal water was always higher than the sum of the separate constituents, was noticed by ODEN in 1912⁽⁴⁶⁾, and on the basis of the fact he concluded that the action between these two substances is chemical and a saltforming action.

The degree of dissociation of ammonium hydroxide is comparatively low, that is, about 5 per cent for 0.1 N solution of NH_4OH , and in spite of the large mobility of its OH^- -ion, the conductivity is always lower than that of other ammonium salts of the same normality, because the dissociation of other ammonium salts takes place almost completely.

In figure 12 the steep ascending curve m p shows the increasing conductivity which depends upon the formation of a larger amount of ammonium humates. The point of inflection p undoubtedly represents the fact that all the humic acid combined with ammonium and the amount of the ammonium humate formed reached its highest value, because at this point the mixture became nearly neutral, and moreover the particle of the humic acid dissolved finally. The line p n indicates the sum of the conductivity of the ammonium humate and excess of the ammonium hydroxide in the mixture.

It is consequently concluded that between the humic acid suspension and the ammonium hydroxide solution a chemical reaction took

place and the ammonium humate having a higher conductivity than its separate constituents was formed.

2. Humic acid suspension + NaOH solution (Table 102 and Figure 13): Since the conductivity curve did not correspond with the line $m n$, it can be expected that some mutual action took place in the mixture.

The conductivity curve in this case, contrary to the above case, lay at the under side of the line $m n$ and showed therefore a concave curve against the abscissa. The formation of such a concave curve means that the conductivity of the mixture of these two substances is far less than the sum of each separate conductivity and, moreover, than that of the sodium hydroxide itself.

The point q , where the most remarkable decrease in the conductivity was observed, lay near the neutral point of the mixture and the particle of the humic acid suspension disappeared finally near the point. On the other hand, it has been recently ascertained by KAWAMURA⁽³²⁾ and others that the mutual action between these substances takes place chemically. From these facts it can be seen that the curve $m q n$ indicates the conductivity which was changed by chemical action.

The reason for the fact that the conductivity showed a concave curve can probably be explained by the higher conductivity of the sodium hydroxide as compared to that of the sodium humate solution.

It is therefore concluded that the humic acid suspension and the sodium hydroxide solution combined chemically with each other, and the conductivity of the mixture decreased remarkably, causing the formation of their salt.

3. Humic acid suspension + Na_2SiO_3 solution (Table 103 and Figure 14): The conductivity curve did not correspond with the line $m n$, but lay at the under side of this line, and it is therefore assumed that some mutual action happened in the mixture.

The point q , where the decrease of the conductivity occurred most strongly, lay near the neutral point of the mixture and at the point all of the humic acid suspension transferred to solutions having

molecular high dispersion. This means the formation of soluble salts of the humic acid. On the other hand, a part of the sodium silicate hydrolyses in the following manner: $\text{Na}_2\text{SiO}_3 + 2 \text{H}_2\text{O} = \text{H}_2\text{SiO}_3 + 2 \text{NaOH}$, and as a consequence sodium hydroxide appears in the mixture. The alkaline reaction of the sodium silicate solution is due to this fact. It can therefore be assumed that the sodium hydroxide which was derived from sodium silicate combines chemically with the humic acid as in the above case, while the silicic acid produced as a result of the hydrolysis does not react with the humic acid, because they are both acidoids.

4. Humic acid suspension + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension (Table 104 and Figure 15):

5. Humic acid suspension + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension (Table 105 and Figure 16): Although the conductivity curve of these mixtures did not accurately correspond with the line m n, it lay very near the line. This indicates that a little or perhaps no mutual action took place between these two suspensions.

6. Na-humate solution + AlCl_3 solution (Table 106 and Figure 17): Since the conductivity of the aluminum chloride solution showed a very high value, the scale on the ordinate in the figure 17 was reduced to one fifth of the common scale.

The conductivity curve did not correspond with the line m n and lay under it. It indicates therefore the possibility of some interactions between them.

The fact that at a certain hydrogen-ion concentration the flocculation of aluminum humates takes place isoelectrically from the mixture of the Na-humate and aluminum chloride solution, has been observed in the previous and in MATTSON's experiment. The most remarkable decrease of the conductivity in the present case took place near the point where the percentage of the humus substance was 80 to 90. This point lay between the pH of 5 and 6, and have the flocculation occurred completely. This flocculate should therefore be the isoelectrically formed aluminum humate which has the isoelectric point at a slightly acidic side.

On the other hand, in the zone where the flocculation had not yet occurred, the lower conductivity than the sum of each separate one was also observed. It indicates consequently the possibility of the occurrence of chemical interactions between these two substances. On this basis it is therefore concluded that between these two solutions a mutual chemical reaction took place.

7. Na-humate solution + FeCl_3 solution (Table 107 and Figure 18): The scale on the ordinate in the figure 18 was shortened to one tenth of the common scale, for the conductivity of the ferric chloride solution was extremely high.

The conductivity curve in this case showed the same tendency as that of the above case. At a slightly acidic point where the percentage of the humus substance was 90, the conductivity of the mixture decreased most rapidly, and complete flocculation took place. From these facts it can be assumed that the ferric humate was formed in the mixture in the same manner as the aluminum humate in the above case.

In the zone where the flocculation had not yet appeared in the mixture, the difference between the conductivity of the mixture and the sum of each separate one also increased gradually. This phenomenon indicates more clearly the occurring of the chemical change.

8. Na-humate solution + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension (Table 108 and Figure 19):

9. Na-humate solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension (Table 109 and Figure 20):

In this case the conductivity curve did not so closely correspond with the line m n, but veered a slight distance from the line. A remarkable interaction between the solution and the suspension can not therefore be observed. However, it can be assumed that some chemical interactions may have taken place because of the fact that the difference of the conductivity was greatest near the slightly acidic side, where the isoelectric point of aluminum or ferric humates can be supposed.

The chemical interaction between the solution and suspension as

in this case is probably not so strong as that between their two solutions.

10. Na-humate solution + Na_2SiO_3 solution (Table 110 and Figure 21): The conductivity curve closely corresponded with the line m n. Since both these substances have Na-ions as common cations, it can not be supposed that some mutual action will take place between them. In all the mixtures with various ratios the formation of the flocculate did not occur. From these reasons it can be said that no interaction took place between these two solutions.

11. Na_2SiO_3 solution + AlCl_3 solution (Table 111 and Figure 22): The scale on the ordinate in the figure 22 was shortened to one fifth of the common scale, for the conductivity of the aluminum chloride solution was comparatively high.

The conductivity curve lay under the line m n and the maximum difference of the conductivity was found near the point having 80 per cent of the silicate, and this point lay on the weak acidic side which is nearly in correspondence with the isoelectric point of amphoteric aluminum silicates. The flocculate was not found before the maximum difference of the conductivity between the lines m n and m q n was reached. In one of MATTSON's early experiments⁵⁹ it has been ascertained that from the mixture of the silicate of soda and chloride of aluminum or iron are formed isoelectrically aluminum or ferric silicates, and that their isoelectric point exists on the weak acidic side.

From the above reasons it should be concluded that at the isoelectric pH of all pH values in this mixture the amphoteric aluminum silicate had the greatest flocculation and the chemical action was shown between these two substances.

12. Na_2SiO_3 solution + FeCl_3 solution (Table 112 and Figure 23): The scale on the ordinate in the figure 23 was shortened to one tenth of the usual scale.

The conductivity curve intersected the line m n at a point q.

This indicates that in the case of a small amount of iron the conductivity was decreased, and reversely, in the case of a large amount of iron the conductivity increased.

The decrease of the conductivity was greatest at a weak acidic reaction, where the brown colored flocculate was finally formed. It is evident from the experiment of MATTSON, PUGH⁵²⁾ and others that the concave curve on the left of this figure suggests the formation of amphoteric ferric silicates.

The reason for the convex curve on the right of the figure can not be explained sufficiently by this experiment alone, but the curve seems to indicate some chemical action in the mixture.

13. Na_2SiO_3 solution + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension (Table 113 and Figure 24):

14. Na_2SiO_3 solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension (Table 114 and Figure 25): Although the conductivity curve lay at the under side of the line m n, the difference between both lines was exceedingly little. It is accordingly supposed that a little mutual action took place. In this case a little mechanical adsorption also might occur.

15. (Na_2SiO_3 + Na-humate) solution + AlCl_3 solution (Table 115 and Figure 26):

16. (Na_2SiO_3 + Na-humate) solution + FeCl_3 solution (Table 116 and Figure 27): In the mixture of the sodium silicate and sodium humate solution as acidoids, no chemical interaction takes place, as was seen in the experiment shown in the table 110. The conductivity of the mixture of this acidoid solution with the aluminum or ferric chloride solution was noticeably lower than the sum of the conductivity of the separate constituents. This means therefore the occurrence of some mutual action in the mixture. The conductivity of the mixture showed the maximum decrease near the weak acidic side, where the percentage of the acidoid mixture was 70. At that point the flocculate was completely formed.

On the other hand it has already been observed in the previous experiment that the flocculate of aluminum or ferric "silico-humates" is isoelectrically formed from the mixture of this solution under suitable conditions. In the present experiment the point at which flocculation took place completely and the conductivity decreased to the

greatest extent is in near agreement with the isoelectric point of aluminum or ferric "silico-humates".

Even before the flocculate was formed at first, the conductivity curve in the liquid phase, i. e., the line m q, lay far on the under side of the line m n, showing the presence of the mutual action among these ions.

For these reasons it can be said that there was a chemical action in the mixture.

17. (Na_2SiO_3 + Na-humate) solution + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension (Table 117 and Figure 28):

18. (Na_2SiO_3 + Na-humate) solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension (Table 118 and Figure 29): The difference between the conductivity of the mixture and the sum of the conductivities of the separate constituents was so small that the mutual action was hardly indicated. In the previous experiment with hydroxide suspensions of aluminum or iron and individual acidoid solutions it has been found that there was a chemical interaction to some extent.

Since the solubility and the degree of dissociation of hydroxides of aluminum or iron are much less than those of their chlorides, the ionic interaction in the mixture should be much weaker than in the previous cases, i. e., No. 15 and 16 with the chloride of aluminum or iron. In this mixture some mechanical adsorption by the hydroxide particle might occur.

19. H-clay suspension + Na-humate solution (Table 119 and Figure 30): The conductivity of the H-clay suspension and of the Na-humate solution which was accurately prepared, was modified to some extent by mixing these two substances, and the conductivity curve of the mixture lay under the line m n. The maximum decrease of the conductivity was found on a decidedly acidic side.

If the cationic exchange took place in this mixture, the conductivity curve should form a shape similar to that of the curve of the mixture in which the cationic exchange occurred clearly between the H-clay suspension and the sodium hydroxide solution (Table 120 and

Figure 31). But between the both curves in the figures 30 and 31, there were actually noticeable differences.

On the other hand, in the previous experiment some chemical interaction between the H-clay suspension and the Na-humate solution has been ascertained on the basis of their isoelectric relation.

It can be said, accordingly, that the chemical interaction took part in the mutual action.

B. Summary

By means of the conductmetric investigation the action of humus substances on other substances in a system was considered.

When two substances in a system, i. e., A and B, show neither chemical nor physical interaction, the conductivity of the system will be in agreement with the sum of the individual conductivities. If only a mechanical adsorption takes place, the conductivity of the system will be lower to some extent than the sum of the conductivities of the separate constituents. In the case that some chemical action took place between them, the conductivity will be either higher or lower than the sum of the conductivities of the separate constituents according to the nature of the products.

From this point of view the electric conductivity of a great deal of mixtures with any two substances whose mutual proportion was varied was determined, and the action between the two substances was examined.

The results obtained are given in tables 101 to 120 and figures 12 to 31. They are briefly summarized as follows. In mixtures of humic acid suspension + NH_4OH solution, humic acid suspension + NaOH solution, humic acid suspension + Na_2SiO_3 solution, Na-humate solution + AlCl_3 solution, Na-humate solution + FeCl_3 solution, Na_2SiO_3 solution + AlCl_3 solution, Na_2SiO_3 solution + FeCl_3 solution, (Na_2SiO_3 + Na-humate) solution + AlCl_3 solution, (Na_2SiO_3 + Na-humate) solution + FeCl_3 solution, some remarkable chemical interactions were seen. In mixtures of humic acid suspension + $\text{Al}(\text{OH})_3$ sus-

pension, humic acid suspension + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension, Na-humate solution + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension, Na-humate solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension, Na_2SiO_3 solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension, Na_2SiO_3 solution + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension, and H-clay suspension + Na-humate solution, some chemical interactions were also observed, but to far less extent than in the former group. There was, however, no chemical interaction in the mixture of silicate- and humate of soda.

It can be conclusively said that humus substances interact chemically more or less in a certain condition with basoid substances which are in both free and combined states, and the degree of the mutual chemical action is affected by the kind and state of basoid substances.

IX. CONDUCTMETRIC INVESTIGATIONS CONCERNING THE ACTION OF AMMONIA ON VARIOUS HUMUS SUBSTANCES

It has already been mentioned in the preceding chapter that since the dissociation of NH_4OH is comparatively low, its conductivity is lower than that of other ammonium salts at the same normality as NH_4OH , accordingly by mixing humic acid suspensions the conductivity of the mixture was raised to a point greater than the sum of the conductivity of both substances.

Such higher conductivity of the mixture, depending upon the ammonium humate produced, is affected by the duration of the contact of humus substances with ammonia. This phenomenon has already been observed by ODEN⁽⁴⁷⁾. He has hardly observed this phenomenon in pure humic acids, but in natural humus substances such as sphagnum humus he has observed it widely. The reason for this must be sought in the assumption that a part of humic acids in natural humus is not in the form easily soluble in ammonia. It has not yet been determined whether the nature of such insoluble modification depends upon the acid condensated by a partial dehydration or upon the changing of the acid to lower dispersity, as in tin acid and meta tin acid⁽⁴⁷⁾.

The possibility of the application of HATZSCH's pseudo-acid theory also⁽²⁴⁾ has not yet been ascertained.

Although the mechanism of this phenomenon is not yet clear, it will be in a close relation with the velocity of solution of various humus substances in ammonia solution. That is, humus substances in the easily soluble form must produce in short time ammonium humates whose conductivity is comparatively high, by the mixing of ammonia. In the present experiment, therefore, the conductmetric relation of various humates to ammonia solutions was compared with that of free humic acids, and from this result was studied the form of humus substances in soils.

A. Humic Acids and Various Humates

At first, the conductmetric relation of humic acids, their mixtures, and humates to ammonia solutions was studied. As samples were employed the following substances mixed with ammonia solutions.

1. Merck's humic acid suspension.
2. Mixture of $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension and humic acid.
3. Mixture of $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension and humic acid.
4. Mixture of Bentonite suspension and humic acid.
5. Mixture of Natrolite suspension and humic acid.
6. Aluminum humate suspension.
7. Ferric humate suspension.
8. Aluminum "silico-humate" suspension.
9. Ferric "silico-humate" suspension.

The preparation and purification of these materials were carried out by the method similar to that in the preceding experiment. The samples of Bentonite and Natrolite, from Yamagata-ken and Tyosen (Korea) respectively, were powdered finely and then sifted through a 0.25 mm sieve.

The quantity of the sample, which corresponds to 0.5 g of its total organic matter, was always mixed with hydroxide of ammonia, and

the concentration of ammonia in each mixture was exactly adjusted to 20 millimols.

50 cc. of suspensions of these samples were taken into the flask and allowed to stand with occasional shaking at 30°C in the thermostat. After one night 50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution at 30°C were poured into it, consequently the concentration of ammonia in mixtures came to 20 millimols. The specific conductivity of the mixture at 30°C, i. e., 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 60, 120, 180, 1200, 2700 and 4200 minutes, was successively determined after the mixing of ammonia.

The results obtained are given in tables 121 to 129 and figure 32.

TABLE 121.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and humus substances
(0.5 g of humic acid + 50 cc. of water) +
50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	34.0 ¹⁾	0.0
1	100.9	66.9
2	100.9	66.9
3	100.9	66.9
4	110.0	67.0
5	110.0	67.0
10	110.2	67.2
15	110.5	67.5
20	111.0	68.0
25	111.5	68.5
30	112.0	69.0
60	113.0	70.0
120	114.5	71.5
180	116.0	73.0
1200	123.0	80.0
2700	127.6	84.6
4200	135.8	92.8

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 122.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and humus substances
(50 cc. of 2 millimols/L $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension + 0.5 g of humic acid) +
50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	41.2 ⁽¹⁾	0.0
1	95.6	54.4
2	96.8	55.6
3	99.5	58.3
4	101.3	60.1
5	102.4	61.2
10	105.4	64.2
15	107.5	66.3
20	108.6	67.4
25	109.0	67.8
30	109.8	68.6
60	111.0	69.8
120	112.6	72.4
180	113.8	73.6
1200	121.5	80.3
2700	130.3	89.1
4200	137.8	96.6

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 123.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and humus substances
(50 cc. of 29 millimols/L $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension + 0.5 g of humic acid) +
50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	37.4 ⁽¹⁾	0.0
1	95.6	58.2
2	96.8	59.4
3	98.5	61.1
4	99.5	62.1
5	100.0	62.6
10	100.6	63.2
15	103.9	66.5
20	104.0	66.6
25	104.6	67.2
30	105.1	67.7
60	107.0	69.6
120	108.6	71.2
180	110.2	72.8
1200	123.6	86.2
2700	132.7	95.3
4200	140.5	103.1

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 124.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and humus substances
(5 g of Bentonite+0.5 g of humic acid + 50 cc. of water) +
50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	56.1 ⁽¹⁾	0.0
1	105.4	49.3
2	108.6	52.5
3	109.3	53.2
4	110.0	53.9
5	110.5	54.4
10	112.0	55.9
15	115.6	59.5
20	117.5	61.4
25	119.4	63.3
30	120.5	64.4
60	123.6	67.3
120	125.7	69.4
180	126.0	69.7
1200	128.0	71.7
1700	143.3	87.2
4200	152.5	96.4

1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 125.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and humus substances
(5 g of Natrolite+0.5 g of humic acid+50 cc. of water +
50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	52.1 ⁽¹⁾	0.0
1	89.6	37.5
2	90.0	37.9
3	90.5	38.4
4	90.8	33.7
5	91.9	39.8
10	93.0	40.9
15	93.6	41.5
20	94.0	41.9
25	94.2	42.1
30	94.6	42.5
60	95.5	43.4
120	97.6	45.5
180	99.0	46.9
1200	103.6	56.5
2700	119.4	67.3
4200	130.0	77.9

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 126.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and humus substances
 50 cc. of Al-humate suspension +
 50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	27.6 ¹⁾	0.0
1	55.1	27.5
2	56.0	28.4
3	58.7	31.1
4	59.0	31.4
5	59.3	31.7
10	61.0	32.4
15	62.5	33.9
20	62.9	34.3
25	63.5	34.9
30	64.5	35.9
60	66.4	37.8
120	71.7	43.1
180	74.6	46.0
1200	80.5	51.9
2700	85.3	56.7
4200	89.2	60.6

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 127.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and humus substances
 50 cc. of Fe-humate suspension +
 50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	27.6 ⁽¹⁾	0.0
1	71.0	43.4
2	73.8	46.2
3	79.6	52.0
4	81.9	54.3
5	84.3	56.7
10	94.3	66.7
15	99.5	71.9
20	101.6	74.0
25	103.9	76.3
30	108.6	81.0
60	115.6	88.0
120	125.6	98.1
180	128.0	100.3
1200	149.3	121.7
2700	155.7	128.1
4200	156.4	128.8

,1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 128.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and humus substances
 50 cc. of aluminum "silico-humate" suspension +
 50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	27.6 ⁽¹⁾	0.0
1	49.8	22.2
2	50.5	22.9
3	51.9	24.3
4	53.5	25.9
5	55.1	27.5
10	57.5	29.9
15	58.7	31.1
20	60.7	33.1
25	61.8	34.2
30	62.9	35.3
60	65.1	37.5
120	69.6	42.0
180	71.0	43.4
1200	76.2	48.6
2700	81.4	53.8
4200	82.4	54.8

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 129.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and humus substances
 50 cc. of ferric "silico-humate" suspension +
 50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	26.8 ⁽¹⁾	0.0
1	56.8	30.0
2	58.1	31.3
3	59.3	32.5
4	59.6	32.8
5	60.0	33.2
10	61.8	35.0
15	62.5	35.7
20	62.9	36.1
25	63.5	36.7
30	63.8	37.0
60	65.3	38.5
120	66.9	40.1
180	70.3	43.5
1200	73.3	56.5
2700	74.3	67.5
4200	79.8	73.0

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 130.
Conductivity of mixtures of suspension and ammonium hydroxide solution
(5 g of $\text{Fe}(\text{OH})_3$ + 50 cc. of water) +
50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	27.5 ⁽¹⁾	±0.0
1	27.5	±0.0
2	27.6	+0.1
3	27.6	+0.1
4	27.5	±0.0
5	27.5	±0.0
10	27.6	+0.1
15	27.8	+0.3
20	27.7	+0.2
25	27.8	+0.3
30	27.8	+0.3
60	27.7	+0.2
120	27.7	+0.2
180	27.9	+0.4
1200	27.9	+0.4

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 131.
Conductivity of mixtures of suspension and ammonium hydroxide solution
(5 g of $\text{Al}(\text{OH})_3$ + 50 cc. of water) +
50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conductivity increased .10 ⁻⁵ Mho
0	32.8 ⁽¹⁾	±0.0
1	32.6	-0.2
2	32.6	-0.2
3	32.7	-0.1
4	32.7	-0.1
5	32.7	-0.1
10	32.8	±0.0
15	32.7	-0.1
20	32.7	-0.1
25	32.8	±0.0
30	32.8	±0.0
60	32.8	±0.0
120	32.8	±0.0
180	32.8	±0.0
1200	33.0	+0.2

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 132.

Conductivity of mixtures of Bentonite suspension and ammonium hydroxide solution
(5 g of Bentonite + 50 cc. of water) +
50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conductivity increased $\cdot 10^{-5}$ Mho
0	70.0 ¹⁾	± 0.0
1	70.3	+0.3
2	70.3	+0.3
3	70.3	+0.3
4	70.3	+0.3
5	70.3	+0.3
10	70.3	+0.3
15	70.3	+0.3
20	70.3	+0.3
25	70.3	+0.3
30	70.3	+0.3
60	70.3	+0.3
120	70.3	+0.3
180	70.3	+0.3
1200	70.4	+0.4

1 It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 133.

Conductivity of mixtures of Natrolite suspension and ammonium hydroxide solution
(5 g of Natrolite + 50 cc. of water) +
50 cc. of 50 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conductivity increased $\cdot 10^{-5}$ Mho
0	41.7 ¹⁾	± 0.0
1	41.0	-0.7
2	41.0	-0.7
3	41.0	-0.7
4	41.1	-0.6
5	41.0	-0.7
10	41.2	-0.5
15	41.2	-0.5
20	41.2	-0.5
30	41.4	-0.3
60	41.4	-0.3
120	41.5	-0.2
180	41.7	± 0.0
1200	41.7	± 0.0

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

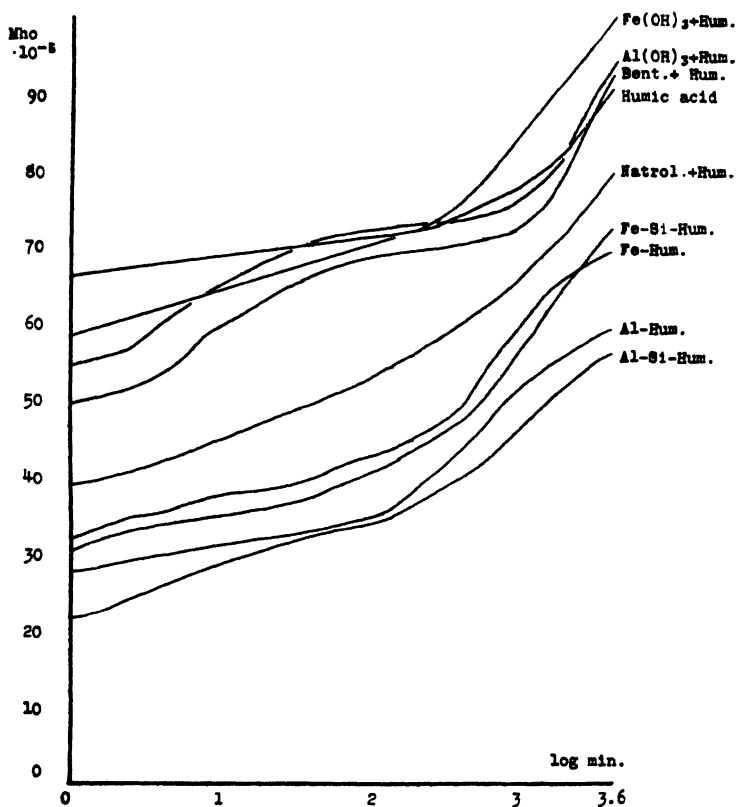


Fig. 32.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on progression of the reaction.

In all cases, the conductivity after mixing of these substances was always higher than the sum of the conductivities of the separate constituents. The difference between the actual conductivity after mixing and the sum of the conductivities of the separate constituents means the increase of the conductivity after mixing. Comparing the increase of the conductivity one minute after mixing, the highest increase was found in the case of the humic acid which reach $93 \cdot 10^{-5}$ Mho, while the lowest was found in the case of the aluminum "silico-humate" which

reached $22 \cdot 10^{-5}$ Mho. The increase of the conductivity of various samples is shown in the following order.

Humic acid $>$ $\text{Fe}(\text{OH})_3$ + Humic acid $>$ $\text{Al}(\text{OH})_3$ + Humic acid
 $>$ Bentonite + Humic acid $>$ Natrolite + Humic acid $>$ Ferric
humate $>$ Ferric "silico-humate" $>$ Aluminum humate $>$ Alumi-
num "silico-humate".

In order to determine whether such a difference of increase among these samples depends only on the formation of ammonium humates or also on the adsorption of ammonium-ions by colloidal matters in the samples, $\text{Fe}(\text{OH})_3$ -, $\text{Al}(\text{OH})_3$ -, Bentonite- and Natrolite suspensions were separately mixed with the ammonium hydroxide solution, whose concentration was 20 millimols in the mixture, and the specific conductivity was examined. The result showed, as described in tables 130 to 133, that the adsorption of ammonium-ions by colloidal matters in samples hardly occurred in these mixtures.

The difference of increase in conductivity among these substances produced with a noticeably higher conductivity. In other words this difference is in a close relation with the solubility of humus substances of samples in ammonium hydroxide solutions.

Moreover, the conductivity of these mixtures was modified by the progression of reactions, that is, it gradually increased noticeably with the progression of reactions after the mixing of the ammonia solution. The increasing ratios of the conductivity of these samples were compared with one another by the mean value of the conductivity which increased within any unit time. As a result the increasing ratios were not agreeable with one another in all mixtures, that is, Merck's free humic acid showed a slight increase in conductivity with the progression of reactions, and mixtures of the humic acid with other suspensions showed a little higher increase, while aluminum or ferric humates and aluminum or ferric "silico-humates" increased most remarkably the conductivity of their mixtures.

For the purpose of determining whether such an increase in conductivity as the reactions progress depends only upon the successive formation of ammonium humates or some mutual action between the

hydroxide of ammonium and other mineral components in the mixture, the experiment as shown in tables 130 to 133 was carried out. It was found that the mineral components in the mixture take almost no part in the reaction. Consequently, it can be assumed that the increase in conductivity with the progression of reactions depends mainly on the ammonium humate.

The mixture, whose conductivity increased with the progression of reactions after the mixing of ammonia, showed a comparatively small increase in conductivity at the instant after the mixing of ammonia. This probably depends upon the fact that little ammonium humate was produced in mixtures at the instant after the mixing of the hydroxide of ammonia, and that the amount increased rapidly with the progression of reactions.

From these experimental results came the following conclusion. The increase of the conductivity of mixtures within one minute after the mixing of ammonia was noticeably greater in the case of the free humic acid and its mixture with other suspensions than in the case of various humates. It is therefore shown that the nearer the state of humus substances in mixtures is to free humic acids the larger the amount of ammonium humates produced at the instant after the mixing of ammonia. Consequently, the small increase of the conductivity of humates at the instant after the mixing of ammonia means that humus substances in these humates exist in more complicated form than free humic acids.

Moreover, the conductivity of mixtures increased with the progression of reactions after the mixing of ammonia. This increase was modified by the difference of samples, that is, mixtures of humates and ammonia showed the highest increase of their conductivity, while mixtures of humic acids, mineral suspensions and ammonia, and of humic acids and ammonia showed a small increase. The increase of the conductivity of the mixture of humic acids with ammonia was practically finished in a comparatively short time, while the action of ammonia on aluminum or ferric humates and aluminum or ferric "silico-humates" gradually continued with progression of reactions

after the mixing of ammonia. Accordingly, it is concluded that humus substances in the form of humates, in comparison with free humic acids, are more resistant to ammonia, because their action on ammonia was more slowly than that of free humic acids.

The change of the conductivity by mixing ammonia gives some suggestion as to the form of humus substances.

B. Natural Soils

Next came the experiment on the conductmetric relation between humus substances in various soils and hydroxides of ammonia.

As samples were employed the following soils :

- D. 147 Tainan-syu, Mt. Ari, 2500 m Height, humus soil,
(humus = 13.5%), surface soil.
- D. 368 Taihoku-syu, Mt. Sitisei, 800 m Height, humus soil,
(humus = 14.9%), surface soil.
- D. 370 Taihoku-syu, Mt. Sitisei, 500 m Height, humus soil,
(humus = 9.5%), surface soil.
- D. 371 Taihoku-syu, Mt. Sitisei, under layer of D. 370,
(humus = 7.1%).
- D. 374 Taihoku-syu, Kaizan-gun, Ooka-syo, lateritic soil,
(humus = 3.4%).
- D. 376 Taityu-syu, Noko-gun, Central mountain chain, 3200 m
Height, humus, soil, (humus = 9.9%), surface
soil.
- D. 435 Taihoku-si, Tomita-mati, sandstone-shale soil,
(humus = 1.9%).

5 g each of these soil samples which were sifted through a 0.5 mm sieve was mixed with 50 cc. of distilled water. The mixture was allowed to stand over night at a temperature of 30°C with a definite shaking. Then 50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution, being kept at 30°C were poured in, thereby the concentration of ammonia in the mixture reached 20 millimols/L. The specific conductivity was deter-

mined at the following times, i. e., 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, 25, 30, 60, 120, 180, 1200, 2700 and 4200 minutes after the mixing of ammonia.

For the sake of convenience in comparing the changes in the conductivity of the soils with those of humates containing 0.5 g of humus, from the conductivity of 5 g of the soils was calculated that of the soils containing 0.5 g of humus, because amounts of humus in the soils whose conductivity was determined were always either greater or smaller than 0.5 g.

The results are shown in tables 134 to 140 and figure 33.

TABLE 134.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and a soil D. 147 whose humus content is 13.5 per cent
(5 g of soil + 50 cc. of water) +
50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. increased $\cdot 10^{-5}$ Mho	Increase in conduct. of the soil containing 0.5 g humus $\cdot 10^{-5}$ Mho
0	30.0 ⁽¹⁾	0.0	0.0
1	33.5	3.5	2.8
2	33.8	3.8	3.0
3	34.5	4.5	3.6
4	35.0	5.0	3.9
5	35.4	5.4	4.2
10	36.7	6.7	5.2
15	37.8	7.8	6.0
20	38.4	8.4	6.5
25	39.8	9.8	7.5
30	40.0	10.0	7.8
60	41.7	11.7	9.0
120	44.8	14.8	11.3
180	47.1	17.1	13.0
1200	55.1	25.1	19.0
2700	73.8	43.8	32.8
4200	74.2	44.2	33.3

1 : It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 135.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and a soil D. 368
 whose humus content is 14.9 per cent
 (5 g of soil+50 cc. of water) +50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conduct. increased .10 ⁻⁵ Mho	Increase in conduct. of the soil containing 0.5 g humus .10 ⁻⁵ Mho
0	28.5 ⁽¹⁾	0.0	0.0
1	38.1	9.6	6.2
2	39.4	10.9	7.1
3	39.6	11.1	7.2
4	40.3	11.8	7.7
5	40.4	11.9	7.8
10	40.7	12.2	8.0
15	41.7	13.2	8.6
20	42.3	13.8	9.1
25	43.1	14.6	9.6
30	44.1	15.6	10.2
60	46.2	17.7	11.7
120	53.1	24.6	16.4
180	56.4	27.9	18.6
1200	82.4	53.9	36.3
2700	101.0	72.5	49.0
4200	109.2	80.7	54.5

1 : It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 136.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and a soil D. 370
 whose humus content is 9.5 per cent
 5 g of soil+50 cc. of water) +50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conduct. increased .10 ⁻⁵ Mho	Increase in conduct. of the soil containing 0.5 g humus .10 ⁻⁵ Mho
0	28.5 ⁽¹⁾	0.0	0.0
1	44.8	16.3	17.0
2	45.4	16.9	17.6
3	46.1	17.6	19.4
4	46.5	18.0	19.9
5	47.3	18.8	20.7
10	50.0	21.5	23.6
15	53.1	24.6	26.9
20	54.3	25.8	28.1
25	58.7	30.2	32.8
30	59.7	31.2	33.9
60	62.9	34.4	37.2
120	66.4	37.9	41.0
180	71.0	42.5	45.8
1200	94.3	65.8	69.5
2700	107.5	78.0	83.2
4200	114.1	85.6	89.1

1 : It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 137.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and a soil D. 371
whose humus content is 7.1 per cent
(5 g of soil + 50 cc. of water) + 50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. increased $\cdot 10^{-5}$ Mho	Increase in conduct. of the soil containing 0.5 g humus $\cdot 10^{-5}$ Mho
0	28.0 ⁽¹⁾	0.0	0.0
1	55.6	27.6	39.5
2	56.4	28.4	40.0
3	61.7	33.7	48.2
4	64.0	36.0	51.5
5	64.6	36.6	52.3
10	66.4	38.4	54.9
15	68.2	40.2	57.5
20	70.0	42.0	60.1
25	72.0	44.0	62.8
30	73.1	45.1	64.5
60	77.9	49.9	71.4
120	80.5	52.5	75.1
180	87.5	59.5	85.1
1200	103.9	75.9	108.5
2700	108.5	80.5	120.1
4200	112.8	84.8	126.5

(1) : It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 138.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and a soil D. 374
whose humus content is 3.4 per cent
(5 g of soil + 50 cc. of water) + 50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures $\cdot 10^{-5}$ Mho	Conduct. increased $\cdot 10^{-5}$ Mho	Increase in conduct. of the soil containing 0.5 g humus $\cdot 10^{-5}$ Mho
0	26.5 ⁽¹⁾	0.0	0.0
1	37.7	11.2	32.9
2	39.2	12.7	37.3
3	41.7	15.2	44.7
4	43.2	16.7	49.1
5	43.7	17.2	50.6
10	47.1	20.6	60.6
15	48.1	21.6	63.5
20	49.8	23.3	68.5
25	51.6	25.1	73.8
30	51.9	25.4	74.7
60	61.2	34.7	102.0
120	65.1	38.6	113.5
180	68.2	41.7	122.6
1200	71.7	45.2	132.9
2700	73.6	47.1	138.5
4200	74.2	47.7	140.4

(1) : It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 139.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and a soil D. 396
whose humus content is 9.9 per cent
(5 g of soil+50 cc. of water) +50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conduct. increased .10 ⁻⁵ Mho	Increase in conduct. of the soil containing 0.5 g humus .10 ⁻⁵ Mho
0	39.6 ⁽¹⁾	0.0	0.0
1	73.1	33.5	33.5
2	73.1	33.5	33.5
3	73.1	33.5	33.5
4	75.4	35.8	35.8
5	75.4	35.8	35.8
10	76.2	36.6	36.6
15	79.6	40.0	40.0
20	81.4	41.8	41.8
25	84.3	44.7	44.7
30	84.9	45.3	45.3
60	89.6	50.0	50.0
120	95.5	55.9	55.9
180	93.1	53.5	53.5
1200	132.7	93.1	93.1
2700	140.8	101.2	101.2
4200	145.6	106.0	106.0

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

TABLE 140.

Changes in conductivity of mixtures of ammonium hydroxide and a soil D. 435
whose humus content is 1.9 per cent
(5 g of soil+50 cc. of water) +50 cc. of 40 millimols/L NH_4OH solution.

Time after mixing min.	Conduct. of mixtures .10 ⁻⁵ Mho	Conduct. increased .10 ⁻⁵ Mho	Increase in conduct. of the soil containing 0.5 g humus .10 ⁻⁵ Mho
0	24.9 ⁽¹⁾	0.0	0.0
1	28.0	3.1	15.8
2	28.7	3.8	19.5
3	29.1	4.2	21.6
4	30.1	5.2	26.8
5	30.4	5.5	28.4
10	31.2	6.3	32.6
15	32.0	7.1	36.8
20	33.2	8.3	41.0
25	33.8	8.9	44.2
30	33.8	8.9	44.2
60	33.8	8.9	44.2
120	34.8	9.9	49.4
180	36.2	11.3	56.8
1200	38.1	13.2	66.8
2700	38.8	13.9	73.0
4200	41.8	16.9	89.1

(1): It means the sum of conduct. of the each substance.

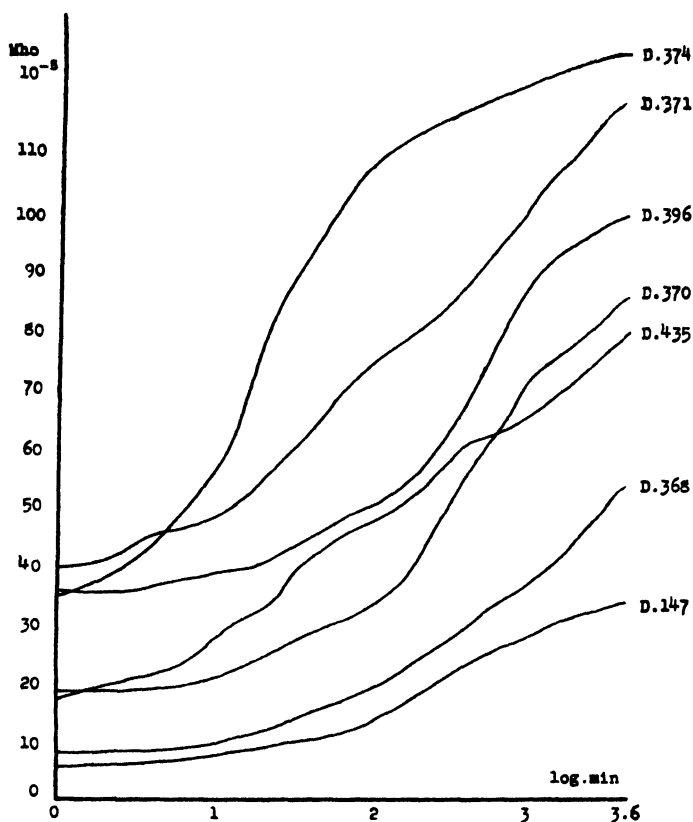


Fig. 33.

Changes in conductivity of mixtures of two substances, depending on progression of the reaction.

The conductivity of mixtures of these soils and the ammonium hydroxide was increased without exception by the addition of ammonia than the sum of the conductivities of the separate constituents, and the difference between the actual conductivity and the sum of the conductivities of the separate constituents, i. e., the increased conductivity, was not the same.

A great part of these increases in conductivity took place instantly after the mixing of ammonia, and then continued gradually with the progression of reactions. The increase at one minute after mixing lay

between $5 \cdot 10^{-5}$ and $50 \cdot 10^{-5}$ Mho, and the order of the increase is shown as follows:

$$D. 396 > D. 371 > D. 374 > D. 435 > D. 370 > D. 368 > D. 147.$$

The increase of the conductivity continued gradually with the progression of time after the mixing of ammonia. According to the experiment described in tables 130 to 133, this increase of conductivity depends on the formation of ammonium humates in mixtures.

These results obtained from natural soils were compared (1) with that from the free humic acid, (2) with mixtures of the free humic acid with other mineral suspensions, and (3) with the humates, in the preceding experiment. The degree of increase in the conductivity of soils at the instant after the mixing of ammonia was noticeably lower than those of the free humic acid and its mixtures with other mineral substances, and moreover was a little lower generally than those of the various humates.

It is therefore indicated that the action of ammonia on these humates at the instant after mixing of ammonia was weaker than that on the free humic acid and its mixtures with other materials, and that this action was stronger than the action on humus in natural soils. In other words the degree of resistance of the humates, isoelectrically prepared, to the ammonia solution was greater than that of the free humic acid and less than that of the humus soils.

On the other hand, the conductivity of mixtures of humus substances with the ammonia solution was changed with the progression of reactions after the mixing of ammonia, that is, it increased gradually in direct proportion to the duration of the reaction. But the degrees of increase in conductivity, which depended on the duration of the reaction, were not identical among various humus substances. That is, the increase was lowest in the free humic acid, a little higher in mixtures of the humic acid with other mineral substances, considerably higher in the humates, and highest in the natural humus soils. It is therefore seen that the increase of the conductivity depending on the progression of reactions became greater with the complication of the form of humus substances in samples. As a consequence it is as-

sumed that a large part of humus substances in soils combines with other mineral components, as well as in the case of humates which were formed isoelectrically.

C. Summary

In this chapter the form of humus substances in soils was examined by means of the conductmetric investigation.

As the sample in this experiment were employed various soils, aluminum and ferric humate suspensions, aluminum and ferric "silico-humate" suspensions which were prepared isoelectrically, and a humic acid suspension, and its mixtures with other mineral suspensions such as $\text{Al}(\text{OH})_3$, $\text{Fe}(\text{OH})_3$, Bentonite- and Natrolite suspension. To a given quantity of these samples was added the same volume of ammonia solution. The concentration of ammonia in the mixture was always 20 millimols/L. The conductivity of the mixture with ammonia was determined successively at different periods from 1 to 4200 minutes.

The conductivity of mixtures of various humus substances with ammonia solution became remarkably higher at the instant when ammonia was added than the sum of the conductivity of both substances. The difference between the actual conductivity and the sum of the conductivities of the separate substances occurred because the conductivity was increased by the addition of ammonia. Moreover, a remarkable increase of the conductivity of the mixture came as the reactions progressed.

Such an increase of the conductivity, which was brought about by both the mixing of ammonia and the progression of the reactions, was changed by the difference of the form of humus substances. The value of the conductivity with increased at the instant ammonia was added is shown in the following order ;

Free humic acid > Mixtures of humic acids and other mineral substances > Humates.

The increase of the conductivity depends on the progression of the reactions and is given in the following order:

Free humic acids < Mixtures of humic acids and other mineral substances < Humates.

It was ascertained that this increase of the conductivity is in close relation to the amount of ammonium humates formed. The formation of ammonium humates in mixtures is affected by the resistance of humus substances to ammonia solution. Accordingly, the stronger the resistance of humus substances to the action of ammonia, the smaller the increase of the conductivity of their mixtures at the instant when ammonia is added. However the increase depending upon the progression of reactions is large.

As a consequence, it was shown in the experiment, that humus substances in humates and natural soils have strong resistance to ammonia in comparison with that of free humic acids and their mixtures with other mineral substances. Therefore it was concluded that a large part of humus substances in natural soils as well as those in humates which were isoelectrically formed is probably in a combined condition with other components.

X. INVESTIGATION CONCERNING THE MIGRATION OF IONS FROM HUMATES AND SOILS BY ELECTRODIALYSIS

In electrodialysis experiments the different cations which are liberated from the solutions or suspensions contained in the middle compartment of a three chambered apparatus will accumulate in the cathode chamber as hydroxides⁽³⁶⁾.

The anions liberated from an electrodialyzed medium migrate to the anode where a formation of acids in the anode solution takes place. If we deal with soil suspensions which contain humus substances the dialyzate in the anode chamber will consist of a mixture of mineral acids and electrodialyzable humus substances.

In experiments dealing with the electrodialysis of soils or soil colloidal materials, however, ions which normally function as metallic cations and silicon have been found at both the anode and cathode. ODEN⁽⁴⁸⁾, who observed that during the electrodialysis of a garden soil larger amounts of silicon were transported to the cathode than to the anode, made no attempt to explain the phenomenon. LÖDDESÖL⁽⁵⁵⁾ has reported that the anode solutions resulting from the electrodialysis of especially prepared colloids contained significant traces of iron, aluminum and magnesium. He made the suggestion that these ions may have been present at the anode in the form of complexes consisting of hydroxides which had absorbed acid anions. In electrodialyzing peat, WILSON and STAKER⁽⁷⁴⁾ have found considerable amounts of iron, aluminum, calcium and magnesium, and smaller amounts of sodium and potassium, at the anode, and silicon at the cathode. It has been assumed by them that during the electrodialysis of peat, metallic ions are transported to the anode as parts of complex organic anions, while the silicon which is sometimes found at the cathode is a part of a complex organic ion electropositively charged. SHIBUYA and TORII⁽⁶⁴⁾ in our laboratory have observed the transportation of a part of organic potassium, calcium and iron in plant tissues to the anode during the electrodialysis. MATTSON⁽³⁸⁾⁽⁶³⁾ has observed the fact that when orthoclase is electrodialyzed, aluminum appears together with silica in the cathode chamber after the pH of the feldspar has been reduced to a certain value by the removal of potassium, and then he has suggested that the aluminum and silica exist in acid solution in the form of a complex cation.

These facts give us some suggestion for the determination of the form of humus substances in natural soils and humus materials. In this experiment, therefore, the behavior of various constituents in soils and humus materials during the electrodialysis was observed as follows.

A. Minerals and Humus Materials

As WILSON and STAKER have assumed, when a complex organic ion, whose charge was opposite to the original individual ion, exists in a system, the detection of such a complex ion probably can be carried out by means of electrodialysis. Accordingly, the following materials were prepared and their given quantity was electrodialyzed.

1. Ferric hydroxide suspension: Prepared from ferric chloride and purified.

2. Aluminum hydroxide suspension: Prepared from aluminum chloride and purified.

3. Humic acid suspension: Merck's humic acid was employed.

4. Ferric humate suspension: Isoelectric precipitate between ferric chloride and Na-humate solution.

5. Aluminum humate suspension: Isoelectric precipitate between aluminum chloride and Na-humate solution.

6. Ferric "silico-humate" suspension: Isoelectric precipitate between ferric chloride, sodium silicate and Na-humate solution.

7. Aluminum "silico-humate" suspension: Isoelectric precipitate between aluminum chloride, sodium silicate and Na-humate solution.

Impurities in these samples were displaced as far as possible.

A Pauli cell with three compartments was used in electrodialyzing the sample. Parchment paper constituted the membrane at both electrodes which were of silver gauze. The dialysis was kept continuously for 100 hours, using a current of 100 volts and 30 milliamperes and with suitable resistance in the circuit. A comparatively large amount of the sample was used in order to obtain measurable quantities of ions at both electrode compartments. The solutions were removed from both the anode and the cathode compartments every four hours during electrodialysis to facilitate the rapidity of the removal of the ions and to lessen the amount of ionic precipitation on the cathode membrane.

The solutions that were removed from both the compartments were combined and concentrated by heating, then the quantity of

solid matter, organic matter, silica, alumina and iron was estimated. Determination of organic matters was carried out by SHIBUYA's hydrogen peroxide method, and to the other constituents the usual gravimetric procedure was applied.

The percentage of the constituents which removed to the cathode and anode compartment, in all the samples used, is shown in table 141.

TABLE 141.

Distribution of ions in both anode and cathode solutions after electrodialysis, using mineral and humus substances

Sample	Organic matter %		SiO ₂ %		Al ₂ O ₃ %		Fe ₂ O ₃ %	
	Anode soln.	Cathode soln.	Anode soln.	Cathode soln.	Anode soln.	Cathode soln.	Anode soln.	Cathode soln.
Fe(OH) ₃ susp.	—	—	—	—	—	—	0.0	0.1
Al OH susp.	—	—	—	—	0.0	0.8	—	—
Humic acid, susp.	3.0	trace	—	—	—	—	—	—
Fe-humate susp.	4.3	0.5	—	—	—	—	0.4	4.5
Al-humate susp.	4.0	0.7	—	—	0.7	1.1	—	—
Fe-Si-humate susp.	4.6	1.2	3.6	6.9	—	—	0.5	3.0
Al-Si-humate susp.	5.3	1.3	2.5	3.9	0.8	2.9	—	—

The reaction of the middle compartment solution was weak acidic throughout the electrodialysis.

Metallic cations of both the ferric and aluminum hydroxide suspensions were found to some extent in the cathode solution, whereas in the anode solution nothing of them was found after the electrodialysis. On the contrary, metallic cations of the aluminum and ferric humate suspensions removed to both the electrode solutions during the electrodialysis, although in the anode solution was found a small amount of cations.

On the other hand, a comparatively large amount of organic matters of the aluminum and ferric humate suspensions was trans-

ported to the anode compartment, whereas a small amount of organic matter was found in the cathode solution. Organic matters of the humic acid suspension, however, could not almost be found in the cathode compartment. If such a migration of organic matters to both the electrode solutions depended upon mutual absorption of ions which have different charges with each other, the similar phenomenon to that in the aluminum or ferric humate suspension must be expected also to occur in mixtures of $\text{Al}(\text{OH})_3$ - or $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspensions with humic acid suspensions. But in further experiments the fact could not be observed. Considering the above results, it may be assumed, as WILSON and STAKER supposed, that the metallic ions of the aluminum or ferric humate, which entered into the anode solution during the electrodialysis, were in the form of complex organic ions combined with the organic matter, and that at the same time, the organic matter which removed to the cathode solution was also in the form of electropositively charged complex organic ions.

In the electrodialyzing of both the aluminum and ferric "silico-humate" suspensions was also observed a result similar to the above case. That is, a large amount of their cations and organic matters was removed to the cathode and anode compartments respectively by electrodialysis, whereas a small amount always went over to the opposite electrode solution.

Silicon of these humates was also found in both the electrode solutions. The fact that silicon in organic compounds was sometimes found at the cathode during electrodialysis has already been observed by WILSON, STAKER and others, and it has been attributed by them to a complex organic ion combining with silicon.

In short, metallic ions of hydroxides of iron and aluminum, and organic matters of free humic acids went over to either the cathode or anode compartment during the electrodialysis, whereas all the constituents of aluminum or ferric humates and aluminum or ferric "silico-humates" were found at both the cathode and anode. From the above results it appears that during the electrodialysis ions in the material with organic matters are transported to either the cathode

or anode as parts of complex organic ions. As a consequence, it may be assumed that all kinds of constituents of these aluminum or ferric "silico-humates" exist in chemical combination with organic matters, rather than in a mixed state with one another.

B. Natural Soils

The present experiment treated of the electrodialysis of various natural humus soils as contrasted to the artificial humates in the preceding experiment.

As soil samples were employed the following humus soils which passed through a 0.5 mm sieve:

- D. 147 Tainan-syu, Mt. Ari, 2500 m Height, humus=13.5%.
- D. 367 Taihoku-syu, Mt. Sitisei, 1100 m Height, humus=18.5%.
- D. 370 do, 500 m Height, humus=9.5%.
- D. 396 Taityu-syu, Central mountain chain, 3200 m Height,
humus=9.9%

The electrodialysis and the chemical analysis were carried out by a procedure similar to that used in the preceding experiment.

In the soil sample the percentage of the ingredients which removed to the cathode and anode compartment is given in table 142.

The reaction of the middle compartment solution was weak acidic throughout the electrodialysis.

Organic matters which removed from the middle compartment were found at both the cathode and anode after the electrodialysis. The quantity was, however, always larger in the anode solution than in the cathode.

On the other hand, a large amount of the dialyzed iron, aluminum and silicon went over to the cathode, but they were also found to a less extent in the anode solution.

Such a distribution of the quantity of these constituents between both the electrode solutions was in a similar relation to that of the foregoing experiment using the artificial humates.

In spite of the negative charge of free humic acids a part of

TABLE 142.

Distribution of ions in both anode and cathode solutions after electrodialysis,
using mineral soils

Soil	Solid matter %		Organic matter %		SiO ₂ %		R ₂ O ₃ % ⁽¹⁾	
	Anode soln.	Cathode soln.	Anode soln.	Cathode soln.	Anode soln.	Cathode soln.	Anode soln.	Cathode soln.
D. 147	0.16	0.73	0.07	0.04	0.01	0.03	0.01	0.06
D. 367	0.10	0.37	0.06	0.04	0.01	0.02	0.01	0.07
D. 370	—	—	0.02	0.01	0.01	0.02	0.01	0.05
D. 396	0.23	1.00	0.12	0.07	0.01	0.02	0.02	0.14

(1 : R₂O₃ represents the sum of Al₂O₃ and Fe₂O₃.)

the organic matter in the soils removed to the cathode during the electrodialysis as above seen.

From this result and WILSON's evidence, it appears that during the electrodialysis of soils organic matters which were found in the cathode solution were transported to the cathode as parts of complex organic cations with iron, aluminum and silicon. On the other hand, it is perhaps possible that the iron, aluminum and silicon in the anode solution are parts of complex organic ions, electronegatively charged, which combine with organic matters.

In electrodialysis of humus soils it can be supposed that a part of protein in soils, which has amphoteric nature goes over to either electrode solution. The content of protein in soils is, however, sufficiently low. On the other hand, in the preceding experiment with aluminum or ferric humates, and aluminum or ferric "silico-humates", a part of the humus substance removed to the cathode as electropositive ions during the electrodialysis in spite of the negative charge of free humic acids. Accordingly, in electrodialyzing these soils, organic matters which removed to the cathode solution should be humus substances.

From these results it is assumed that organic matters in soils, at least a part of it, is in chemical combination with other soil constituents such as iron, aluminum and silicon.

C. Summary

In this experiment in order to examine the form of organic matters in soils various artificial humates and humus soils were electrodialyzed.

It has been already observed by a few workers that in electro-dialyzing humus soils a part of metallic ions like aluminum and iron in the soil removed to the anode, while a part of the organic matter went over to the cathode compartment. The reason for this has been explained by various hypotheses. Recently WILSON and STAKER have assumed that these phenomena depend on the presence of organic complex ions.

On this basis electrodialysis experiments were carried out using the following materials :

a) *Minerals and humus materials.*

1. Ferric hydroxide suspension.
2. Aluminum hydroxide suspension.
3. Humic acid suspension.
4. Ferric humate suspension.
5. Aluminum humate suspension.
6. Ferric "silico-humate" suspension.
7. Aluminum "silico-humate" suspension.

b) *Humus soils.*

Four kinds of humus soils.

These samples were continuously dialyzed for 100 hours with a Pauli cell using a current of 100 volts and 30 milliamperes. From both the electrode solutions which contained dialyzed substances the quantities of solid matters, organic matters, silicon, aluminum and iron were estimated.

The summary of the results is as follows. The dialyzed metallic

ions from both aluminum and ferric hydroxide suspensions were found only in the cathode solution, and organic matters of free humic acid suspensions were removed only to the anode compartment during the electrodialysis. Accordingly, the former was not found in the anode electrode solution, nor the latter in the cathode electrode solution.

On the contrary, in electrodialyzing aluminum or ferric humates, aluminum or ferric "silico-humates" and humus soils, all of their dialyzed organic matters, aluminum, iron and silicon were always found more or less in both the electrode solutions. That is, a part of organic matters and silicon of the samples was found also in the cathode solution, and a part of aluminum and iron also in the anode solution after the electrodialysis.

It is therefore assumed from these results and WILSON's evidence that the organic matter in the cathode solution went over to the cathode as a part of a complex organic cation with metallic ions, that the aluminum and iron in the anode solution removed to the anode as parts of complex organic ions electronegatively charged, and that the silicon which is found at the cathode is also a part of a complex organic ion.

Since the artificial aluminum or ferric "silico-humates" showed behavior similar to that of the aluminum or ferric humates which are deemed chemical compounds, the former, at least a part of them, seems to be in chemical combination. Moreover, since the behavior of the soils during the electrodialysis was also similar to the above, a part of the organic matter of the soils should therefore exist in the form of a chemical combination with other components.

XI. OXIDABILITY OF HUMUS SUBSTANCES IN HUMATES AND NATURAL SOILS

A. Experimental

Natural humus results from the decomposition of plant, animal, and microbial residues by micro-organisms. Its rate of accumulation

and decomposition are changed by its nature as an inner factor, further as environmental factors the conditions under which decomposition is taking place, temperature, moisture content, aeration, and the reaction of medium are of primary importance. Accordingly, if other environmental factors are equal, the chemical and the biological decomposition of humus depends principally upon its nature. Humus decomposes finally to simpler components by an oxidizing process. If the form of humus is different, the chemical oxidizing action will be more or less changed.

The oxidizing experiment with various humus materials was carried out in order to examine their form.

As samples were employed the following materials.

1. Merck's humic acid.
2. Humic acid separated from a humus soil D. 362.
3. Aluminum humate.
4. Ferric humate.
5. Aluminum "silico-humate".
6. Ferric "silico-humate".
7. Humus soils :

Igneous origin.

- a. D. 367 Taihoku-syu, Mt. Sitisei, 1100 m Height.
- b. D. 368 do, 800 m Height.
- c. D. 370 do, 500 m Height.
- d. D. 371 do, under layer of D. 370.
- e. D. 372 do, under layer of D. 371.

Sedimentary origin.

- f. D. 90 Taityu-syu, Niitaka-gun, Toosya.
- g. D. 147 Tainan-syu, Mt. Ari, 2500 m Height.
- h. D. 224 Taihoku-si, Tomita-mati.
- i. D. 374 Taihoku-syu, Ooka-syo.
- j. D. 376 do,
- k. D. 377 do, under layer of D. 376.
- l. Clay slate Taityu-syu.

Oxidability of these samples was tested by using potassium permanganate according to ROLLOV's method⁽⁵⁴⁾.

At first the total quantity of the humus substances of these humic acids and humates was estimated. A given volume of their suspension was mixed with a slight amount of sulfuric acid, and into the mixture was poured a sufficient quantity of 0.2 N potassium permanganate solution to oxidize their total organic matter. Thereafter it was kept for a few minutes at 92-94°C on a water bath. After heating, a slight excess of 0.2 N oxalic acid was added until the pink color of the manganate faded entirely, and the mixture was again heated. Then it was back-titrated by the 0.2 N potassium permanganate solution, and from the total quantity of the potassium permanganate consumed was calculated the total carbon viz. total humus content.

Since humus substances are parts of soil organic matters, the quantity of humus substances which were estimated by means of the alkali extraction method was presumed, in this case, the total humus content in soils.

In the next place the quantity of easily oxidizable organic matters, which are oxidized by a weak concentration of potassium permanganate solutions, were estimated. That is, to the mixture of a given volume of the suspension of samples and a slight amount of sulfuric acid was added the 0.2 N potassium permanganate solution in an amount equal to that actually consumed in oxidizing the total humus substance in the above experiment. The volume of the whole solution was previously regulated in order to keep the ratio between the added permanganate solution and the whole solution to 1 : 30, because the oxidizing power of the potassium permanganate solution is affected by its percentage and quantity in a mixture.

The oxidability of humus materials was compared on the basis of the quantity of the easily oxidizable humus substance which was oxidized by the diluted permanganate solution as above. Accordingly, it means that the higher the value of the oxidability, the more

oxidizable the material. This value has no absolute meaning, but is applicable to this experiment.

The results obtained are shown in table 143.

TABLE 143.
Oxidability of various humus materials

Materials	Oxidability
Merck's humic acid.	74.2
Humic acid, from D. 367	74.8
Al-humate	72.6
Fe-humate	72.6
Al-"silico-humate"	71.8
Fe-"silico-humate"	72.2
Soils	
Igneous origin	
D. 367	54.5
D. 368	56.4
D. 370	66.6
D. 371	63.3
D. 372	68.5
Sedimentary origin	
D. 90	60.4
D. 147	69.8
D. 224	47.3
D. 374	63.7
D. 376	53.3
D. 377	55.7
Clay slate	22.6

The oxidability of the free humic acid showed the highest value, 74.5. The aluminum or ferric humate, and aluminum or ferric "silico-humate" showed a comparatively low oxidability with a value of 72.0 to 72.6. In the soils, however, oxidability was considerably lower than in the others, and the mean value was only 60.2.

It was therefore seen that among the free humic acid the various humates and the soils there is a perceptible difference in oxidability. The resistance against a given oxidizing power was lowest in the free humic acid, a little higher in the various humates, and in the natural soils highest. Such a difference in oxidability depends on

the form of humus substances. The more complicated their form, the less their oxidability.

The oxidability of organic matters in the clay slate which was examined for the purpose of reference was noticeably lower.

That is, the fact that these humates showed less oxidability than the free humic acid depends upon their humus substance combining with other components. On the other hand, the lowest oxidability of the humus substance in soils also depends upon its complex form. It is therefore assumed that humus substances in soils, at least a part of it, exist in the form of humates with other components, as well as in the form of the aluminum or ferric humate, and the aluminum or ferric "silico-humate".

Although there was no noticeable difference in the oxidability between soils of igneous and sedimentary origin, the former had a little higher oxidability than the latter. The general conclusion for this, however, must be determined by testing other soils.

B. Summary

From the point of view that the resistance of humus materials to the oxidizing agent is changed by the difference of their form when other conditions are given, various humus materials were oxidized by a given concentration of potassium permanganate solution in order to examine the form of these humus substances.

The following humus materials were employed in this experiment.

1. Humic acids (Merck's, and separated from humus soils).
2. Aluminum or ferric humate.
3. Aluminum or ferric "silico-humate".
4. 12 kinds of soils.

The oxidability of humic acids was highest of all, while that of aluminum or ferric humates, and aluminum or ferric "silico-humates" was just a little lower. The oxidability of humus substances in soils was lowest.

From these results it can be seen that free humic acids are less

resistant against the oxidizing agent, while humates and humus soils show a higher resistance. The fact that these humates showed a little higher resistance against the oxidizing agent than did free humic acids perhaps depends on humus substances combining with other components. The highest resistance of humus substances in soils also perhaps depends upon their complex form. It is therefore assumed that these humus substances, at least a part of them, exist in the form of humates with other components, as well as in the form of the aluminum or ferric humate, and aluminum or ferric "silico-humate".

XII. X-RAY INVESTIGATIONS ON THE FORM OF HUMUS SUBSTANCES

A. Experimental

The nature and chemical constitution of humus, which is continually decomposing in soils, are not constant, whereas those of humic acids, which are a main component of the soil humus, are comparatively constant, a number of chemical formulae for humic acids have already been proposed by many investigations, although none are yet determinate. According to FUCHS²²⁾, for example, the chemical formula of humic acids is as follows:



The chemically reactive side group of the above formula has been studied rather widely, and while the structure of the main group is less studied, FISCHER¹⁷⁾ and FUCHS²¹⁾ have shown that it has a cyclic structure. According to FUCHS' later study the main group of humic acids is a condensated ring system, i.e., a polymerized lignin nucleus which consists of pyren nucleus. Since the organic chemical method of examining the structure of such a highly polymerized substance is not satisfactory, the x-ray investigation has recently been applied to the problem.

The old idea concerning the form of humus substances had

shown that they are in an amorphous state, but it was recently discovered that they have a crystal structure as well as cellulose and other similar substances, because they showed certain diffraction patterns when radiated by monochromatic x-rays.

Since the diffraction pattern is modified by the difference of the arrangement of atoms and molecules in the crystal unit, the pattern is characteristic to the substance. If the atomic arrangement of humus substances which show a characteristic diffraction pattern is changed by combining with other substances, the patterns of the new combination must differ from that of the original to some extent. It was from this point of view that the x-ray investigation was conducted.

The investigation was carried out by the DEBYE-SCHERRER's method⁹⁾. The x-ray tube which was applied in the apparatus was the water-cooled Coolidge tube with a copper anticathode that produces x-rays with wave length of 1.549 \AA ⁽²⁵⁾. The Debye-Scherrer camera produced by the Chemical and Physical Institute of Japan was used.

Each sample of humus substances was powdered in a 200-mesh (about 0.12 mm) sieve, or a smaller one, after the CLARK's description⁹⁾, and placed in a fine capillary tube of glass, then was exposed to x-rays at about 30,000 volts and at 5 milliamperes for 5 hours.

First of all, Merck's humic acid was examined by x-rays. It showed a characteristic diffraction pattern. Merck's humic acid is not therefore amorphous, but is a certain crystalline structure. Its pattern, however, was so indistinct that the details could not be examined. In general, inorganic crystals easily show their clear patterns, but substances such as cellulose and humus substances, give a comparatively wide and indistinct line. In diffraction patterns of Merck's humic acid were observed two lines, and their respective angles of diffraction were about $7^{\circ} 90'$ and $21^{\circ} 50'$. SEDLETZKY and BRUNOWSKY⁵⁷⁾, and SEDLETZKY⁽⁵³⁾ observed three lines in natural humic acids from soils in the U.S.S.R., and the following angles were calculated: $7^{\circ} 59'$, $12^{\circ} 59'$ and $21^{\circ} 46'$. But they have said that

since their patterns were also indistinct, the angles of diffraction might have been calculated somewhat inaccurately.

The angles of diffraction represented by the two lines of Merck's humic acid in this experiment were almost identical with two of the three angles calculated in SEDLETZKY's experiment with natural humic acids. However, the line whose angle showed a value of $12^{\circ} 59'$ in their experiment could not be observed in this case.

In the next place humic acids separated from humus soils in Taiwan was examined, consequently, its diffraction patterns were identical with that of Merck's humic acid.

Then the aluminum or ferric humate which was prepared isoelectrically from aluminum or ferric chloride and Na-humate solution was applied in order to examine the diffraction patterns. Their patterns were similar to that of humic acids, that is, the position and intensities of the two lines in the diffraction photograph were similar to those of the humic acids. Even though the aluminum or ferric humate is a chemical product between humic acids and aluminum or ferric salts as shown in the preceding chapters and the MATTSON's experiment, it produced patterns similar to that of the humic acid. From this fact, therefore, it can be assumed that the aluminum or iron which entered into a position of the chemically reactive side group of the humic acid is in comparatively loose combination with the main group of the acid, so that the crystal structure of the acid did not change. Moreover, the pattern which was exposed five times as long as the above case was examined. But the diffraction pattern was same as the above and nothing of new line being due to these metals was observed. Consequently the result proves the reliability of the above assumption.

The result of the x-ray study of Japanese acid clay by ISOBE²⁹⁾, namely, that the exchangeable Na in this clay does not affect its crystal structure, may give some explanation of the result obtained in the experiment.

Further, the aluminum or ferric "silico-humate" which was prepared isoelectrically from aluminum or ferric chloride, sodium

silicate and Na-humate solution, was used for the examination of the x-ray spectrum. These samples were sufficiently purified, dried and powdered finely as above described. The x-ray irradiation was made in different durations, i. e., for 5 and 25 hours. The diffraction photographs obtained were not different from those of the aluminum or ferric humate and the humic acid, that is, the position and intensities of the two lines in the patterns were identical. Since it has been proved in the preceding chapters that these "silico-humates" are chemical products among their constituents, the fact that the patterns of these "silico-humates" did not differ from that of the humic acid shows the possibility that the constituents in the "silico-humates", as well as those in the aluminum or ferric humate, exist in comparatively loose combination with the humic acid without changing the crystal structure of the acid.

B. Summary

The combining form of various humus substances was examined by means of the x-ray investigation.

Crystalline substances show diffraction patterns by the irradiation of x-rays, while non-crystalline substances, i. e., amorphous substances, show none. Since the position, number, and intensity of diffraction lines were changed by the difference in the crystal structure, the form of any substance can be examined by its diffraction pattern.

Samples employed were Merck's humic acid, humic acids separated from humus soils, and aluminum or ferric humates, and aluminum or ferric "silico-humates", which were prepared isoelectrically. These samples were examined by means of the DEBYE-SCHERRER's method at 30,000 volts and 5 milliamperes. The x-ray tube used was the water-cooled Coolidge tube with copper anticathode.

These humic acids showed identical patterns, that is, each showed two wide and comparatively indistinct diffraction lines. The two angles of diffraction were about $7^{\circ} 90'$ and $21^{\circ} 50'$. Accordingly it was found that these humic acids are in a certain crystalline structure.

In the next place the aluminum or ferric humate was examined under the same condition or the prolonged exposurement. The DEBYE-SCHERRER spectrum of these humates was identical with those of the humic acids in the position, number, and intensity of the diffraction lines. Consequently, it was assumed, that although these humates were formed by the mutual chemical action between aluminum or iron and humic acids, the aluminum and iron exist in comparatively loose combination with the humic acid without changing the crystal structure of the acid.

Then the aluminum or ferric "silico-humate" was applied. Their diffraction patterns likewise did not differ from that of the humic acid. It was therefore assumed that the constituents in these "silico-humates", as well as those in the aluminum or ferric humate, exist in comparatively loose combination with the humic acid without changing the crystal structure of the acid.

XIII. SUMMARY AND CONCLUSION

There are not a small number of investigations concerning the conditions of the formation of so called "Humus-clay complexes" which play the most important roles in soils, and their form. But this problem has not yet solved itself.

The present paper has dealt with the experiment on the form of humus-clay complexes and the conditions of their formation, with special reference to determining whether humus substances in humus-clay complexes are in a state of mechanical mixtures with other constituents, or in combinations with other constituents of soils.

In the first place, the investigation was conducted on the conditions of the formation of humus-clay complexes using humic acids, silicates and aluminum or ferric salts, because the principal composition of mineral soil particles consists of silicon and aluminum or iron. The sample of silicon, iron and aluminum was applied in the form of Na_2SiO_3 , $\text{FeCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ and $\text{AlCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ respectively, and Merck's humic acid was used as a sample of humus substances. The solutions

of these samples were mixed with each other under definite conditions by means of a method similar to that of MATTSON's experiment⁽³⁹⁾. The main results obtained are briefly summarized as follows: Aluminum or ferric "silico-humates" obtained from mixtures of the aluminum or ferric salt, silicate and humus substances, were always flocculated isoelectrically at a certain hydrogen-ion concentration of mixtures. Beyond this isoelectric point, at still lower or higher pH values, the flocculation of the humates was gradually prevented with change of pH values of mixtures, and the dispersity also increased with moving of pH of mixtures from the isoelectric pH, and finally a molecular high dispersion was occurred.

The isoelectric point of the humates was not modified by the difference of the order of the mutual mixing of their constituents, whereas it was strongly affected by the concentration of their constituents, and acidoid-amphoteloid ratios of mixtures. The higher the ratio the lower was the isoelectric pH. Even if, however, the acidoid-amphoteloid ratio was constant, the isoelectric pH was modified by the concentration of these constituents, that is, an increase in concentration lowered the isoelectric pH whereas a decrease in concentration showed the opposite effect.

There were usually two isoelectric points in these mixtures with the exception of some ferric system with low humus-sesquioxide ratios. In the case of aluminum "silico-humates" having the acidoid-amphoteloid ratios which were employed in this experiment, the first isoelectric point lay between pH 4.0 and 6.4, and the second point lay at pH of 3.5 to 3.7, according to the difference of acidoid-amphoteloid ratios. While in ferric "silico-humates" the first point lay between pH 3.0 and 5.8, and the second point lay at pH 1.6 to 1.7.

There was a point of the electropositive maximum between the first and second isoelectric point. Since at the point where the dispersity of mixtures reached the maximum, the flocculating of humates was prevented, and in extreme case nothing of flocculates was formed because of the molecular high dispersion of mixtures. The maximum dispersity of mixtures was influenced by their acidoid-

amphoteloid ratios, that is, the higher the ratios the lower was the maximum dispersity of mixtures. Accordingly, a decrease in concentration of acidoids made the narrow pH zone of flocculation of humates.

The electric conductivity of mixtures was most strongly lowered at the isoelectric point, causing the most favorable mutual combination of constituents at this point.

The quantity of the elements combined with humates at different hydrogen-ion concentrations was directly proportional to the amount of humates formed. At the isoelectric point the total quantity of humus, aluminum or iron in mixtures entered into combination with humates, at any concentration and any mutual ratio of these elements. However silicon was not so favorably combined with humates, only about 20 to 70 per cent of the total silicon entering into combination, according to the concentration of the total silicon. It is due to the fact that the interaction between humus and aluminum or iron is stronger than that between silicon and aluminum or iron, and that the silicon is strongly displaced by humus, causing the easy dissociation of the silicate-ion in comparison with the humate-ion.

The isoelectric point of ferric "silico-humates" was always lower than that of aluminum "silico-humates" having the same constitution ratio as the former, because iron is an ampholyte which is stronger as a base than aluminum.

The nature of these humates which consist of these constituents was different from that of the original constituent.

In the next chapter this paper dealt with the experiment on the relation between coagulation of free humic acids and hydrogen-ion concentrations, and on the mutual action between suspensions of aluminum or ferric hydroxide and solutions of Na-humate, and further on the action between soil colloidal suspensions and Na-humate solutions.

Na-humate solutions with various concentrations decreased gradually their stability with additional increase of hydrogen-ion concentrations and finally sudden coagulation occurred near the pH of 2.4.

The flocculation which took place by mixing of Na-humate solutions and suspensions of aluminum or ferric hydroxide was isoelectrical and therefore near the isoelectric point was produced the most favorable flocculation. The isoelectric point was moved to lower pH with increase of humus-hydroxide ratios. In the ferric system, the $\frac{\text{Humus (g)}}{1 \text{ m. mol L Fe (OH)}_3}$ ratio of which was varied from 12.5 to 500, the isoelectric point was found between pH 2.9 and 2.0. While in the aluminum system the $\frac{\text{Humus (g)}}{1 \text{ m. mol/L Al OH}}$ ratio of which was varied from 12.5 to 250, the point was found between pH 7.9 and 6.5. It is therefore suggested that in the suspended state of aluminum and iron also, as well as in their dissolved state, the ionic interaction took place between hydroxides and humus substances.

Soil colloidal suspensions gradually carried down humus substances with increase of hydrogen-ion concentrations of mixtures, and finally near the isoelectric pH, i. e., below about pH 3, took place the sudden flocculation of humus substances with soil particles.

The fact that the isoelectric relation was shown in the various system above, and that the new product differed in its nature from the original substances, indicates the participation of some chemical action in mixtures of these substances.

The sixth chapter told of the experiment for successive extractions of humus substances from various humates and soils at various hydrogen-ion concentrations, in order to examine the form of humus substances in the humates and soils.

The solubility of humus substances in a certain solvent were modified by the difference of the form of humus substances in samples. Free humic acids showed the highest solubility at a definite pH, while in humates and soils was found a far lower solubility, which was not so different one another between them.

From the facts, that free humus substances were more easily soluble at any pH value than humus substances which are in combination with other components, and that the solubility between the humates and soils showed a no marked difference, it was concluded that humus substances in soils, as well as in the humates prepared

isoelectrically, are not only present in a free state but also exist in a less soluble state which combines with others.

The seventh chapter treated of successive extractions of iron and aluminum from their various humates at various hydrogen-ion concentrations, with a view toward examining their form. The solubility of iron and aluminum in aluminum or ferric "silico-humates" was considerably lower than that of their hydroxides, and showed a value nearly similar to that of humates of iron and aluminum. From these results it was therefore given some certainty to the assumption that aluminum and iron in aluminum or ferric "silico-humates" exist not independently of the other constituents but may combine in a state almost similar to aluminum or ferric humates whose constituents have interacted chemically with each other.

The eighth chapter dealt with the conductmetric experiment on the reaction of humus substances on other substances in a system. When two substances, i. e., A and B, in a system show neither chemical nor physical interaction between them, the conductivity of the system will be in agreement with the sum of the individual conductivity. If only a mechanical adsorption takes place between these two substances, the conductivity will become to some extent lower than the sum of the individuals. In case that some chemical action takes place between them, the conductivity will become either higher or lower than the sum of the individuals according to the nature of the products.

From this point of view, the electric conductivity of several mixtures of any two substances whose mutual proportion was previously varied was determined and thereby examined the action between two substances. As a result, in mixtures of humic acid suspension + NH_4OH solution, humic acid suspension + NaOH solution, humic acid suspension + Na_2SiO_3 solution, Na-humate solution + AlCl_3 solution, Na-humate solution + FeCl_3 solution, Na_2SiO_3 solution + AlCl_3 solution, Na_2SiO_3 solution + FeCl_3 solution, (Na_2SiO_3 + Na-humate) solution + AlCl_3 solution, (Na_2SiO_3 + Na-humate) solution + FeCl_3 solution, a remarkable chemical interaction was found. In mixtures of humic

acid suspension + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension, humic acid suspension + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension, Na-humate solution + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension, Na-humate solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension, Na_2SiO_3 solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension, Na_2SiO_3 solution + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension, (Na_2SiO_3 + Na-humate) solution + $\text{Al}(\text{OH})_3$ suspension, (Na_2SiO_3 + Na-humate) solution + $\text{Fe}(\text{OH})_3$ suspension, and H-clay suspension + Na-humate solution, a chemical interaction was also observed, but to far less extent than in the former group. There was, however, no chemical action in the mixture of silicate and humate of soda. It can be concluded that humus substances interact chemically more or less with basoid substances which are in both free and combined states.

Since the dissociation of ammonium hydroxides is comparatively low, its conductivity was therefore lower than that of other ammonium salts at the same normality, in spite of the large mobility of the hydroxyl-ion of ammonium hydroxides. Accordingly by mixing ammonium hydroxides with humic acid suspensions, the conductivity of the mixture becomes higher than the sum of each original conductivity. Moreover, such high conductivity depending upon ammonium humates produced is modified by the duration of the contact of humus substances with ammonia. These phenomena are affected by the strength of interaction between them. In the ninth chapter, therefore, on the basis of this standpoint the conductmetric investigation concerning the form of humus substances in the humates and soils was conducted. The increase of the conductivity of humus substances which took place by mixing with ammonia was variable with their form. The highest increase was shown by free humic acids and mixtures with other substances, while the lowest was shown by natural soils. The increase of various humates was nearer to that of soils, although the increase of the former was therefore concluded that a large part of humus substances in natural soils is probably in the combined state with other components, as well as the humates which were formed isoelectrically.

The tenth chapter treats of the electrodialysis experiment with various artificial humates and humus soils in order to examine the

form of humus substances in soils. It has been observed by a few workers that in electrodialyzing of humus soils a part of the metallic ions like aluminum and iron in soils removed to the anode, and a part of organic matters was transported to the cathode compartment. Although various reasoning for this has been considered, recently WILSON and STAKER reported that this may depend on the presence of complex organic ions. In the present experiment the following various substances were electrodialyzed, namely, suspensions of ferric or aluminum hydroxides, humic acids, ferric humates, aluminum humates, ferric "silico-humates", aluminum "silico-humates" and humus soils. The dialyzed metallic ions from aluminum and ferric hydroxides were found only in the cathode solution, and organic matters of free humic acid suspensions removed only to the anode during the electrodialysis. On the contrary, in the case of various humates and soils, all of their dialyzed organic matters, aluminum, iron and silicon were always found more or less in both electrode solutions. It was assumed accordingly that organic matters in the cathode solution went over to the cathode as a part of a complex organic cation with metallic ions, and that aluminum and iron in the anode solution removed to the anode as parts of complex organic ions electronegatively charge, and that silicon which is found at the cathode is also a part of a complex organic ion.

Since aluminum or ferric "silico-humates" showed behavior similar to that of aluminum or ferric humates which were formed by chemical interactions, the former, at least a part of it, seems to be in chemical combinations. Moreover, since the behavior of soils during electrodialysis was also similar to the above humates, a part of organic matters in soils should therefore exist in the form of a chemical combination with other components.

From the point of view that the resistance of humus substances to the oxidizing agent is changed by the difference of their form, the oxidability of various humus materials was determined by use of a potassium permanganate solution in order to examine the form of these humus substances. The oxidability of various humus materials

was compared by using the percentage of the easily oxidizable humus substance in the totals. Their oxidability was not identical, that is, the oxidability of humic acids was highest of all, and that of aluminum or ferric humates and aluminum or ferric "silico-humates" was a little lower than that of humic acids, while the oxidability of humus substances in soils was noticeably lower.

It was therefore found that free humic acids is less resistant to the oxidizing agent, while humates and humus soils show a higher resistance. The lower oxidability of humus substances of humates and soils in comparison with that of free humic acids probably depended on the complication of the form of humus substances in the former. It was therefore assumed that humus substances in soils, at least a part of it, exists probably in the form of humates with other components, as well as humus substances in aluminum or ferric humates and aluminum or ferric "silico-humates".

In the last experiment various humates were applied for the x-ray investigation in order to examine their combining form. As samples Merck's humic acid, humic acids separated from humus soils, aluminum or ferric humates, and aluminum or ferric "silico-humates" which formed isoelectrically were used. These samples were examined by means of DEBYE-SCHERRER's method at 30,000 volts and 5 milliamperes using the water-cooled Coolidge tube with copper anticathode.

Free humic acids showed identical patterns, that is, each showed two wide and comparatively indistinct diffraction lines, and these two angles of diffraction were about $7^{\circ} 90'$ and $21^{\circ} 50'$. It was therefore found that these humic acids are in a certain crystalline structure. The DEBYE-SCHERRER spectrum of aluminum or ferric humates was identical with those of the humic acids in the position, number, and intensity of the diffraction lines. It was found consequently that although these humates were formed by the mutual chemical action between aluminum or iron and humic acids, the aluminum and iron exist in comparatively loose combination with humic acids without changing the crystal structure of the acids.

The patterns of aluminum or ferric "silico-humates" likewise did not differ from those of the aluminum or ferric humates. Consequently the constituents of these humates should exist together in similar combination to that of the aluminum or ferric humates. Since it has been ascertained in the previous chapters that the binding form of humus substances in soils resembles that of the humates which were prepared isoelectrically, a part of humus substances in soils also exist in comparatively loose combination with other constituents of soils, as well as in the case of the above various humates, without changing the crystal structure of humus substances.

In short, the so called "Humus-clay complexes" are not mechanical mixtures of humus substances with other constituents of soils, but they are a chemical compound which has a binding form similar to that of aluminum or ferric humates and aluminum or ferric "silico-humates" whose formation was isoelectrical, and aluminum and iron in humus-clay complexes exist in comparatively loose combination with humic acids, without changing the crystal form of the acid.

LITERATURE

- (1) ANTIPOV-KARATAEV, I. N. and I. A. KHAINSKII: Chem. Abstract, **30**, 5341 (1936).
- (2) ANTIPOV-KARATAEV, I. N. and B. K. BRUNOWSKY: Koll. Zeitsch., **75**, 325 (1936)
- (3) BAUMANN, A. and E. GULLY: Mitteil. Bayer. Moorkulturanst., **4**, 31 (1910).
- (4) BERZELIUS, J. J.: Larobok i organiska kemien, **2**, 1122 (1828).
- (5) BERZELIUS, J. J.: Lehrbuch der Chemie, 3 Aufl., (1839).
- (6) BILTZ, W.: Ber. Deut. Ch. Ges., **37**, 1095 (1904).
- (7) BILLITER, J.: Zeitsch. Physik. Ch., **51**, 150 (1905).
- (8) CAMERON, F. K.: The Soil Solution, (1911).
- (9) CLARK, G. L.: Applied x-rays, New York and London, (1932).
- (10) DEBYE, P. and E. HUCKEL: Phys. Zeitsch., **24**, 185 (1923).
- (11) DEBYE, P. and L. PAULING: Jour. Am. Ch. Soc., **47**, 2129 (1925).
- (12) DEMOLON, A. and G. BARBIER: Compt. Rend., **188**, 654 (1929).
- (13) DETMER, W.: Landw. Versuchsst., **14**, 248 (1871).
- (14) EGGERTZ, C. G.: Diss., Lund, (1888).
- (15) EHRENBURG, P. and BAHR: Jour. Landwirtschaft, **61**, 427 (1913).
- (16) FICKENDEY, E.: Jour. Landwirtschaft, **54**, 343 (1906).
- (17) FISCHER, FR.: Abh. Kohle, **6**, 277 (1923).
- (18) FREUNDLICH, H. and A. NATHANSOHN: Koll. Zeitsch., **28**, 258 (1921).
- (19) FREUNDLICH, H. and F. MOOR: Koll. Zeitsch., **36**, 17 (1925).

- (20) FREUNDLICH, H. and A. NATHANSOHN: Koll. Zeitsch., **29**, 16 (1931).
- (21) FUCHS, W.: Brennstoff Chem., **9**, 178 (1928).
- (22) FUCHS, W.: Die Chemie der Kohle, (1931).
- (23) GRAHAM, TH.: Liebig's Ann. Ch., **121**, 45 (1862).
- (24) HANTZSCH, A.: Ber. Deut. Ch. Ges., **32**, 575, 3065 (1899 ; **35**, 226 (1902).
- (25) HEDVALL, J. A.: Zeitsch. Anorg. Ch., **21**, 327 (1921).
- (26) HENDRICKS, S. B. and W. H. FRY: Soil Sci., **29**, 457 (1930).
- (27) HERMANN, R.: Jour. Prakt. Ch., **22**, 65; **23**, 375; **25**, 189 (1842).
- (28) HOPPE-SEYLER, F.: Hoppe-Seyler's Zeitsch. Physiol. Ch., **13**, 66 (1889).
- (29) ISOBE, H.: Bull. Phys. and Ch. Inst., Japan, (Japanese) **12**, 446 (1933).
- (30) KAWAMURA, K.: Jour. Phys. Ch., **30**, 1354 (1926).
- (31) KAWAMURA, K.: Recent Soil Colloid Chemistry, (Japanese), Tokyo, (1934).
- (32) KAWAMURA, K. and Y. SAITO: Bull. of the Alumni Assoc., Utsunomiya Agric. College, (Japanese), **1**, 87 (1934).
- (33) KAWAMURA, K. and S. FUNABIKI: Jour. Sci. of Soil and Manure, Japan, (Japanese), **10**, 381 (1936).
- (34) KELLEY, W. P., DORE, W. H. and S. M. BROWN: Soil Sci., **31**, 25 (1931).
- (35) LÖDDESÖL, A.: Soil Sci., **33**, 375 (1932).
- (36) MATTSON, S.: Jour. Agric. Res., **33**, 553 (1926).
- (37) MATTSON, S.: Jour. Phys. Ch., **32**, 1532 (1928).
- (38) MATTSON, S.: Soil Sci., **25**, 289 (1928).
- (39) MATTSON, S.: Soil Sci., **30**, 459 (1930).
- (40) MATTSON, S.: Soil Sci., **31**, 57 (1931).
- (41) MATTSON, S.: Soil Sci., **31**, 311 (1931).
- (42) MATTSON, S.: Soil Sci., **33**, 41 (1932).
- (43) MATTSON, S. and I. NILSSON: Lantbrukshogskolans Annaler, **2**, 115 (1935).
- (44) MICHAELIS, L.: Die Wasserstoffionenkonzentration, I, Berlin, (1922).
- (45) MULDER, G. J.: Bull. de Nielande, **1** (1840 ; Jour. Prakt. Ch., **21**, 203, 321 (1840 ; Liebig's Ann. d. Ch. u. Pharm., **36**, 243 (1840).
- (46) ODEN, S.: Ber. Deut. Ch. Ges., **35**, 651 (1912).
- (47) ODEN, S.: Kolloidch. Beihefte, **11**, 75 (1919).
- (48) ODEN, S.: Centralanst. Forsöksvasendet jordbruksomradet Stockholm, Meddel, **318** (1927).
- (49) OSTWALD, WO. and A. STEINER: Kolloidch. Beihefte, **21**, 97 (1925).
- (50) OSTWALD, WO.: Kleines Praktikum der Kolloidchemie, Dresden u. Leipzig, (1930).
- (51) PAGE, H. J.: Jour. Agric. Soc., **20**, 455 (1930).
- (52) PUGH, A. J. and M. S. DU TOIT: Soil Sci., **41**, 417 (1936).
- (53) ROBINSON, G. W.: Soils, New York, (1932).
- (54) ROLLOW, E.: Russ. Jour. f. Landwirtschaft, **T. 15**, 451 (1914).
- (55) SAUER, F. and DORA STEINER: Koll. Zeitsch., **72**, 35 (1935).
- (56) SEDLETZKY, J.: Jubilee Issue in Honor of Vasil Robertovich Williams, 50 Yrs. Pedological, and Social Work (Moscow-Leningrad), 233 (1935).
- (57) SEDLETZKY, J. and BRUNOWSKY B.: Koll. Zeitsch., **73**, 90 (1935).
- (58) SENFT, F.: Die Humus-, Marsch-, Torf- und Limonit-bildungen usw., Leipzig, (1862).
- (59) SESTINI, F.: Landw. Versuchsst., **27**, 163 (1882).
- (60) SETTER, L. R. and MATTSON S.: Indust. Engn. Ch., Indust. Ed., **27**, 94 (1935).
- (61) SCHLÖSING, TH.: Compt. Rend., **78**, 1276 (1874).
- (62) SHIBUYA, K.: Jour. Soc. Trop. Agric., (Japanese), **1**, 86 (1929).

- (63) SHIBUYA, K. and H. SAEKI: Jour. Soc. Trop. Agric., (German), **1**, 120 (1929).
- (64) SHIBUYA, K. and T. TORII: Jour. Sci. Soil and Manure. Japan. (Japanese) **11**, 260 (1937).
- (65) SPRENGEL, C.: Kastner's Arch. f. d. ges. Naturl., **8**, 145 (1826).
- (66) SPRINGER, U.: Zeitsch. Pfl. Dung. Bodenk., A, **23**, 1 (1931).
- (67) SPRINGER, U.: Bodenkdl. Forschungen, **3**, 39 (1932).
- (68) SPRINGER, U.: Zeitsch. Pfl. Dung. Bodenk., **45**, 327 (1936).
- (69) TACKE, BR.: Landw. Jahrbucher, **41**, 717 (1911).
- (70) TAMM, O.: Meddel. Statens Skogsforsoksanst. **17**, 49 (1920).
- (71) THIESSEN, G. and G. J. ENGELDER: Indust. Engn. Ch., **22**, 1132 (1930).
- (72) WAKSMANN, S. A.: Humus, London, (1936).
- (73) WIEGNER, G.: Boden und Bodenbildung, Dresden u. Leipzig. (1926).
- (74) WILSON, B. D. and E. V. STAKER: Trans. Third Intern. Cong. Soil Sci., Oxford **1**, 426 (1935).
- (75) MEYERS, H. E.: Soil Sci., **44**, 331 (1937).
- (76) PURI, A. N. and A. SARUP: Soil Sci., **45**, 165 (1938).

臺北帝國大學理農學部紀要

第二十六卷 第一號

昭和十四年五月

MEMOIRS
OF THE
FACULTY OF SCIENCE
AND
AGRICULTURE
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Vol. XXVI, No. 1-7

MAY, 1939



MATUMURA, Sôzi:

Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXI)



PUBLISHED

BY THE

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

FORMOSA, JAPAN

PUBLICATION COMMITTEE

Professor Tokuichi SHIRAKI, Dean of the Faculty (*ex officio*)

Professor Ichirô HAYASAKA

Professor Tyôzaburo TANAKA

The MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE, Taihoku Imperial University, are published occasionally by the University, which exchanges them with the publications of other learned bodies and institutions throughout the world. Separate series will be sent to individual research institutions, and complete series to the central libraries of universities and larger institutions. Copies of the Memoirs may also be obtained from MARUZEN COMPANY LTD., Tôkyô, Japan, and THE TAIWAN NICHİ-NICHİ SHIMPÔ-SHA, Taihoku, Formosa, Japan.

All communications regarding the Memoirs should be addressed to the Dean of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imperial University, Taihoku, Formosa, Japan.

臺北帝國大學理農學部紀要

第二十六卷

昭和十四年

— — — —

MEMOIRS
OF THE
FACULTY OF SCIENCE
AND
AGRICULTURE
TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY

Volume XXVI.

1939

TAIHOKU IMPERIAL UNIVERSITY
FORMOSA, JAPAN

CONTENTS

	<i>Page.</i>
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXI)... ..	1
MATSUMURA, Sôji:—Über Flächen und Kurven (XXI).	59
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXII).	89
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXIII).	135
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXIV).	179
MATSUMURA, Sôji:—Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXV).	233
MATSUMURA, Sôji:· Beiträçe zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXVI).	289

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXXI)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, April 17, 1939.)

Im folgenden möchten wir einige Bemerkungen über die Theorie der Kreise und Kugeln machen.

1

Hier machen wir einige Anwendungen der Fundamentalgrößen

$$(\theta, \theta_t), (\theta, \theta_-), (\theta_- \theta_t)$$

der Kreisflächen⁽¹⁾ klar.

(A) Ist auf einer Kreisfläche ein orthogonales Parametersystem gegeben, und ist

$$(1) \quad ds^2 = (\theta, \theta_t) dt^2 + d\tau^2$$

das Quadrat des Linienelementes, so sind die Radien der geodatischen Krümmung der Parameterlinien gleich⁽²⁾

$$(2) \quad -1'(\theta, \theta_t) : \partial/\partial\tau \gamma(\theta, \theta_t)$$

bzw.

$$(3) \quad 1'(\theta, \theta_t) : 0.$$

Aus (2) und (3) kann man wissen, dass

$$(4) \quad (\theta, \theta_t) = 0$$

gilt, wenn (3) endlich ist.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXVI, No. 1, May, 1939.]

(1) NAKAZIMA (=MATUMURA), S.: Kugelgeo. von MOBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

(2) CARONNET, TH.: Sur les centres de courbure géodésique, Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris 4^e CXV, p. 589.

(B) Wir betrachten⁽¹⁾

$$(1) \quad ds^2 = 1/\lambda \cdot \{(\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2\}.$$

Wenn

$$(2) \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_t \theta_t) = 1, \quad 1/\lambda = T(t) - T(\tau)$$

in (1) ist, so ist unsere Kreisfläche eine *harmonische* Kreisfläche, denn wir nennen die harmonische Fläche diejenige, deren Linienelement sich in die Form bringen lässt:

$$(3) \quad ds^2 = \{T(t) - T(\tau)\} (dt^2 + d\tau^2),$$

da

$$(4) \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1$$

besteht.

(C) Im folgenden untersuchen wir die Kreisfläche, deren Bogenelement mit

$$(1) \quad ds^2 = (\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2$$

gegeben wird.

Ist u eine vollständige Lösung der Gleichung

$$(2) \quad (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - 2(\theta_t \theta_\tau) \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} + (\theta_t \theta_t) \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)^2 \\ = (\theta_t \theta_t) (\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2,$$

wo $(\theta_t \theta_t)$, $(\theta_t \theta_\tau)$, $(\theta_\tau \theta_\tau)$ die Koeffizienten in dem Ausdrucke des Linienelementes

$$ds^2 = (\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2$$

der vorliegenden Kreisfläche bedeuten, so ist

$$(3) \quad \partial u / \partial a = b,$$

wo a und b Konstanten sind, die allgemeine Gleichung der geodätischen Linien auf der betrachteten Kreisfläche⁽²⁾.

(1) Vgl. NAKAZIMA, a. a. O., S. 35.

(2) ERMAKOFF, W. P.: Über geodätische Linien, Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau, (Russisch) XV, p. 516.

Weiter kann man eine Regelkreisfläche klar machen⁽¹⁾.

(D) Sind t, τ Parameter der Minimallinien,

$$\xi = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}$$

eine isotrope Koordinate und

$$ds = 2\varphi(t, \tau) \sqrt{dt d\tau}, \quad 2\varphi^2(t, \tau) \equiv (\theta, \theta_\tau)$$

das Linienelement einer Kreisfläche, so lautet die BONNETSche Gleichung des Deformationsproblems:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \tau} - \frac{t}{2q} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{r}{2p} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{rt - s^2}{4pq} \cdot \varphi = 0;$$

und hier versteht man unter p, q, \dots, t in üblicher Bezeichnungsweise die partiellen Ableitungen von ξ nach t, τ .

Weiter kann man untersuchen wie in RAFFYS Arbeit⁽²⁾.

(E) Ein Kurvennetz (t, τ) soll als „Gewebe“ bezeichnet werden, wenn das Bogendifferential der beiden von einem Knotenpunkt ausgehenden Fäden einer Masche derselben dem Differential $d\varphi$ gleich ist, also

$$(1) \quad ds^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dt^2 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \cos \alpha dt d\tau + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2 d\tau^2$$

gesetzt werden kann.

Wenn unsere Fläche eine Kreisfläche ist, so folgt aus (1)

$$(2) \quad (\theta_t, \theta_t) : (\theta_t, \theta_\tau) : 1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 : \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} : \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right)^2.$$

Die Kurve $\varphi = \text{const.}$ halbiert das Supplement des Koordinatenwinkels α .

Die Tschebyscheffschen äquidistanten Kurven ergeben sich speziell für $\varphi = T + T'$.

Da φ aus (2) berechnenbar ist⁽³⁾.

- 1) CHINI, M.: Sopra alcune deformazioni delle superficie rigate, Atti della Reale Accademia di Torino, 8° XXVI, p. 20.
- 2) RAFFY, L.: Recherches sur les surfaces isothermiques, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École, Paris (3) 23, p. 387.
- 3) ROTHE, R.: Über die Bekleidung einer Oberfläche mit einem biegsamen un-
ausdehnbaren Netz, Sitzungsber. Berl. Math. Ges. 5, p. 9.

(F)

$$(\theta, \theta_t) dt^2 + (\theta_t, \theta_\tau) d\tau^2 = ds^2, \quad (\theta, \theta_\tau) = 0$$

sei das Quadrat des Linienelements einer Kreisfläche, dann (θ, θ_t) und (θ_t, θ_τ) die Funktionen der Totalkrümmung der Kreisfläche und endlich das Verhältnis $g = \sqrt{(\theta_t, \theta_\tau)} : \sqrt{(\theta, \theta_t)}$ variabel.

Wenn jeder der Ausdrücke

$$dt^2 + g^2 d\tau^2, \quad 1/g^2 \cdot dt^2 + d\tau^2$$

das Quadrat des Linienelements einer Kreisfläche konstanten Krümmungsmasses ist, so ist die gegebene Kreisfläche auf einer Rotationsfläche abwickelbar, ausser wenn

$$g = \varphi(at + b\tau),$$

wo a, b Konstanten sind⁽¹⁾.

(G) Die charakteristischen Kurven sind solche konjugierten Kurven auf positiv gekrümmten Kreisflächen, deren Schnittwinkel ein Minimum ist.

Sie entsprechen somit den Asymptotenlinien auf negativ gekrümmten Kreisflächen.

Die Differentialgleichung dieser Kurven ist⁽²⁾

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \{L[(\theta_t, \theta_\tau)L - (\theta, \theta_t)N] + 2M[(\theta, \theta_t)M - (\theta_t, \theta_\tau)L]\} dt \\ & + 2\{M[(\theta_t, \theta_\tau)L - (\theta, \theta_t)N] + 2N[(\theta_t, \theta_\tau)M - (\theta_t, \theta_\tau)L]\} dtd\tau \\ & - \{N[(\theta_t, \theta_\tau)L - (\theta, \theta_t)N] + 2M[(\theta_t, \theta_\tau)N - (\theta_t, \theta_\tau)M]\} d\tau^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

wo L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung im Sinne gewöhnlicher Differentialgeometrie bedeuten.

Nun setzen wir (1) in der folgenden Form an;

$$(2) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2B(t, \tau) dtd\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0,$$

so ist (2) dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

-
- (1) PELLET, A.: Sur les surfaces applicables sur une surface de révolution, Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 125, p. 159.
 (2) LILIENTHAL, R.: Zur Theorie der aquidistanten Kurven auf einer Fläche, Math. Ann. 62, S. 539.

$$(3) \quad (\theta_i \theta_i) C - 2(\theta_i \theta_\tau) B + (\theta_\tau \theta_\tau) A = 0$$

gilt.

Wenn

$$(4) \quad A : B : C = (\theta_i \theta_i) : (\theta_i \theta_\tau) : (\theta_\tau \theta_\tau)$$

gültig ist, so ist (2) die Minimallinien.

Wenn

$$(5) \quad A : B : C = L : M : N$$

gilt, so ist (2) die Haupttangentenkurven.

(H) WEINGARTEN hat bekanntlich eine aus den Minimalflächen durch Quadraturen bestimmbare Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen vom Linienelementquadrat

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + 2v du dv + 2u dv^2$$

angegeben.

Wenn unsere abwickelbaren Flächen Kreisflächen sind, so wird (1) mit

$$(2) \quad ds^2 = 2\tau dt^2 + 2t dt d\tau + d\tau^2$$

gegeben, wo

$$(\theta_i \theta_i) = 2\tau, \quad (\theta_i \theta_\tau) = t, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1.$$

Aus (1) kann man beweisen die ähnlicher Sätze in (K).

Nun betrachten wir (2); so folgen die folgenden **Sätze**.

(1) *Sind k_1 und k_2 die beiden Hauptkrümmungen, so ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kreisfläche Kanal-kreisfläche sei⁽¹⁾:*

$$2k_1 + k_2 + (\partial k_2 / \partial t + k_1 \cdot \partial k_2 / \partial \tau)(t + k_1) = 0.$$

(2) *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Parameterkurven Minimallinien sind, ist die, dass die Gleichung*

(1) HOPPE, R.: Bedingung einer Kanalfläche nebst einigen Bemerkungen an Kanalflächen, Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten gegründet von J. A. GRUNERT, Fortgesetzt von R. HOPPE, Leipzig C. A. KOCH, 8°, LXX, (2) I, S. 280.

$$\tau = 0$$

identisch für alle Wertepaare t, τ erfüllt sind.

(3) Die Tangenten der beiden Parameterlinien in einem Flächenpunkte (t, τ) sind nicht Minimalgeraden.

(4) Die Bogenelemente der Kurven (τ) und (t) wollen wir mit $d_s s$ und $d_\tau s$ bezeichnen, so entsteht

$$d_s s = \sqrt{2\tau} dt, \quad d_\tau s = d\tau,$$

(5) Wenn

$$t = \text{const.}, \quad \tau = \text{const.}$$

aufeinander senkrecht sind, so folgt

$$t = 0.$$

(6) Ein Kurvennetz

$$A(t, \tau) dt^2 + 2B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf einer Kreisfläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$2\tau C - 2tB + A = 0$$

gilt.

(7) Definiert die Differentialgleichung

$$d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf einer Kreisfläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{2(\tau + t\lambda)}{2t + \lambda}.$$

(8) Die Parameterlinien einer Kreisfläche bilden ein Kurvennetz ohne Umwege, wenn

$$\frac{\partial \sqrt{2\tau}}{\partial \tau} = 0.$$

(9) Damit sich die Parameterlinien (t) und (τ) einer Kreisfläche so anordnen lassen, dass sie ein Netz von unendlich kleinen Quadraten bilden, ist notwendig und hinreichend, dass

$$t = 0, \quad 2\alpha^2(t)\tau - \beta^2(\tau) = 0$$

gelten.

Hierin bedeutet α eine von Null verschiedene Funktion von t allein und β eine von Null verschiedene Funktion von τ allein.

(10) \mathfrak{K} und $\bar{\mathfrak{K}}$ seien zwei konvexe Kreisflächen, deren Punkte eindeutig durch parallele und gleichgerichtete Kreisflächennormalen einander zugeordnet sein.

Für jede Wahl von gemeinsamen Kreisflächenparametern seien

$$\tau = \bar{\tau}, \quad t = \bar{t}.$$

Dann sind die beiden Kreisflächen bis auf eine Translation miteinander identisch⁽¹⁾.

u. s. w.

(I) Wird ein Netz von Occhipintis Kurven als Koordinatennetz auf einer Kreisfläche gewählt, so ist notwendig und hinreichend zwischen den sechs Fundamentalgrößen die Relation⁽²⁾ gültig:

$$(1) \quad (\theta_t \theta_\tau) (\theta_t \theta_\tau) L - 2 (\theta_t \theta_t) (\theta_\tau \theta_\tau) M + (\theta_t \theta_t) (\theta_t \theta_\tau) N = 0,$$

wo L , M , N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung im Sinne gewöhnlicher Differentialgeometrie sind.

Wenn

$$M = 0$$

gilt, so folgt aus (1)

$$(2) \quad (\theta_t \theta_\tau) (\theta_t \theta_\tau) L + (\theta_t \theta_t) (\theta_t \theta_\tau) N = 0.$$

(J) Wird das Quadrat des Linienelementes einer krummen Oberkreisfläche auf die Form gebracht:

$$(1) \quad ds^2 = 1/\lambda \cdot \{ (\theta_t \theta_t) dt^2 + 2 (\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 \} \\ = d\theta^2 + \sigma^2 d\eta^2,$$

(1) NAKAZIMA = MATUMURA, S.: Über die ersten Fundamentalgrößen bei Eiflächen, Jap. Journ. of Math. (1927), S. 101.

(2) OCCHIPINTI, R.: Linee isocline rispetto alle bisettrici delle linee di curvatura, Palermo Rend. 36, p. 29.

wo $\eta = \text{const.}$ geodätische Linien darstellt und θ den Bogen derselben bezeichnet so handelt es sich darum, aus der Gleichung (1) die Differentialgleichung der geodätischen Linien herzuleiten.

Dies ist von DARBOUX im dritten Bande (S. 25) seiner „*Leçons sur la théorie générale des surfaces*“ ausgeführt.

(K) Man kann das Linienelement einer Spiralkreisfläche mit parallelen Linien gleicher Krümmung in die Form bringen⁽¹⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} ds^2 = d\tau^2 + F(\tau/t) dt^2, & (\theta_\tau \theta_\tau) = 1, \\ (\theta_i \theta_i) = F(\tau/t), & (\theta_i \theta_\tau) = 0. \end{cases}$$

Sind die Kreisflächen auf Umdrehungsflächen abwickelbar, so wird

$$(2) \quad \begin{cases} ds^2 = d\tau^2 + \tau^n/t^n \cdot dt^2, & (\theta_\tau \theta_\tau) = 1, \\ (\theta_i \theta_i) = \tau^n/t^n, & (\theta_i \theta_\tau) = 0. \end{cases}$$

Aus (1) kann man die folgenden Sätze beweisen.

(A) Die Minimallinien auf unserer Kreisfläche sind

$$d\tau^2 + F(\tau/t) dt^2 = 0.$$

(B) Ein Kurvennetz

$$A(t, \tau) dt^2 + 2B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf unserer Kreisfläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$F(\tau/t)C + A = 0$$

gilt.

(C) Definiert die Differentialgleichung

$$d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf unserer Kreisfläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

(1) RAFY, L.: Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes de gale courbure parallèles, Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires, Paris, 8^e, XX, p. 22.

$$\frac{d\tau}{dt} = - \frac{F(\tau/t)}{\lambda}.$$

(D) Die Parameterlinien unserer Kreisfläche bilden dann und nur dann ein Kurvennetz ohne Umwege, wenn

$$\frac{\partial \sqrt{F(\tau/t)}}{\partial \tau} = 0$$

gilt.

(E) Aus

$$F(\tau/t) dt^2 + d\tau^2 = 0$$

ergibt sich

$$\begin{cases} \sqrt{F(\tau/t)} dt + 2 d\tau = 0, \\ \sqrt{F(\tau/t)} dt - 2 d\tau = 0. \end{cases}$$

(F) Die Bogenelemente der Kurven (τ) und (t) wollen wir d_s und d_{τ} s bezeichnen, so entsteht

$$d_s = \sqrt{F(\tau/t)} dt, \quad d_{\tau}s = d\tau.$$

(G) Handelt es sich um den Inhalt der Kreisfläche, so hat man das Integral zu berechnen mit

$$J = \int D dt d\tau,$$

wo

$$D^2 = F(\tau/t)$$

gilt. u. s. w..

Das gleiche gilt von (2).

(L) WEINGARTEN⁽¹⁾ betrachtete die Fläche, deren Linienelement durch die Gleichung

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + (u + uv) dv^2$$

gegeben ist.

Wenn unsere Fläche eine Kreisfläche ist, so folgt aus (1)

(1) WEINGARTEN, J.: Sur la théorie des surfaces applicables, Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 4^e, CXII, p. 607.

$$(2) \quad ds^2 = d\tau^2 + (\tau + \alpha t) dt^2.$$

Aus (1) und (2) kann man die ähnlichen Sätze wie in (K) beweisen.

(M) Nehmen wir unsre geodätische Linie auf unsre Kreisfläche als Kurve $\tau = 0$ eines rechtwinkligen Netzes von Parameterlinien, während wir als Kurven $t = \text{konst.}$ die Kurve $\tau = 0$ senkrecht schneidenden geodätischen Linien wählen, dann bekommen wir das Gauszsche Bogenelement

$$(1) \quad ds^2 = A^2 dt^2 + d\tau^2, \quad A^2 = (\theta_t \theta_t), \quad (\theta_t \theta_\tau) = 0$$

mit

$$(2) \quad A(t, 0) = 1, \quad A_\tau(t, 0) = 0.$$

Für die Bogenlänge der varrierten Kurve

$$(3) \quad \tau = \tau(t) = \epsilon \bar{\tau}(t)$$

erhalten wir, wenn wir nach Potenzen von ϵ entwickeln:

$$(4) \quad \begin{cases} S(\epsilon) = \int \sqrt{A^2 + \tau^2} dt \\ \quad = \int \sqrt{1 + \tau^2 A_{\tau\tau}(t, 0) + \tau^2 + \dots} dt \\ \quad = \int dt + \frac{1}{2} \int \{\tau^2 A_{\tau\tau}(t, 0) + \tau^2\} dt + \dots \end{cases}$$

Setzen wir wie üblich

$$(5) \quad S(\epsilon) = S(0) + \partial S + \frac{1}{2} \partial^2 S + \dots,$$

so ergibt sich neben dem selbstverständlichen $\partial S = 0$ für die zweite Variation der Bogenlänge der Ausdruck

$$(6) \quad \partial^2 S = \int \{\tau^2 A_{\tau\tau} + \tau^2\} dt.$$

Weiter kann man untersuchen auf unsrer Kreisfläche wie in BLASCHKE'S Buch⁽¹⁾.

(N) Die Koordinaten eines Punktes M einer Kreisfläche seien durch die Krümmungsparameter t und τ dargestellt, und es sei das Quadrat des Linienelementes

1 BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Dritte Auflage (1930), S. 216.

$$ds^2 = 1/\lambda \cdot \{(\theta_i \theta_i) dt^2 + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2\}, \quad (\theta_i \theta_\tau) = 0;$$

r_1 und r_2 seien zuletzt die beiden Hauptkrümmungsradien.

Die Kreisfläche sei in der bekannten Weise auf die GAUSSsche Kugel abgebildet, d. h. so, dass in entsprechenden Punkten die Normalen beider Flächen gleichgerichtet sind.

Sucht man nun diejenigen Elemente in M, welche mit den entsprechenden Elementen der Kugel einen gegebenen Winkel bilden, dessen Kosinus A gleich sei, so erhält man die Differentialgleichung⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)^2}{r_1^2} (1 - A^2) d\tau^2 + (\theta_i \theta_i) (\theta_\tau \theta_\tau) \left\{ \frac{2}{r_1 r_2} - A \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right\} dt^2 d\tau^2 \\ + \frac{(\theta_i \theta_i)^2}{r_2^2} (1 - A^2) dt^2 = 0. \end{aligned}$$

(O) Wir betrachten alle Kreisflächen, die unendlich viele Werte der Konstanten a des Längenelementes⁽²⁾

$$(1) \quad ds^2 = (\tau + at^2) dt^2 + d\tau^2$$

haben, so entsteht

$$(2) \quad (\theta_i \theta_i) = \tau + at^2, \quad (\theta_i \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1.$$

Hieraus kann man wissen, dass die Minimallinien sind:

$$(3) \quad (\tau + at^2) dt^2 + d\tau^2 = 0.$$

(P) Im folgenden möchten wir die von FREDHOLM und HILBERT herrührenden Sätze über lineare Integralgleichungen auf die Beltrami'sche Differentialgleichung

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta V &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{(\theta_\tau \theta_\tau) \cdot \partial V / \partial t - (\theta_i \theta_\tau) \cdot \partial V / \partial \tau}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{-(\theta_i \theta_\tau) \cdot \partial V / \partial t + (\theta_i \theta_i) \cdot \partial V / \partial \tau}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2}} \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

1 RUFFINI, F. P.: Di alcune proprietà della rappresentazione sferica del GAUSS, Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istiute di Bologna, Bologna, 4 VIII, p. 661.

(2) GOURSAT, E.: Surfaces telles que la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe un plan tangent, American Journ. of math. 10 (1883), p. 187.

anwenden, wobei (θ_t, θ_t) , (θ_t, θ_τ) , $(\theta_\tau, \theta_\tau)$ die Differentialparameter einer geschlossenen Kreisfläche bedeuten, deren Bogenelement durch die Gleichung

$$(2) \quad ds^2 = 1/\lambda \cdot \{(\theta_t, \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t, \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau, \theta_\tau) d\tau^2\}$$

gegeben ist. Durch Anwendung des Fredholmschen Theorems gelangt er zu dem Resultate, dass die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer auf der Kreisfläche überall stetigen Lösung der Differentialgleichung

$$(3) \quad \Delta V = f(t, \tau) \sqrt{(\theta_t, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_t, \theta_\tau)^2}$$

das Verschwinden des über die Kreisfläche genommenen Integrals

$$(4) \quad \iint f(t, \tau) d\sigma$$

ist.

Durch Anwendung des HILBERTSchen Theorems gelangt er zu dem Resultat, dass es unendlich viele Werte des Parameters λ gibt, bei denen die Differentialgleichung

$$(5) \quad \Delta V = \lambda c(t, \tau) \sqrt{(\theta_t, \theta_t)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_t, \theta_\tau)^2} \cdot V \quad [c(t, \tau) \neq 0]$$

eine überall stetige Lösung besitzt.

Durch Kombination beider Theoreme stellt er schliesslich die Bedingungen auf, unter denen die Differentialgleichung (5) eine Lösung besitzt, die in n gegebenen Punkten der Kreisfläche (a_1, b_1) , ..., (a_n, b_n) eine Singularität besitzt vom Typus der Wärmequellen mit der Divergenz A_1, A_2, \dots, A_n , wobei die A_i gegebene Zahl sind⁽¹⁾.

(2)

(A) Im folgenden möchten wir

$$(1) \quad \mathbf{v} = \{\mathbf{x}^I \mp \mathbf{x}^{II}\} \cdot \{1 \pm (\mathbf{x}^I, \mathbf{x}^{II})\}, \quad (\mathbf{x}^I, \mathbf{x}^{II})^2 = 1$$

1 PICARD, E.: Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre, relative à une surface fermée, correspondant à un équilibre calorifique, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 26, p. 9.

betrachten, wo x^I und x^{II} Kugeln in R_n sind⁽¹⁾.

Aus (1) sieht man, dass

$$(2) \quad (vv) = 0, \quad (vx^I) = 0, \quad (vx^{II}) = 0$$

gelten, d. h. v der Berührungspunkt von x^I und x^{II} ist.

Wir können daher zwei neue Berührungskugeln

$$(3) \quad x^\alpha = \sum_{\beta=I}^{II} c_\beta^\alpha x^\beta \quad [\alpha = I, II]$$

als Linearkombinationen der x^α einführen mit Koeffizienten c_β^α , deren Determinante $|c_\beta^\alpha| \neq 0$ sein muss, wenn x^I und x^{II} nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die x^α unsern Berührungspunkt darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kugeln

$$(4) \quad x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha, \dots,$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Punkten festlegen, nur von der geometrischen Figur der Punkte abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kugeln, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen von der Art (3).

Dabei werden wir für die verschiedenen Punkte Substitutionen (3) mit verschiedenen Koeffizientensystemen c_β^α haben.

Wir wollen (3) auch die Büscheltransformationen des Punktes p nennen.

Für die Behandlung der Geometrie der Punkte im Raum erweist es sich als zweckmässig, diese in der angegebenen Weise zunächst durch ganz beliebige Paare von Kugeln darzustellen.

Bilden wir die skalaren Produkte aller dieser Kugeln, so können wir abgesehen von den bekannten Ausnahmen aus ihnen das vollständige Invariantensystem der Figur der gegebenen Kugeln gewinnen.

Um die Invarianten der Punkte zu bekommen, haben wir aus diesen Invarianten noch die Ausdrücke zu bilden, die sich bei den Substitutionen (3) nicht ändern.

Dabei haben wir noch zu beachten, dass die möglichen Umnor-

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln XXX', Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Tâihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXI (1939), S. 363.

mierungen der Hilfskugeln x^a u. s. w. in den Substitutionen (3) enthalten, also nicht mehr besonders zu berücksichtigen sind.

Betrachten wir zunächst einen Punkt x^a .

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(5) \quad (x^a x^b) = A^{ab},$$

so haben wir in A^{ab} ein Grössensystem, das sich nach (3) in folgender Weise substituiert:

$$(6) \quad \ddot{A}^{ab} = c_\beta^a c_\delta^b A^{\tau\delta} \quad [\ddot{A}^{ab} = (\ddot{x}^a \ddot{x}^b)].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis II, und es ist über doppelt vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Für das Verhalten der Grössen gegenüber den linearen Büscheltransformationen (3) wollen wir die üblichen Bezeichnungen der Tensorrechnung einführen.

Für den zu unserm Punkt p gehörigen Tensor A^{ab} gilt nach (5) die Symmetriebedingung

$$(7) \quad A^{ab} = A^{ba}$$

und ferner substituiert sich die Determinante $A = |A^{ab}|$ nach

$$(8) \quad A = |c_\beta^a|^2 A.$$

Wollen wir nun einen eigentlichen reellen Punkt haben, so müssen wir die Determinante

$$(9) \quad A \sim 0$$

voraussetzen, eine Bedingung, die nach (8) invariant ist.

In diesem Falle immer besteht

$$(10) \quad (x^I x^I)(x^{II} x^{II}) - (x^I x^{II})^2 = 0.$$

Wir betrachten zwei Punkte p und \tilde{p} , die durch die beiden Kugelpaare x^a und \tilde{x}^a [$a = I, II$] dargestellt sind.

Wir definieren

$$(11) \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{x}^\lambda \tilde{x}^\mu) \quad \text{mit} \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(12) \quad A = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| = 0$$

voraus.

Dann haben wir für \tilde{p} die Büscheltransformationen

$$(13) \quad \tilde{x}^{\lambda*} = \tilde{c}_{\mu}^{\lambda} \tilde{x}^{\mu}$$

zu berücksichtigen.

Die $\tilde{c}_{\mu}^{\lambda}$ in (13) sind aber von den c_{μ}^{λ} in (3) völlig unabhängige neue Größen.

Daher haben wir Vektoren und Tensoren bezüglich der Büscheltransformationen von p einerseits und von \tilde{p} andererseits zu unterscheiden.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(14) \quad ||\tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}, \tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}|| \equiv 0$$

ist, in der eine lineare Beziehung der Form

$$(15) \quad \sigma_a \tilde{x}^a = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{x}^{\lambda}$$

besteht.

Die Bedeutung von (15) ist aber die, dass es eine Kugel

$$(16) \quad \mathfrak{g} = \sigma_a \tilde{x}^a = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{x}^{\lambda}$$

gibt, auf der beide Punkte liegen.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit⁽¹⁾.

(B) Wir betrachten

$$(1) \quad \tilde{x}^a(t) \quad [a = I, II, \dots, (m+1)],$$

wo $\tilde{x}^I = \tilde{x}$, $\tilde{x}^{II} = \dot{\tilde{x}}$, ..., $\tilde{x}^{m+1} = \tilde{x}^{(m)}$ sind.

Da t ein Parameter $\tilde{x} = d\tilde{x}/dt$ ist.

Hier möchten wir die Fläche betrachten, die mit (1) bestimmt wird.

Wir können $m+1$ neue Kugeln

$$(2) \quad \tilde{x}^{a*} = \sum_{\beta=1}^{m+1} c_{\beta}^a \tilde{x}^{\beta} \quad [a = I, II, \dots, (m+1)]$$

(1) NAKAZIMA (=MATUMURA), S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. 34 (1931), S. 187.

als Linearkombinationen der χ^{α} einführen mit Koeffizienten c_{β}^{α} , deren Determinante

$$(3) \quad |c_{\beta}^{\alpha}| \neq 0$$

sein muss, wenn χ^I, χ^{II}, \dots und $\chi^{*(m+1)}$ nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch χ^{α} unsere Fläche darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kugeln

$$(4) \quad \chi^{\alpha}, \eta^{\alpha}, \xi^{\alpha}, \dots \quad [\alpha = I, II, \dots, (m+1)]$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Flächen festlegen, nur von der geometrischen Figur der Fläche abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kugeln, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen der Art (2).

Wir wollen (2) auch die Büscheltransformationen der Fläche F nennen.

Betrachten wir zunächst eine Fläche χ^{α} .

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(5) \quad (\chi^{\alpha} \chi^{\beta}) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Grössensystem, das sich nach (2) in folgender Weise substituiert:

$$(6) \quad \check{A}^{\alpha\beta} = c_{\beta}^{\alpha} c_{\delta}^{\beta} A^{\gamma\delta} \quad [\check{A}^{\alpha\beta} = (\check{\chi}^{\alpha} \check{\chi}^{\beta})].$$

Aus (5) kommt

$$(7) \quad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$$

und ferner lässt sich die Determinante

$$(8) \quad A = |A^{\alpha\beta}|$$

nach

$$(9) \quad \check{A} = |c_{\beta}^{\alpha}|^2 \cdot A$$

substituieren.

Wollen wir nun eine eigentliche reelle Fläche haben, so müssen wir die Determinante

$$(10) \quad A > 0$$

voraussetzen.

Wir betrachten zwei Flächen F und \tilde{F} , die durch die beiden Kugelpaare \tilde{x}^a und \tilde{x}^λ [$a, \lambda = I, II, \dots, (m+1)$] dargestellt werden.

Wir definieren analog (5)

$$(11) \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{x}^\lambda \tilde{x}^\mu) \quad \text{mit} \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen $A = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| \neq 0$ voraus.

Dann haben wir für \tilde{F} die Büscheltransformationen

$$(12) \quad \tilde{x}_\mu^* = \tilde{c}_\mu^\lambda \tilde{x}^\lambda$$

zu berücksichtigen.

Die \tilde{c}_μ^λ in (12) sind aber von den c_μ^a in (2) völlig unabhängige neue Grössen.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(13) \quad ||\tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}, \dots, \tilde{x}^{(m+1)}, \tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}, \dots, \tilde{x}^{(m+1)}|| \equiv 0$$

ist, in der eine lineare Beziehung der Form

$$(14) \quad \sigma_a \tilde{x}^a = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{x}^\lambda$$

besteht.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit⁽¹⁾.

(C) Ist n eine ganze Zahl, so bezeichnet

$$(1) \quad \tilde{x}^{na} \quad [a = I, II, III]$$

$2n$ Punkte in R_N , wo \tilde{x}^a Kugeln in R_N sind.

Im folgenden möchten wir eine Fläche betrachten, die mit $2n$ Punkten bestimmt wird.

In diesem Falle kann man untersuchen wie in (4), z. B. wenn

$$(2) \quad ||\tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}, \dots, \tilde{x}^{na}, \tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}, \dots, \tilde{x}^{na}|| \equiv 0$$

besteht, so erhält man

$$(3) \quad \sigma_a \tilde{x}^a = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{x}^\lambda.$$

Die Bedeutung von (3) ist die, dass es eine Beziehung (3) gibt zwischen beiden Flächen.

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. 34 (1931), S. 187.

Weiter kann man

$$(4) \quad x^a = \sum_{\beta=1}^{na} c_{\beta}^a x^{\beta}, \quad [a = I, II, \dots, na]$$

in diesem Falle betrachten.

(D) Im folgenden möchten wir die Figur \mathfrak{F} im R_N , die mit n Kugeln in R_N bestimmt werden kann.

Wir können n neue Kugeln

$$(1) \quad x^a = \sum_{\beta=1}^n c_{\beta}^a x^{\beta} \quad [a = I, II, \dots, n]$$

als Linearkombinationen der x^a einführen mit Koeffizienten c_{β}^a , deren Determinante

$$(2) \quad |c_{\beta}^a| \neq 0$$

sein muss, wenn x^{*I}, x^{*II}, \dots und x^{*n} nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die x^{*a} unsere \mathfrak{F} darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kugeln

$$(3) \quad x^a, y^a, z^a, \dots, \quad [a = I, II, \dots, n],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von \mathfrak{F} festlegen, nur von der geometrischen Figur der \mathfrak{F} abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kugeln, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen der Art (1),

Dabei werden wir für verschiedene \mathfrak{F} Substitutionen (1) mit verschiedenem Koeffizientensystem c_{β}^a haben.

Wir wollen (1) die Büscheltransformationen der \mathfrak{F} nennen.

Wir betrachten zunächst eine $\mathfrak{F} x^a$.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(4) \quad (x^a x^{\beta}) = A^{a\beta},$$

so haben wir in $A^{a\beta}$ ein Grössensystem, das sich nach (1) in folgender Weise substituiert:

$$(5) \quad \bar{A}^{a\beta} = c_{\gamma}^a c_{\delta}^{\beta} A^{\gamma\delta} \quad [\bar{A}^{a\beta} = (x^{*a} x^{*\beta})].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis n und es ist über n vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Hier sowie im folgenden wollen wir oft die Summenzeichen weglassen.

Für das Verhalten der Grössen gegenüber den linearen Büscheltransformationen (1) wollen wir die üblichen Bezeichnungen der Tensorrechnung einführen.

Bei Gruppen linearer Transformationen bilden bekanntlich Grössen und Grössensysteme von gewissen leicht übersehbaren Transformationseigenschaften, die Vektoren und Tensoren das naturgemässe Durchgangsstadium zur Bildung von Invarianten.

Für einen kontravarianten Tensor n -ter Stufe

$$W^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

gilt

$$(6) \quad W^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = c_{\beta_1}^{\alpha_1} c_{\beta_2}^{\alpha_2} \dots c_{\beta_n}^{\alpha_n} W^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}$$

und für einen kovarianten

$$V_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

gilt aber

$$(7) \quad V_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} = c_{\alpha_1}^{\beta_1} c_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots c_{\alpha_n}^{\beta_n} V_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}$$

Um zu unserer Geometrie der \mathfrak{F} zurückzukommen, bemerken wir, dass für den zu unserer \mathfrak{F} gehörigen Tensor nach $A^{\alpha\beta}$ die Symmetriebedingung

$$(8) \quad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$$

gilt und dass sich ferner die Determinante

$$(9) \quad A = |A^{\alpha\beta}|$$

nach

$$(10) \quad \bar{A} = |c_{\beta}^{\alpha}|^2 \cdot A$$

substituiert.

Wollen wir nun eine eigentliche reelle \mathfrak{F} haben, so müssen wir die Determinante

$$(11) \quad A > 0$$

voraussetzen, eine Bedingung, die nach (10) invariant ist.

Wir betrachten zwei \mathfrak{F} , F und \tilde{F} , die durch die

$$(12) \quad x^a \text{ und } \tilde{x}^\lambda \quad [a, \lambda = I, II, \dots, n]$$

dargestellt werden.

Wir definieren analog (4)

$$(13) \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{x}^\lambda \tilde{x}^\mu) \text{ mit } \tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(14) \quad A = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| > 0$$

voraus.

Dann haben wir für \tilde{F} die Büscheltransformationen

$$(15) \quad \tilde{x}^\lambda = \tilde{c}_\mu^\lambda \tilde{x}^\mu$$

zu berücksichtigen.

Die \tilde{c}_μ^λ in (15) sind aber von den c_β^a in (1) völlig unabhängige neue Grössen.

Daher haben wir Vektoren und Tensoren bezüglich der Büscheltransformationen von F einerseits und von \tilde{F} andererseits zu unterscheiden.

Daher wollen wir zu denjenigen der ersten Art, wie wir es bisher stillschweigend schon getan, nur die Indizes

$$(16) \quad \alpha, \beta, \gamma, \dots$$

und zu denjenigen der zweiten Art aber die Indizes

$$(17) \quad \lambda, \mu, \nu, \dots$$

verwenden.

Die Grössen, die nur die Indizes der ersten Art tragen, sind dann als Invarianten gegenüber (15) zu betrachten, und das gleiche gilt für die Grössen mit lauter Indizes der zweiten Art.

Wir merken uns daher: Um Invarianten zu bilden, dürfen wir nur die Indizes der ersten Art miteinander zusammenfallen lassen, oder solche zweiter Art, nicht aber solche verschiedener Art.

Analog (4) definieren wir zu $\tilde{A}^{\lambda\mu}$ den reziproken Tensor $\tilde{A}_{\lambda\mu}$, und ziehen mit beiden Tensoren die Indizes der zweiten Art herauf und herunter.

In

$$(18) \quad S^{\alpha\lambda} = (\tilde{x}^{\alpha} \tilde{x}^{\lambda})$$

haben wir ein Grössensystem, bei dem beide Arten von Indizes vorkommen, einen gemischten Tensor, der sich nach

$$(19) \quad \tilde{S}^{\alpha\lambda} = c_{\mu}^{\alpha} c_{\nu}^{\lambda} S^{\mu\nu}$$

transformiert.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(20) \quad || \tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}, \dots, \tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}, \dots, \tilde{x}^{(n)} ||$$

ist, in der eine lineare Beziehung der Form

$$(21) \quad \sigma_{\alpha} \tilde{x}^{\alpha} = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{x}^{\lambda}$$

besteht.

Die Bedeutung von (21) ist aber die, dass es eine Kugel

$$(22) \quad \mathfrak{z} = \sigma_{\alpha} \tilde{x}^{\alpha} = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{x}^{\lambda}$$

gibt, auf der beide $\tilde{\mathfrak{z}}$ liegen.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit⁽¹⁾.

(E) Hier möchten wir die Raumkurve in R_N betrachten, die mit n Punkten in R_N bestimbar ist.

Geben wir auf einer Kugel \mathfrak{z} in R_N n Punkte

$$(1) \quad \tilde{x}^{\alpha} \quad [\alpha = I, II, \dots, n]$$

und auf einer weiteren Kugel \mathfrak{z}^* ebenfalls n Punkte vor, so gibt es genau $n+1$ Möbiustransformationen des R_N -Raumes, die die Figur

$$(2) \quad \{\mathfrak{z} \tilde{x}^{\alpha}\}$$

überführen in die Figur:

$$(3) \quad \{\mathfrak{z}^* \tilde{x}^{\alpha}\}.$$

Wir können zunächst durch eine Ähnlichkeit \mathfrak{z} in \mathfrak{z}^* überführen, dann gehen die \tilde{x}^{α} in n Punkte \tilde{x}^{α} auf \mathfrak{z} über.

Dann kann man auf $n-1$ verschiedene Weisen durch eine Kreisverwandtschaft auf \mathfrak{z} , die \tilde{x}^{α} in die \tilde{x}^{α} überführen.

(1) NAKAZIMA, a. a. O., S. 199.

Zu jeder solcher Kreisverwandtschaften haben wir dann nach dem eben Ausgeführten noch $n - 1$ zugehörige Transformationen des R_N -Raumes.

Diese $n+1$ Abbildungen sind nun auch die einzig möglichen.

Denn die Figur

$$(4) \quad \{ \overset{*}{\underset{*}{\mathfrak{z}}} \overset{*}{\underset{*}{\mathfrak{x}^a}} \}$$

kann, wenn man die Identität mitrechnet, nur durch $n + 1$ Transformationen in sich übergeführt werden.

Zunächst gibt es zu der Identität auf der Kugel \mathfrak{z}^* von $n-1$ Kreisverwandtschaften einmal die Identität des R_N -Raumes, dann die Inversion an \mathfrak{z}^* , die alle Punkte von \mathfrak{z}^* in Ruhe lässt.

Dann gibt es die Inversion auf \mathfrak{z}^* , die den Kreis durch die Punkte $\overset{*}{\mathfrak{x}^a}$ auf \mathfrak{z} punktweise in Ruhe lässt, und zu dieser gibt es $n-1$ Transformationen im R_N -Raum, von denen man wieder die eine aus der andern erhält, indem man noch die Inversion an \mathfrak{z}^* ausführt.

Weiter kann man das Glied der Gruppe der Abbildungen von MÖBIUS im R_N -Raum klar machen, wenn wir die Nummer von Bestimmungsstücken der Figur

$$(5) \quad \{ \overset{*}{\underset{*}{\mathfrak{z}}} \overset{*}{\underset{*}{\mathfrak{x}^a}} \}$$

berechnen.

Wir betrachten n neue Punkte

$$(6) \quad \overset{*}{\mathfrak{x}^a} = \sum_{\beta=1}^n c_{\beta}^a \overset{*}{\mathfrak{x}^{\beta}} \quad [a = \text{I, II, } \dots, n]$$

als Linearkombinationen der $\overset{*}{\mathfrak{x}^a}$ einführen mit Koeffizienten c_{β}^a , deren Determinante

$$(7) \quad |c_{\beta}^a| \neq 0$$

sein muss, wenn $\overset{*}{\mathfrak{x}^{\text{I}}}, \overset{*}{\mathfrak{x}^{\text{II}}}, \dots$ und $\overset{*}{\mathfrak{x}^n}$ nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die $\overset{*}{\mathfrak{x}^a}$ unsere Punkte darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Punkte

$$(8) \quad \overset{*}{\mathfrak{x}^a}, \overset{*}{\mathfrak{y}^a}, \overset{*}{\mathfrak{z}^a}, \dots \quad [a = \text{I, II, } \dots, n],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Punkten festlegen, nur von der geometrischen Figur abhängen, nicht aber von den sie festlegenden

Punkten, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen der Art (6).

Man kann

$$(9) \quad (\tilde{x}^{\alpha} \tilde{x}^{\beta}) = A^{\alpha\beta}, \quad \tilde{A}^{\alpha\beta} = c_{\gamma}^{\alpha} c_{\delta}^{\beta} A^{\gamma\delta} \quad [\tilde{A}^{\alpha\beta} = (\tilde{x}^{\alpha} \tilde{x}^{\beta})]$$

auch betrachten wie oben.

Wir betrachten zwei Raumkurven \mathfrak{K} und $\tilde{\mathfrak{K}}$, die durch die beiden Punktepaare

$$(10) \quad \tilde{x}^{\alpha} \quad \text{und} \quad \tilde{x}^{\lambda} \quad [\alpha, \lambda = \text{I, II, } \dots, n]$$

dargestellt sind.

Wir definieren

$$(11) \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{x}^{\lambda} \tilde{x}^{\mu}) \quad \text{mit} \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(12) \quad \tilde{A} = |A^{\lambda\mu}| \neq 0$$

voraus.

Dann müssen wir für $\tilde{\mathfrak{K}}$ die Büscheltransformationen

$$(13) \quad \tilde{x}^{\lambda} = \tilde{c}_{\mu}^{\lambda} \tilde{x}^{\mu}$$

berücksichtigen.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(14) \quad \|\tilde{x}^{\text{I}}, \tilde{x}^{\text{II}}, \dots, \tilde{x}^{(n)}, \tilde{x}^{\text{I}}, \tilde{x}^{\text{II}}, \dots, \tilde{x}^{(n)}\| \equiv 0$$

ist, in der eine lineare Beziehung der Form

$$(15) \quad \sigma_{\alpha} \tilde{x}^{\alpha} = \tilde{\sigma}_{\lambda} \tilde{x}^{\lambda}$$

besteht.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit⁽¹⁾.

(3)

Im folgenden möchten wir die Inversegeometrie betrachten.

(A) Wir untersuchen⁽²⁾

(1) NAKAZIMA, a. a. O., S. 188.

(2) THOMSEN, G.: Über konforme Geo., Abh. aus dem Math. Seminar. der Hamb. Univ., IV Bd., S. 122

$$(1) \quad \eta = 2(\xi \hat{\xi}) \cdot \hat{\xi} - \xi.$$

Aus der Aufgabe, alle Kurven ξ zu bestimmen, die bei einer Transformation durch reziproke Polaren in sich selbst übergehen, wird die Lösung

$$(2) \quad \xi = (\xi \hat{\xi}) \hat{\xi},$$

wo $\hat{\xi}$ eine Kugel und ξ einen Punkt bedeutet.

Wenn die Kugel η auf $\hat{\xi}$ senkrecht ist, so folgt aus (2)

$$(3) \quad (\xi \eta) = 0;$$

daraus kann man wissen, dass $\xi \perp \eta$ gilt.

Wenn η $\hat{\xi}$ sich berühren, so folgt aus (2)

$$(4) \quad (\xi \eta) = (\xi \hat{\xi}) \quad \text{oder} \quad \cos \phi = \cos \psi,$$

wo ϕ der Winkel zwischen ξ und η , ψ der zwischen ξ und $\hat{\xi}$ ist.

ξ und η seien zwei Kreise in R_2 und ξ , $\bar{\xi}$ zwei Punkte in R_2 , wo

$$(5) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta, \quad (\hat{\xi} \eta)^2 = 1,$$

$$(6) \quad \bar{\xi} = \hat{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta, \quad (\hat{\xi} \eta)^2 = 1$$

und

$$(7) \quad \xi = \lambda \bar{\xi}$$

gelten, so haben wir

$$(8) \quad \xi - (\hat{\xi} \eta) \eta = \lambda [\bar{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta];$$

daraus ergibt sich

$$(9) \quad \xi = \lambda \bar{\xi}$$

d. h. ξ und $\bar{\xi}$ miteinander zusammenfallen, wenn (9) für jeden η gilt, wo λ konstant ist.

(B) Eine Kurve $\xi(t)$ in R_n heisst p -fach isotrop (Minimallinien), wenn

$$(1) \quad (\dot{\xi} \dot{\xi}) = 0, \quad (\ddot{\xi} \ddot{\xi}) = 0, \quad \dots, \quad (\xi^{(p)} \xi^{(p)}) = 0,$$

aber

$$(2) \quad (\xi^{(p+1)} \xi^{(p+1)}) \neq 0$$

ist, wo t Parameter und $(\xi \xi) = 0$ gilt. Da $\dot{\xi} = d/dt \cdot \xi$ ist.

Aus

$$(3) \quad \eta = 2(\xi \dot{\xi}) \cdot \dot{\xi} - \dot{\xi}$$

kommt

$$(4) \quad \begin{cases} \dot{\eta} = 2(\xi \ddot{\xi}) \dot{\xi} - \ddot{\xi}, & \ddot{\eta} = 2(\xi \ddot{\xi}) \ddot{\xi} - \ddot{\xi}, \dots, \\ \eta^{(p)} = 2(\xi^{(p)} \dot{\xi}) \dot{\xi} - \dot{\xi}^{(p)}, \end{cases}$$

wo ξ eine feste Kugel, η und ξ Punkte in R_N sind.

So folgen aus (1) und (4)

$$(\eta \eta) = 0, \quad (\dot{\eta} \dot{\eta}) = 0, \quad \dots \quad (\eta^{(p)} \eta^{(p)}) = 0, \quad (\eta^{(p+1)} \eta^{(p+1)}) \neq 0,$$

wenn

$$(\xi \xi) = 0, \quad (\dot{\xi} \dot{\xi}) = 0, \quad \dots \quad (\xi^{(p)} \xi^{(p)}) = 0, \quad (\xi^{(p+1)} \xi^{(p+1)}) \neq 0,$$

daraus ergibt sich der

Satz: Wenn ξ eine p -fach isotrope Kurve in (3) ist, so ist η auch eine p -fach isotrope Kurve.

Weiter bestehen

$$\eta = 2(\xi \dot{\xi}) \dot{\xi} - \dot{\xi}$$

und

$$\{\eta + d\eta\} = (\xi + d\xi, \dot{\xi}) \dot{\xi} - \{\dot{\xi} + d\dot{\xi}\}$$

zugleich; wir erhalten also

$$d\eta = (d\xi, \dot{\xi}) \dot{\xi} - d\dot{\xi}.$$

(C) Aus

$$\bar{\xi} = 2(\xi \dot{\xi}) \dot{\xi} - \dot{\xi}$$

folgt

$$\bar{\xi}'' = 2(\xi'' \dot{\xi}) \dot{\xi} - \dot{\xi}'$$

oder

$$\bar{\xi}'' = \dot{\xi}'^2;$$

so ist gültig⁽¹⁾

$$\bar{\rho} = \rho,$$

wo ξ eine feste Kugel, $\bar{\xi}$, ξ Punkte in R_N und $\bar{\rho}$, ρ Krümmungshalbmesser sind.

Nun wollen wir die Gleichung der Schmiegebene finden.

Aus (28) in BLASCHKES Buch⁽²⁾ ergibt sich

$$\{\eta - \xi, 2(\xi \bar{\xi}) \bar{\xi} - \xi, 2(\xi' \bar{\xi}) \bar{\xi} - \xi', 2(\xi'' \bar{\xi}) \bar{\xi} - \xi''\} = 0.$$

(4)

Im folgenden behandeln wir

$$(A) \quad \xi = \bar{\xi} - (\bar{\xi}\eta)\eta, \quad (\bar{\xi}\eta)^2 = 1,$$

wo ξ der Berührungspunkt zweier Kreise $\bar{\xi}$ und η in R_2 ist.

(A) Geht ein Kreis η den Punkt ξ hindurch, so folgt

$$(1) \quad 0 = (\xi\eta) = (\bar{\xi}\eta) - (\bar{\xi}\eta)(\eta\eta)$$

oder

$$(2) \quad (\bar{\xi}\eta) = (\bar{\xi}\eta)(\eta\eta)$$

oder

$$(3) \quad (\bar{\xi}\eta)^2 = (\eta\eta)^2$$

oder

$$\cos^2 \phi = \cos^2 \psi,$$

wo ϕ der Winkel zwischen $\bar{\xi}$ und η , ψ der zwischen η und η ist.

Nehmen wir

$${}_{(i)}\eta \quad [i = 1, 2]$$

anstatt η in (1), so folgt

$$(4) \quad (\bar{\xi} {}_{(i)}\eta) = (\bar{\xi}\eta)(\eta {}_{(i)}\eta)$$

(1) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeo. I. Dritte Auflage, S. 18.

(2) BLASCHKE, a. a. O., S. 16.

und

$$(5) \quad (\hat{\xi}_{(2)}\eta) = (\hat{\xi}\eta)(\eta_{(2)}\eta);$$

daraus ergeben sich

$$(6) \quad (\hat{\xi}_{(1)}\eta) : (\hat{\xi}_{(2)}\eta) = (\eta_{(1)}\eta) : (\eta_{(2)}\eta)$$

$$(7) \quad (\hat{\xi}_{(1)}\eta)(\hat{\xi}_{(2)}\eta) = (\eta_{(1)}\eta)(\eta_{(2)}\eta)$$

und

$$(8) \quad (\hat{\xi}_{(1)}\eta)(\eta_{(2)}\eta) = (\eta_{(1)}\eta)(\hat{\xi}_{(2)}\eta)$$

oder

$$(6') \quad \cos \phi_1 : \cos \phi_2 = \cos \psi_1 \cos \psi_2,$$

$$(7') \quad \cos \phi_1 \cos \phi_2 = \cos \psi_1 \cos \psi_2,$$

$$(8') \quad \cos \phi_1 \cos \psi_2 = \cos \psi_1 \cos \phi_2,$$

wo ϕ_1 der Winkel zwischen $\hat{\xi}$ und $_{(1)}\eta$, ϕ_2 der zwischen $\hat{\xi}$ und $_{(2)}\eta$, ψ_1 der zwischen η und $_{(1)}\eta$ und zuletzt ψ_2 der zwischen η und $_{(2)}\eta$ ist.

(B) Sind ξ , η und ζ drei Berührungspunkte von $\hat{\xi}$, η ; ζ , $\hat{\xi}$ bzw. η , ζ , so ist gültig

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta, & (\hat{\xi}\eta)^2 = 1, \\ \eta = \zeta - (\zeta\hat{\xi})\hat{\xi}, & (\zeta\hat{\xi})^2 = 1, \\ \zeta = \eta - (\eta\zeta)\zeta, & (\eta\zeta)^2 = 1. \end{cases}$$

gilt

$$(2) \quad \xi - \eta = \eta - \zeta = \zeta - \xi$$

in (1), so

$$(3) \quad \begin{cases} \hat{\xi} - \zeta - \{(\hat{\xi}\eta)\eta - (\zeta\hat{\xi})\hat{\xi}\} \\ = \zeta - \eta - \{(\zeta\hat{\xi})\hat{\xi} - (\eta\zeta)\zeta\} \\ = \eta - \xi - \{(\eta\zeta)\zeta - (\hat{\xi}\eta)\eta\}. \end{cases}$$

Geht ein Kreis η die Punkte ξ , η und ζ hindurch, so ist gültig

$$(4) \quad \begin{cases} (\xi\eta) = (\xi\gamma)(\eta\eta), & (\xi\gamma)^2 = 1, \\ (\zeta\eta) = (\zeta\xi)(\xi\eta), & (\zeta\xi)^2 = 1, \\ (\eta\eta) = (\eta\zeta)(\zeta\eta), & (\eta\zeta)^2 = 1, \end{cases}$$

oder

$$(5) \quad (\xi\eta)^2 = (\eta\eta)^2, \quad (\zeta\eta)^2 = (\xi\eta)^2, \quad (\eta\eta)^2 = (\zeta\eta)^2,$$

oder

$$(6) \quad (\xi\eta)^2 = (\eta\eta)^2 = (\zeta\eta)^2.$$

Wenn $(\xi\eta)^2 = (\eta\eta)^2 = (\zeta\eta)^2 = 1$, so berühren sich η , ξ , γ und ζ .

Aus (6) kann man wissen, dass, wenn

$$(7) \quad \eta \perp \xi,$$

so

$$(8) \quad \eta \perp \gamma, \quad \eta \perp \zeta,$$

wenn

$$(9) \quad \eta \perp \gamma,$$

so

$$(10) \quad \eta \perp \xi, \quad \eta \perp \zeta,$$

wenn

$$(11) \quad \eta \perp \zeta,$$

so

$$(12) \quad \eta \perp \xi, \quad \eta \perp \gamma.$$

folgt.

Wenn $\bar{\eta}$ ein Punkt ist und

$$(13) \quad (\bar{x}\bar{\eta}) = (\bar{y}\bar{\eta}) = (\bar{z}\bar{\eta}),$$

gilt, so erhalten wir

$$(14) \quad (\bar{\xi}\bar{\eta}) = (\bar{\xi}\gamma)(\bar{\eta}\gamma), \quad (\bar{\zeta}\bar{\eta}) = (\bar{\zeta}\xi)(\bar{\eta}\xi), \quad (\bar{\eta}\bar{\eta}) = (\eta\zeta)(\bar{\eta}\zeta),$$

oder

$$(15) \quad (\hat{\epsilon}\bar{\eta})^2 = (\bar{\eta}\eta)^2, \quad (\zeta\bar{\eta})^2 = (\bar{\eta}\zeta)^2, \quad (\eta\bar{\eta})^2 = (\bar{\eta}\zeta)^2,$$

oder

$$(16) \quad (\bar{\eta}\hat{\epsilon})^2 = (\bar{\eta}\eta)^2 = (\bar{\eta}\zeta)^2.$$

Aus (16) sieht man, dass, wenn

$$(17) \quad (\bar{\eta}\hat{\epsilon}) = 1,$$

oder

$$(18) \quad (\bar{\eta}\eta) = 1,$$

oder

$$(19) \quad (\bar{\eta}\zeta) = 1,$$

so

$$(20) \quad (\bar{\eta}\hat{\epsilon})^2 = (\bar{\eta}\eta)^2 = (\bar{\eta}\zeta)^2 = 1.$$

sich ergibt.

Gilt

$$(21) \quad \mathfrak{b} \perp \hat{\epsilon}, \quad \mathfrak{b} \perp \eta, \quad \mathfrak{b} \perp \zeta$$

in (1), so haben wir

$$(22) \quad \begin{cases} (\mathfrak{b}\hat{\epsilon}) = -(\hat{\epsilon}\eta)(\eta\mathfrak{b}), & (\hat{\epsilon}\eta)^2 = 1, \\ (\mathfrak{b}\eta) = -(\hat{\epsilon}\zeta)(\zeta\mathfrak{b}), & (\hat{\epsilon}\zeta)^2 = 1, \\ (\mathfrak{b}\zeta) = -(\eta\zeta)(\zeta\mathfrak{b}), & (\eta\zeta)^2 = 1, \end{cases}$$

oder

$$(23) \quad (\mathfrak{b}\hat{\epsilon})^2 = (\eta\mathfrak{b})^2, \quad (\mathfrak{b}\eta)^2 = (\hat{\epsilon}\mathfrak{b})^2, \quad (\mathfrak{b}\zeta)^2 = (\zeta\mathfrak{b})^2,$$

wo \mathfrak{b} ein Kreis ist.

Betrachten wir weiter

$$(24) \quad \begin{cases} (1)\mathfrak{E} = (1)\hat{\epsilon} - (1)\hat{\epsilon}(2)\hat{\epsilon}(2)\hat{\epsilon}, \\ (2)\mathfrak{E} = (2)\hat{\epsilon} - (2)\hat{\epsilon}(3)\hat{\epsilon}(3)\hat{\epsilon}, \\ \dots\dots\dots \\ (n-1)\mathfrak{E} = (n-1)\hat{\epsilon} - (n-1)\hat{\epsilon}(n)\hat{\epsilon}(n)\hat{\epsilon}, \\ (n)\mathfrak{E} = (n)\hat{\epsilon} - (n)\hat{\epsilon}(1)\hat{\epsilon}(1)\hat{\epsilon}, \\ ((t)\hat{\epsilon}(t+1)\hat{\epsilon})^2 = 1, \quad ((n)\hat{\epsilon}(1)\hat{\epsilon})^2 = 1, \end{cases}$$

wo ${}_{(i)}\hat{\epsilon}$ Kugeln in R_n , ${}_{(i)}x$ Berührungspunkte sind, so ergibt sich

$$(25) \quad \begin{cases} (y_{(1)}x) = (y_{(1)}\hat{\epsilon}) - ({}_{(1)}\hat{\epsilon} {}_{(2)}\hat{\epsilon})(y_{(2)}\hat{\epsilon}), \\ (y_{(2)}x) = (y_{(2)}\hat{\epsilon}) - ({}_{(2)}\hat{\epsilon} {}_{(3)}\hat{\epsilon})(y_{(3)}\hat{\epsilon}), \\ \dots\dots\dots \\ (y_{(n)}x) = (y_{(n)}\hat{\epsilon}) - ({}_{(n)}\hat{\epsilon} {}_{(1)}\hat{\epsilon})(y_{(1)}\hat{\epsilon}), \end{cases}$$

oder

$$(26) \quad (y_{(i)}x) = 0, \quad [i = 1, 2, \dots, n],$$

wo die Kugel y in R_n ist, die auf ${}_{(i)}\hat{\epsilon}$ senkrecht ist.

Aus (26) erhalten wir den folgenden

Satz: *Wenn*

$$y \perp {}_{(i)}\hat{\epsilon}, \quad [i = 1, 2, \dots, n],$$

so liegen ${}_{(i)}x$ *auf* y .

Wenn umgekehrt ${}_{(i)}x$ auf y liegen, so haben wir aus (25):

$$(27) \quad \begin{cases} (y_{(1)}\hat{\epsilon}) = ({}_{(1)}\hat{\epsilon} {}_{(2)}\hat{\epsilon})(y_{(2)}\hat{\epsilon}), \\ (y_{(2)}\hat{\epsilon}) = ({}_{(2)}\hat{\epsilon} {}_{(3)}\hat{\epsilon})(y_{(3)}\hat{\epsilon}), \\ \dots\dots\dots \\ (y_{(n)}\hat{\epsilon}) = ({}_{(n)}\hat{\epsilon} {}_{(1)}\hat{\epsilon})(y_{(1)}\hat{\epsilon}), \\ (\hat{\epsilon}_i \hat{\epsilon}_{i+1})^2 = 1, \quad ({}_{(n)}\hat{\epsilon} {}_{(1)}\hat{\epsilon})^2 = 1, \end{cases}$$

oder

$$(28) \quad \begin{cases} (y_{(1)}\hat{\epsilon})^2 = (y_{(2)}\hat{\epsilon})^2, \\ (y_{(2)}\hat{\epsilon})^2 = (y_{(3)}\hat{\epsilon})^2, \\ \dots\dots\dots \\ (y_{(n)}\hat{\epsilon})^2 = (y_{(1)}\hat{\epsilon})^2 \end{cases}$$

oder

$$(29) \quad (\eta_{(1)}\hat{\epsilon})^2 = (\eta_{(2)}\hat{\epsilon})^2 = \dots = (\eta_{(n)}\hat{\epsilon})^2.$$

Daraus kann man wissen, dass

$$(30) \quad \cos^2 \phi_1 = \cos^2 \phi_2 = \dots = \cos^2 \phi_n$$

gilt, wo ϕ_i der Winkel zwischen η und $_{(i)}\hat{\epsilon}$ ist.

Berührt die Kugel η jede $_{(i)}\hat{\epsilon}$, so folgt aus (24)

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\eta_{(1)}\xi) = 1 \pm (_{(1)}\hat{\epsilon}_{(2)}\hat{\epsilon}), \\ (\eta_{(2)}\xi) = 1 \pm (_{(2)}\hat{\epsilon}_{(3)}\hat{\epsilon}), \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ (\eta_{(n)}\xi) = 1 \pm (_{(n)}\hat{\epsilon}_{(1)}\hat{\epsilon}); \end{array} \right.$$

daraus ergibt sich

$$(32) \quad (\eta_{(i)}\xi) = 0,$$

oder

$$(33) \quad (\eta_{(i)}\xi) = 2.$$

In dem Falle (32) liegen $_{(i)}\xi$ auf dem η .

Wenn

$$(34) \quad \cos \phi = \widehat{\eta, \hat{\epsilon}}, \quad \cos \phi' = \widehat{\eta, \hat{\eta}}$$

in (A) gelten, so folgt aus (A)

$$(35) \quad (\eta\xi) = \cos \phi - (\hat{\epsilon}\hat{\eta}) \cos \phi',$$

wo η ein Kreis in R_2 ist.

Wenn

$$(36) \quad \cos \phi_i = \widehat{\eta, _{(i)}\hat{\epsilon}}, \quad [i = 1, 2, \dots, n]$$

in (24) gilt, so kommen aus (24):

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\eta_{(1)})\xi = \cos \phi_1 - (\xi_{(1)}\xi) \cos \phi_2, \\ (\eta_{(2)})\xi = \cos \phi_2 - (\xi_{(2)}\xi) \cos \phi_2, \\ \dots\dots\dots \\ (\eta_{(n-1)})\xi = \cos \phi_{n-1} - (\xi_{(n-1)}\xi) \cos \phi_n, \\ (\eta_{(n)})\xi = \cos \phi_n - (\xi_{(n)}\xi) \cos \phi_1, \end{array} \right.$$

wo η eine Kugel in R_n ist.

Aus (A) folgt

$$(38) \quad \xi' = \xi' - (\xi'\eta)\eta,$$

wenn η konstant ist.

So ergibt sich

$$(39) \quad \bar{\xi} = \xi - (\xi\eta)\eta,$$

wo

$$(40) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = \xi \cos \alpha + \xi' \sin \alpha, \\ \bar{\xi}' = \xi' \cos \alpha + \xi \sin \alpha, \end{cases}$$

gesetzt ist.

Weiter folgt aus (A)

$$(41) \quad \xi + \xi'' = \xi + \xi'' - (\xi + \xi'', \eta)\eta.$$

Hieraus ergibt sich

$$(42) \quad \xi + \xi'' = 0,$$

wenn

$$(43) \quad \xi + \xi'' = 0$$

gilt.

Aus

$$(44) \quad \begin{cases} \xi(a + l/2) = \xi(a + l/2) \\ - \{\xi(a + l/2)\eta(a + l/2)\}\eta(a + l/2) \end{cases}$$

und

$$(45) \quad \chi(a) = \hat{\xi}(a) - (\hat{\xi}(a) \eta(a)) \eta(a)$$

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi(a) \chi(a + l/2) = (\hat{\xi}(a) + l/2) \\ \quad - (\hat{\xi}(a + l/2) \eta(a + l/2)) (\hat{\xi}(a) \eta(a + l/2)) \\ \quad - (\hat{\xi}(a) \eta(a)) (\eta(a) \hat{\xi}(a + l/2)) \\ \quad + (\hat{\xi}(a) \eta(a)) (\hat{\xi}(a + l/2) \eta(a + l/2)) (\eta(a) \eta(a + l/2)), \end{array} \right.$$

wo χ eine Eilinie E in R_2 , l den Umfang von E bezeichnet.

Wenn E ein Kreis ist, so ergibt sich

$$(47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{const} = (\hat{\xi}(a) \hat{\xi}(a + l/2)) - (\hat{\xi}(a + l/2) \eta(a + l/2)) (\hat{\xi}(a) \eta(a + l/2)) \\ \quad - (\hat{\xi}(a) \eta(a)) (\eta(a) \hat{\xi}(a + l/2)) \\ \quad + (\hat{\xi}(a) \eta(a)) (\hat{\xi}(a + l/2) \eta(a + l/2)) (\eta(a) \eta(a + l/2)). \end{array} \right.$$

(C) Wenn beide $\eta = 2(\hat{\xi}\eta)\eta - \hat{\xi}$ und (A) in (4) gleichzeitig bestehen, so folgt

$$(1) \quad 2\chi + \eta = \hat{\xi},$$

wo $(\hat{\xi}\eta)^2 = 1$ ist.

Aus (1) sieht man, dass (1) gültig ist, und η und $\hat{\xi}$ in χ einander berühren.

χ in

$$(2) \quad \chi = (\hat{\xi}\hat{\xi})\eta - (\eta\hat{\xi})\hat{\xi}, \quad (\hat{\xi}\eta) \neq 1,$$

$$(3) \quad \chi = (\eta\eta)\hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta, \quad (\hat{\xi}\eta) \neq 1,$$

$$(4) \quad \chi = (\hat{\xi}\hat{\xi})\eta + (\eta\hat{\xi})\hat{\xi}, \quad (\hat{\xi}\eta)^2 = 1,$$

$$(5) \quad \chi = (\eta\eta)\hat{\xi} + (\hat{\xi}\eta)\eta, \quad (\hat{\xi}\eta)^2 = 1$$

bezeichnen Kreise in R_2 und $\hat{\xi}$, η Kreise in R_1 .

Aus (2) folgt

$$(6) \quad (\chi\hat{\xi}) = 0.$$

Aus (3) ergibt sich

$$(7) \quad (\xi\eta) = 0.$$

Aus (4) kommt

$$(8) \quad (\xi\xi) = 2(\xi\xi)(\xi\eta),$$

oder

$$(9) \quad (\xi\eta) = (\xi\xi)(\eta\eta) + 1;$$

daraus sieht man, dass ξ einen Winkel zwischen ξ und η bildet.

(D) Wenn ein Kreis ξ die zwei Kreise η , ζ in den Punkten v bzw. \bar{v} berührt, so folgt

$$(1) \quad \begin{cases} v = \eta - (\eta\xi)\xi; & (\eta\xi)^2 = 1, \\ \bar{v} = \xi - (\xi\zeta)\zeta, & (\xi\zeta)^2 = 1. \end{cases}$$

Setzt man v , \bar{v} in (1) anstatt v , \bar{v} in THOMSENS Arbeit⁽¹⁾, so ergibt sich

$$(2) \quad \begin{cases} \xi_{\sigma\sigma} = -\xi + \bar{c} \{ \eta - (\eta\xi)\xi \} + c \{ \xi - (\xi\zeta)\zeta \}, \\ v_{\sigma} = -c \xi_{\sigma}, \quad \bar{v}_{\sigma} = -c \xi_{\sigma}. \end{cases}$$

Die Ableitungen dieser Kreise können wir wie oben aus ihnen selbst linear kombinieren.

(E) Es seien p , ξ zwei Kugeln in R_n , und η und ξ zwei Punkte in R_n .

Liegen η auf einer Kugel $p - \xi$, so haben wir

$$(1) \quad (p - \xi)\eta = 0, \quad \eta^2 = 0.$$

Liegen ξ auf einer Kugel $p - \xi$, so folgen

$$(2) \quad (p - \xi)\xi = 0, \quad \xi^2 = 0.$$

Liegen η , ξ auf ξ , so folgen

$$(3) \quad \xi\eta = 0, \quad \xi\xi = 0.$$

Da

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo.: Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd. (1926), S. 127.

$$(4) \quad \eta_i = p_i^k x_k + q_i \eta, \quad \eta \eta = 1, \quad x_i = \partial x / \partial u^i$$

gelten⁽¹⁾.

Wenn p und x einander in η berühren, so entsteht

$$(5) \quad \eta = p - (px) x, \quad (px)^2 = 1;$$

daraus sieht man, dass

$$(6) \quad \eta_i = p_i^k x_k + q_i \{p - (px) x\}$$

gilt.

(F) Aus (A) folgen

$$(1) \quad (xx) = 0, \quad (x\hat{\epsilon}) = 0, \quad (x\eta) = 0;$$

daraus sieht man, dass zwei Kreise $\hat{\epsilon}$ und η in x einander berühren.

Wenn η ein fester Kreis ist, so folgt aus (A)

$$(2) \quad \dot{x} = -\dot{\hat{\epsilon}} + (\dot{\hat{\epsilon}}\eta)\eta, \quad (\dot{\hat{\epsilon}}\eta)^2 = 1,$$

oder

$$(3) \quad (x\dot{x}) = -(\dot{\hat{\epsilon}}x) + (\dot{\hat{\epsilon}}\eta)(x\eta)$$

oder

$$(4) \quad 0 = -(\dot{\hat{\epsilon}}x) + (\dot{\hat{\epsilon}}\eta)(x\eta).$$

(G) Ist η ein Kreis in R_2 , so folgt aus (A)

$$(1) \quad (x\eta) = (\hat{\epsilon}\eta) - (\hat{\epsilon}\eta)(\eta\eta), \quad (\hat{\epsilon}\eta)^2 = 1$$

oder

$$(2) \quad (x\eta) = \cos \phi - (\hat{\epsilon}\eta),$$

wenn η und $\hat{\epsilon}$ einander berühren.

Da $\phi = \widehat{\eta, \hat{\epsilon}}$ ist.

(H) Aus (A) folgt

$$(1) \quad (x\eta) = (\hat{\epsilon}\eta) - (\hat{\epsilon}\eta)(\eta\eta), \quad (\hat{\epsilon}\eta)^2 = 1$$

oder

(1) BLASCHKE, W.: Über die Geo. von LAGUERRE, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., III Bd. S. 181.

$$(2) \quad (\xi\eta) = 1 - (\hat{\xi}\eta) \cos \psi,$$

wo $\psi = \widehat{\eta, \gamma}$ ist. Da die Kreise η und ξ einander berühren.

(I) Sind ξ , η und ζ drei Berührungspunkte der Kreise $\hat{\xi}$, η ; η , ζ bzw. ζ , $\hat{\xi}$ in R_2 , so folgt

$$(1) \quad \begin{cases} \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta, & (\hat{\xi}\eta)^2 = 1, \\ \eta = \eta - (\eta\zeta)\zeta, & (\eta\zeta)^2 = 1, \\ \zeta = \zeta - (\zeta\hat{\xi})\hat{\xi}, & (\zeta\hat{\xi})^2 = 1. \end{cases}$$

Liegen drei Punkte ξ , η und ζ auf jedem der drei Kreise $_{(1)}b$, $_{(2)}b$ und $_{(3)}b$, so folgen

$$(2) \quad (_{(1)}b \xi) = 0, \quad (_{(2)}b \eta) = 0, \quad (_{(3)}b \zeta) = 0,$$

oder

$$(3) \quad \begin{cases} (_{(1)}b \hat{\xi}) = (\hat{\xi}\eta) (_{(1)}b \eta), \\ (_{(2)}b \eta) = (\eta\zeta) (_{(2)}b \zeta), \\ (_{(3)}b \zeta) = (\zeta\hat{\xi}) (_{(3)}b \hat{\xi}), \end{cases}$$

oder

$$(4) \quad \begin{cases} (_{(1)}b \hat{\xi})^2 = (_{(1)}b \eta)^2, \\ (_{(2)}b \eta)^2 = (_{(2)}b \zeta)^2, \\ (_{(3)}b \zeta)^2 = (_{(3)}b \hat{\xi})^2. \end{cases}$$

Aus (4) sieht man, dass

$$(5) \quad \begin{cases} \cos^2 {}_{(1)}\phi = \cos^2 {}_{(1)}\phi', \\ \cos^2 {}_{(2)}\phi = \cos^2 {}_{(2)}\phi', \\ \cos^2 {}_{(3)}\phi = \cos^2 {}_{(3)}\phi' \end{cases}$$

gültig ist, wo $_{(1)}\phi$ der Winkel zwischen $_{(1)}b$ und $\hat{\xi}$, $_{(1)}\phi'$ der zwischen $_{(1)}b$ und η , $_{(2)}\phi$ der zwischen $_{(2)}b$ und η , $_{(2)}\phi'$ der zwischen $_{(2)}b$ und ζ , $_{(3)}\phi$ der zwischen $_{(3)}b$ und ζ , $_{(3)}\phi'$ der zwischen $_{(3)}b$ und $\hat{\xi}$ ist.

Aus (1) folgt

$$(6) \quad (p\xi) = (p\hat{\xi}) - (\hat{\xi}\eta)(p\eta),$$

wo p ein Punkt in R_2 ist.

Ist der Abstand zwischen p und \hat{x} konstant, so kommt aus (6)

$$(7) \quad \text{const.} + (\hat{x}\eta)(p\eta) = (p\hat{x}).$$

(J) Es seien vier Kreise $_{(1)}\hat{\zeta}$, $_{(2)}\hat{\zeta}$, $_{(3)}\hat{\zeta}$ und η in R_2 gegeben, wo $_{(1)}x$ der Berührungspunkt zwischen $_{(1)}\hat{\zeta}$ und η , $_{(2)}x$ der zwischen $_{(2)}\hat{\zeta}$ und η , $_{(3)}x$ der zwischen $_{(3)}\hat{\zeta}$ und η , $_{(1)}y$ der zwischen $_{(1)}\hat{\zeta}$ und $_{(2)}\hat{\zeta}$, $_{(2)}y$ der zwischen $_{(2)}\hat{\zeta}$ und $_{(3)}\hat{\zeta}$ ist. So ergibt sich

$$(1) \quad \begin{cases} _{(1)}x = _{(1)}\hat{\zeta} - (_{(1)}\hat{\zeta}\eta)\eta, & (_{(1)}\hat{\zeta}\eta)^2 = 1, \\ _{(2)}x = _{(2)}\hat{\zeta} - (_{(2)}\hat{\zeta}\eta)\eta, & (_{(2)}\hat{\zeta}\eta)^2 = 1, \\ _{(3)}x = _{(3)}\hat{\zeta} - (_{(3)}\hat{\zeta}\eta)\eta, & (_{(3)}\hat{\zeta}\eta)^2 = 1, \\ _{(1)}y = _{(1)}\hat{\zeta} - (_{(1)}\hat{\zeta}_{(2)}\hat{\zeta})_{(2)}\hat{\zeta}, & (_{(1)}\hat{\zeta}_{(2)}\hat{\zeta})^2 = 1, \\ _{(2)}y = _{(2)}\hat{\zeta} - (_{(2)}\hat{\zeta}_{(3)}\hat{\zeta})_{(3)}\hat{\zeta}, & (_{(2)}\hat{\zeta}_{(3)}\hat{\zeta})^2 = 1; \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(2) \quad \begin{cases} _{(1)}x - _{(1)}y = (_{(1)}\hat{\zeta}_{(2)}\hat{\zeta})_{(2)}\hat{\zeta} - (_{(1)}\hat{\zeta}\eta)\eta, \\ _{(2)}x - _{(2)}y = (_{(2)}\hat{\zeta}_{(3)}\hat{\zeta})_{(3)}\hat{\zeta} - (_{(2)}\hat{\zeta}\eta)\eta. \end{cases}$$

Mit (2) kann man die Länge zwischen $\overline{_{(1)}x_{(2)}y}$ und $_{(2)}x_{(2)}y$ geben.

Aus

$$(3) \quad x^a = \hat{\zeta} - (\hat{\zeta}\eta^a)\eta^a$$

und

$$(4) \quad x^b = \hat{\zeta} - (\hat{\zeta}\eta^b)\eta^b$$

folgt

$$(5) \quad (x^a x^b) = (\hat{\zeta}\eta^a)(\hat{\zeta}\eta^b)(\eta^a \eta^b) - 1$$

oder

$$A^{ab} = (\hat{\zeta}\eta^b)(\hat{\zeta}\eta^a) a^{ab} - 1,$$

wo

$$(6) \quad (x^a x^b) = A^{ab}, \quad (x^a \eta^b) = a^{ab}.$$

gelten

$$(7) \quad (y_{(i)}x) = 0, \quad [i = 1, 2, \dots]$$

in

$$(8) \quad {}_{(i)}x = {}_{(i)}\xi - ({}_{(i)}\xi {}_{(i)}\eta) {}_{(i)}\eta, \quad [i = 1, 2, \dots],$$

so folgt

$$(9) \quad ({}_{(i)}\xi \eta)^2 = ({}_{(i)}\eta \eta)^2.$$

Wenn

$$(10) \quad ({}_{(i)}\xi \eta) = 0$$

in (9), so haben wir

$$(11) \quad ({}_{(i)}\eta \eta) = 0.$$

Wenn ein Kreis η durch die drei Punkte ${}_{(1)}x$, ${}_{(2)}x$, ${}_{(3)}x$ geht, so folgt

$$(12) \quad ({}_{(i)}\xi \eta)^2 = (\eta \eta)^2,$$

wo

$$(13) \quad {}_{(i)}x = {}_{(i)}\xi - ({}_{(i)}\xi \eta) \eta, \quad ({}_{(i)}\xi \eta)^2 = 1$$

gelten.

Aus (13) sieht man, dass

$$(14) \quad \eta \equiv \eta$$

gilt.

Im allgemeinen ist gültig

$$\eta \equiv \eta$$

für

$$(15) \quad ({}_{(i)}\xi \eta)^2 = (\eta \eta)^2, \quad [i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots],$$

wo ${}_{(i)}\xi$, η Kreise in R_2 sind. ${}_{(1)}x$, ${}_{(2)}x$ und ${}_{(3)}x$ bezeichnen drei Punkte auf R_2 .

(K) Es seien drei Kreise ξ , η und ζ in R_2 gegeben, wo x der Berührungspunkt von ξ und η , y der von ξ und ζ , z der von η und ζ ist, so folgt

$$(1) \quad \begin{cases} x = \xi - (\xi \eta) \eta, & (\xi \eta)^2 = 1, \\ y = \xi - (\xi \zeta) \zeta, & (\xi \zeta)^2 = 1, \\ z = \eta - (\eta \zeta) \zeta, & (\eta \zeta)^2 = 1. \end{cases}$$

Ist ϕ ein Kreis, der durch die Punkte η , ξ und ζ geht, so folgen

$$(2) \quad (\eta\phi) = 0, \quad (\xi\phi) = 0, \quad (\zeta\phi) = 0$$

oder

$$(3) \quad (\hat{\xi}\phi) = (\hat{\xi}\eta)(\phi\eta), \quad (\hat{\xi}\phi) = (\hat{\xi}\zeta)(\phi\zeta), \quad (\eta\phi) = (\eta\zeta)(\phi\zeta)$$

oder

$$(4) \quad (\hat{\xi}\phi)^2 = (\eta\phi)^2, \quad (\hat{\xi}\phi)^2 = (\zeta\phi)^2, \quad (\eta\phi)^2 = (\zeta\phi)^2$$

d. h.

$$(5) \quad (\hat{\xi}\phi)^2 = (\eta\phi)^2 = (\zeta\phi)^2.$$

(5) ist unsre Bedingung.

Wenn drei Punkte ξ , η und ζ auf einer Gerade liegen, so folgt

$$(6) \quad a \{ \hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta \} + b \{ \hat{\xi} - (\hat{\xi}\zeta)\zeta \} + c \{ \eta - (\eta\zeta)\zeta \} = 0,$$

wo a und b skalare Gröfszen sind.

(L) Wenn ξ der Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\xi}$ und η in R_2 , so folgt

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta, \quad \text{wo} \quad (\hat{\xi}\eta)^2 = 1.$$

Wenn ein Kreis ζ die drei Punkte ξ , η und ζ hindurchgeht, so folgen

$$(2) \quad 0 = (\zeta\xi) = (\zeta\hat{\xi}) - (\hat{\xi}\eta)(\zeta\eta), \quad (\zeta\eta) = 0, \quad (\zeta\hat{\xi}) = 0;$$

daraus ergeben sich

$$(3) \quad (\zeta\eta) = 0, \quad (\zeta\hat{\xi}) = 0, \quad (\zeta\hat{\xi})^2 = (\zeta\eta)^2.$$

(3) ist unsre Bedingung.

Aus

$$(4) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\omega\eta)\omega\eta, \quad (\hat{\xi}\omega\eta)^2 = 1, \quad [i = 1, 2, \dots],$$

folgt

$$(5) \quad (\zeta\hat{\xi}) = (\hat{\xi}\omega\eta)(\zeta\omega\eta)$$

oder

$$(6) \quad (\zeta\hat{\xi})^2 = (\zeta\omega\eta)^2;$$

daraus ergibt sich

$$(7) \quad \cos^2 \angle \varphi = \text{const.},$$

wenn ξ , ζ und $\hat{\xi}$ gegeben sind. Da $\angle \varphi = \widehat{\zeta, \angle \eta}$.

Ist ein Kreis ζ auf zwei Kreise $\hat{\xi}$ und η in (1) senkrecht, so folgen

$$(8) \quad (\zeta \hat{\xi}) = 0, \quad (\zeta \eta) = 0;$$

somit kommt aus (1) und (8)

$$(9) \quad (\xi \zeta) = 0,$$

so folgt der

Satz: Wenn ein Kreis ζ auf $\hat{\xi}$ und η senkrecht ist, so geht ζ durch den Punkt ξ .

Sind

$$(10) \quad (\zeta \hat{\xi}) = 1, \quad (\zeta \eta) = 0$$

so erhalten wir

$$(11) \quad (\xi \zeta) = 1.$$

Sind

$$(12) \quad (\zeta \hat{\xi}) = 0, \quad (\zeta \eta) = 1,$$

so haben wir

$$(13) \quad (\xi \zeta)^2 = 1;$$

so folgt der

Satz: Wenn ζ auf η senkrecht ist und ζ , $\hat{\xi}$ sich berühren, so besteht (11).

Wenn ζ auf $\hat{\xi}$ senkrecht ist und ζ , η sich berühren, so folgt (13), da $\hat{\xi}$ und η in (1) stehen.

(M) Gelten

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta, \quad (\hat{\xi} \eta)^2 = 1$$

und

$$(2) \quad \begin{cases} \xi + d\xi = \{\hat{\xi} + d\hat{\xi}\} - (\hat{\xi} + d\hat{\xi}, \eta + d\eta) \{\eta + d\eta\}, \\ (\hat{\xi} + d\hat{\xi}, \eta + d\eta)^2 = 1 \end{cases}$$

zugleich, so folgt

$$(3) \quad \begin{cases} d\xi + (\eta d\hat{\xi})\eta + (\hat{\xi}d\eta)\eta + (d\hat{\xi}d\eta)\eta + (\hat{\xi}\eta)d\eta \\ + (\eta d\hat{\xi})d\eta + (\hat{\xi}d\eta)d\eta + (d\hat{\xi}d\eta)d\eta = 0. \end{cases}$$

da

$$(4) \quad \begin{cases} \{(\eta d\hat{\xi}) + (\hat{\xi}d\eta) + (d\hat{\xi}d\eta)\} \{2(\hat{\xi}\eta) + (\eta d\hat{\xi}) + (\hat{\xi}d\eta) \\ + (d\hat{\xi}d\eta)\} = 0. \end{cases}$$

Wenn

$$(5) \quad (d\hat{\xi}d\eta) = 1$$

in (3), (4) gelten, so ergeben sich aus (3), (4 :

$$(6) \quad \begin{cases} d\xi + (\eta d\hat{\xi})\eta + (\hat{\xi}d\eta)\eta + \eta + (\hat{\xi}\eta)d\eta \\ + (\eta d\hat{\xi})d\eta + (\hat{\xi}d\eta)d\eta + d\eta = 0, \end{cases}$$

$$(7) \quad \{(\eta d\hat{\xi}) + (\hat{\xi}d\eta) + 1\} \{2(\hat{\xi}\eta) + (\eta d\hat{\xi}) + (\hat{\xi}d\eta) + 1\} = 0.$$

(N) Gelten

$$(1) \quad {}_{(1)}\hat{\xi}_{(2)}\hat{\xi} = {}_{(2)}\hat{\xi}_{(3)}\hat{\xi} = {}_{(3)}\hat{\xi}_{(4)}\hat{\xi} = \dots = {}_{(n)}\hat{\xi}_{(1)}\hat{\xi}$$

in

$$(2) \quad \begin{cases} {}_{(1)}\hat{\xi} = {}_{(1)}\hat{\xi} - ({}_{(1)}\hat{\xi}_{(1)}\eta) {}_{(1)}\eta, & ({}_{(1)}\hat{\xi}_{(1)}\eta)^2 = 1, \\ {}_{(2)}\hat{\xi} = {}_{(2)}\hat{\xi} - ({}_{(2)}\hat{\xi}_{(2)}\eta) {}_{(2)}\eta, & ({}_{(2)}\hat{\xi}_{(2)}\eta)^2 = 1, \\ {}_{(3)}\hat{\xi} = {}_{(3)}\hat{\xi} - ({}_{(3)}\hat{\xi}_{(3)}\eta) {}_{(3)}\eta, & ({}_{(3)}\hat{\xi}_{(3)}\eta)^2 = 1, \\ \dots\dots\dots \\ {}_{(n)}\hat{\xi} = {}_{(n)}\hat{\xi} - ({}_{(n)}\hat{\xi}_{(n)}\eta) {}_{(n)}\eta, & ({}_{(n)}\hat{\xi}_{(n)}\eta)^2 = 1, \end{cases}$$

so ergeben sich

$$(3) \quad \begin{cases} ({}_{(1)}\hat{\xi}_{(1+1)}\hat{\xi}) - ({}_{(1)}\hat{\xi}_{(1)}\eta)({}_{(1+1)}\hat{\xi}_{(1)}\eta) - ({}_{(1+1)}\hat{\xi}_{(1+1)}\eta) {}_{(1)}\hat{\xi}_{(1-1)}\eta \\ = ({}_{(1+1)}\hat{\xi}_{(1+2)}\hat{\xi}) - ({}_{(1+1)}\hat{\xi}_{(1+1)}\eta)({}_{(1+2)}\hat{\xi}_{(1+1)}\eta) \\ - ({}_{(1+2)}\hat{\xi}_{(1+2)}\eta)({}_{(1+1)}\hat{\xi}_{(1+2)}\eta), \end{cases}$$

$$(4) \quad ({}_{(1)}\hat{\xi}_{(1)}\eta)^2 = 1, \quad ({}_{(1+1)}\hat{\xi}_{(1+1)}\eta)^2 = 1, \quad ({}_{(1+2)}\hat{\xi}_{(1+2)}\eta)^2 = 1,$$

$$(5) \quad {}_{(n-1)}\xi = {}_{(1)}\xi, \quad {}_{(n+1)}\eta = {}_{(1)}\eta, \quad [i = 1, 2, 3, \dots, n-1].$$

Wenn

$$(6) \quad ({}_{(i)}\xi {}_{(i)}\eta) = 1, \quad ({}_{(i+1)}\xi {}_{(i+1)}\eta) = 1, \quad ({}_{(i+2)}\xi {}_{(i+2)}\eta) = 1$$

in (4) gültig sind, so folgt aus (3)

$$(7) \quad \begin{cases} ({}_{(i)}\xi {}_{(i+1)}\xi) - ({}_{(i+1)}\xi {}_{(i)}\eta) - ({}_{(i)}\xi {}_{(i+1)}\eta) \\ = ({}_{(i+1)}\xi {}_{(i+2)}\xi) - ({}_{(i+2)}\xi {}_{(i+1)}\eta) - ({}_{(i+1)}\eta {}_{(i+2)}\eta). \end{cases}$$

(O) Gelten

$$(1) \quad \xi + d\xi = \{\xi + d\xi\} - (\{\xi + d\xi\}, \eta) \eta, \quad (\xi + d\xi, \eta)^2 = 1,$$

und

$$(2) \quad \xi = \xi - (\xi \eta) \eta, \quad (\xi \eta)^2 = 1,$$

so folgt

$$(3) \quad d\xi = d\xi - (d\xi, \eta) \eta,$$

wo

$$(4) \quad (d\xi \eta) = 0$$

oder

$$(5) \quad (d\xi \eta) = -2(\xi \eta).$$

Aus (3) und (4) kommt

$$(6) \quad d\xi = d\xi,$$

Aus (3) und (5) bekommt man

$$(7) \quad d\xi = d\xi + 2(\xi \eta) \eta.$$

Nehmen wir drei Punkte

$$(8) \quad {}_{(i)}\xi \quad [i = 1, 2, 3]$$

auf einem festen Kreis η an, so erhält man

$$(9) \quad {}_{(i)}\xi = {}_{(i)}\xi - ({}_{(i)}\xi \eta) \eta, \quad [i = 1, 2, 3];$$

daraus kann man σ^2 und F in meiner Formel⁽¹⁾

(1) NAKAZIMA, S.: Some Inequalities between the Fundamental Quantities of the Triangle, Tôhoku Math. Journ. 25 (1925), p. 119.

$$(10) \quad 2 d^2 \leq \sigma^2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} F$$

berechnen.

Betrachten wir zwei Punkte ${}_{(1)}\xi$ und ${}_{(2)}\xi$, so folgt

$$(11) \quad l^2 = (\xi_{(1)}\eta)(\xi_{(2)}\eta)({}_{(1)}\eta{}_{(2)}\eta) - 1,$$

wo

$$(12) \quad {}_{(1)}\xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} {}_{(1)}\eta) {}_{(1)}\eta, \quad {}_{(2)}\xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} {}_{(2)}\eta) {}_{(2)}\eta$$

sind. Da

$$(13) \quad l^2 = ({}_{(1)}\xi {}_{(2)}\xi)$$

gesetzt ist.

(P) Gelten

$$(1) \quad \eta = 2(\beta \hat{\xi}) \hat{\xi} - \beta$$

und

$$(2) \quad \eta + d\eta = 2(\beta, \hat{\xi} + d\hat{\xi}) \{\hat{\xi} + d\hat{\xi}\} - \beta,$$

so folgt

$$(3) \quad d\eta = 2(\beta d\hat{\xi}) \hat{\xi} + 2(\beta \hat{\xi}) d\hat{\xi} + 2(\beta d\hat{\xi}) d\hat{\xi}.$$

Aus

$$(4) \quad \eta^\alpha = 2(\beta^\alpha \hat{\xi}) \hat{\xi} - \beta^\alpha, \quad [\alpha = \text{I, II}]$$

und

$$(5) \quad \eta^\beta = 2(\beta^\beta \hat{\xi}) \hat{\xi} - \beta^\beta, \quad [\beta = \text{I, II}]$$

folgt

$$(6) \quad (\eta^\alpha \eta^\beta) = (\beta^\alpha \beta^\beta)$$

oder

$$(7) \quad A^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta},$$

wo

$$(8) \quad A^{\alpha\beta} = (\eta^\alpha \eta^\beta), \quad a^{\alpha\beta} = (\beta^\alpha \beta^\beta)$$

gesetzt sind.

(Q) Setzen wir

$$(1) \quad \xi = a + \varepsilon \bar{a}$$

in

$$(2) \quad \chi = \xi - (\xi\eta)\eta$$

ein, wo ε der Rechenregel

$$(3) \quad \varepsilon^2 = 0$$

genügt, und erhalten einen dual-komplexen oder kurz dualen Vektor ξ , wo ξ , a , \bar{a} und η Kreise in R_2 sind.

Aus (1), (2) kann man haben:

$$(4) \quad \chi = \{a + (a\eta)\eta\} + \varepsilon \{\bar{a} + (\bar{a}\eta)\eta\}.$$

Wenn \bar{a} , ξ , a in (1) Kreise in R_2 sind, so folgt

$$(5) \quad \xi^2 = \{a + \varepsilon \bar{a}\}^2 = a^2 + 2\varepsilon a\bar{a} = 1;$$

daraus ergibt sich

$$(6) \quad a\bar{a} = 0,$$

d. h. müssen a und \bar{a} aufeinander senkrecht sein.

Weiter setzen wir

$$(7) \quad \eta = a + \varepsilon \bar{a}$$

in

$$(8) \quad \chi = \xi - (\xi\eta)\eta$$

ein, so folgt aus (7), (8)

$$(9) \quad \chi = (\xi a) + \varepsilon \{(\xi \bar{a})a + (\xi a)\bar{a}\}.$$

(R) Gelten

$$(1) \quad \chi + d\chi = \xi - (\xi, \eta + d\eta)(\eta + d\eta), \quad (\xi, \eta + d\eta)^2 = 1$$

und

$$(2) \quad \chi = \xi - (\xi\eta)\eta, \quad (\xi\eta)^2 = 1$$

zugleich, so folgt

$$(3) \quad d\xi + (\hat{\xi} d\eta) \tau_l + (\hat{\xi} \eta) d\tau_l + (\hat{\xi} d\tau_l) d\tau_l = 0,$$

wo

$$(4) \quad (\hat{\xi} d\tau_l) \{(\hat{\xi} d\tau_l) + 2(\hat{\xi} \eta)\} = 0$$

ist.

Aus (4) folgt

$$(5) \quad (\hat{\xi} d\tau_l) = 0$$

oder

$$(6) \quad (\hat{\xi} d\eta) = -2(\hat{\xi} \eta).$$

Aus (3) und (5) ergibt sich

$$(7) \quad d\xi + (\hat{\xi} \eta) d\tau_l = 0.$$

Aus (3) und (6) folgt

$$(8) \quad d\xi - 2(\hat{\xi} \eta) \tau_l + (\hat{\xi} \eta) d\tau_l - 2(\hat{\xi} \tau_l) d\tau_l = 0$$

oder

$$(9) \quad d\xi - 2(\hat{\xi} \eta) \tau_l - (\hat{\xi} \tau_l) d\tau_l = 0.$$

(S) Aus

$$(1) \quad {}_{(1)}\xi = {}_{(1)}\hat{\xi} - ({}_{(1)}\hat{\xi} {}_{(1)}\tau_l) {}_{(1)}\tau_l, \quad ({}_{(1)}\hat{\xi} {}_{(1)}\tau_l)^2 = 1$$

und

$$(2) \quad {}_{(2)}\xi = {}_{(2)}\hat{\xi} - ({}_{(2)}\hat{\xi} {}_{(2)}\tau_l) {}_{(2)}\tau_l, \quad ({}_{(2)}\hat{\xi} {}_{(2)}\tau_l)^2 = 1$$

kommt

$$(3) \quad ({}_{(1)}\xi {}_{(2)}\xi) = -({}_{(1)}\hat{\xi} {}_{(1)}\tau_l) - ({}_{(2)}\hat{\xi} {}_{(2)}\tau_l),$$

wenn

$$(4) \quad \begin{cases} ({}_{(1)}\hat{\xi} {}_{(2)}\hat{\xi}) = 0, & ({}_{(1)}\tau_l {}_{(2)}\tau_l) = 0, \\ ({}_{(2)}\hat{\xi} {}_{(1)}\tau_l) = 1, & ({}_{(1)}\hat{\xi} {}_{(2)}\tau_l) = 1 \end{cases}$$

gilt, so folgt

$$(5) \quad ({}_{(1)}\xi {}_{(2)}\xi) = -\{({}_{(1)}\hat{\xi} {}_{(1)}\hat{\xi}) + ({}_{(2)}\hat{\xi} {}_{(2)}\tau_l)\};$$

daraus sieht man, dass $({}_{(1)}\hat{\xi} {}_{(1)}\tau_l)$ und $({}_{(2)}\hat{\xi} {}_{(2)}\tau_l)$ den folgenden Wert

nehmen :

$$(6) \quad ({}_{(1)}\hat{\xi}({}_1\eta)) = -1, \quad ({}_{(2)}\hat{\xi}({}_2\eta)) = -1;$$

$$(7) \quad ({}_{(1)}\hat{\xi}({}_1\eta)) = 1, \quad ({}_{(2)}\hat{\xi}({}_2\eta)) = -1$$

oder

$$(8) \quad ({}_{(1)}\hat{\xi}({}_1\eta)) = -1, \quad ({}_{(2)}\hat{\xi}({}_2\eta)) = 1,$$

wenn der Abstand zwischen ${}_{(1)}\xi$ und ${}_{(2)}\xi$ reell ist.

Weiter folgt aus (1) und (2)

$$(9) \quad ({}_{(1)}\xi({}_2\xi)) = 2 - ({}_{(2)}\hat{\xi}({}_1\eta)) - ({}_{(1)}\hat{\xi}({}_2\eta)),$$

wenn

$$(10) \quad \begin{cases} ({}_{(1)}\hat{\xi}({}_1\eta)) = 1, & ({}_{(2)}\hat{\xi}({}_2\eta)) = 1, \\ ({}_{(1)}\hat{\xi}({}_2\hat{\xi})) = 1, & ({}_{(1)}\eta({}_2\eta)) = 1 \end{cases}$$

gilt; daraus sieht man, dass sich

$$(11) \quad ({}_{(2)}\hat{\xi}({}_1\eta)) + ({}_{(1)}\hat{\xi}({}_2\eta)) = 2$$

ergibt, wenn der Abstand zwischen ${}_{(1)}\xi$ und ${}_{(2)}\xi$ Null gleich ist.

Aus

$$\xi = {}_{(i)}\hat{\xi} - ({}_{(i)}\hat{\xi}\eta)\eta, \quad [i = 1, 2]$$

folgt

$$(12) \quad (\eta\eta) = -({}_{(i)}\hat{\xi}\eta)(\eta\eta)$$

oder

$$(13) \quad (\eta\eta)^2 = (\eta\eta)^2$$

wenn

$$(14) \quad \eta \perp {}_{(i)}\hat{\xi}$$

gilt, wo η ein Kreis in R_2 ist.

Aus

$$(15) \quad {}_{(i)}\xi = {}_{(i)}\hat{\xi} - ({}_{(i)}\hat{\xi}\eta)\eta, \quad [i = 1, 2]$$

folgt

$$(16) \quad ({}_{(1)}\hat{\xi}({}_2\hat{\xi})) = ({}_{(1)}\hat{\xi}\eta)({}_2\hat{\xi}\eta)$$

wenn

$$(17) \quad F \equiv (x_1 x_2 x) = 0.$$

(T) Aus

$$(1) \quad x = \hat{\varepsilon} - (\hat{\varepsilon}\eta)\eta$$

und

$$(2) \quad y = 2(\hat{\varepsilon}\eta)\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}$$

folgt

$$(3) \quad (xy) = -(\hat{\varepsilon}\eta) - (\hat{\varepsilon}\eta)(\eta\hat{\varepsilon})$$

wenn

$$(4) \quad (\hat{\varepsilon}\eta)^2 = 1$$

gelten, wo y in (2) den Inversepunkt und x in (1) den Berührungspunkt bezeichnet. Da $\hat{\varepsilon}$ und η Kreise in R_2 sind, bezeichnet $1/(xy)$ den Abstand zwischen zwei Punkten x und y .

Aus (3) sieht man, dass, wenn

$$(\hat{\varepsilon}\eta) = 1,$$

so

$$(5) \quad (xy) = -(\hat{\varepsilon}\eta) - (\eta\hat{\varepsilon}),$$

oder

$$(6) \quad (\hat{\varepsilon}\eta) + (\eta\hat{\varepsilon}) \leq 0$$

folgt.

Wir betrachten

$$(7) \quad x = \{(\hat{\varepsilon}\eta)\hat{\varepsilon} - \eta\}, \quad (\hat{\varepsilon}\eta)^2 = 1.$$

Es folgen

$$(8) \quad (x\hat{\varepsilon}) = 0, \quad (x\eta) = 0, \quad (x\hat{\varepsilon}) = 0;$$

darin erkennt man, dass x der Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\varepsilon}$ und η in R_2 ist.

Von

$$(9) \quad \bar{x} = \xi - (\xi\eta)\eta, \quad (\xi\eta)^2 = 1$$

gilt das gleiche.

Aus (7) und (9) folgt

$$(10) \quad (x\bar{x}) = 0$$

d. h.

$$(11) \quad x \equiv \bar{x};$$

daraus sieht man, dass x nicht anders als \bar{x} ist.

Wenn x auf einem Kreise η in R_2 liegt, so folgt

$$(12) \quad 0 = (x\eta) = (\xi\eta)(\xi\eta) - (\eta\eta),$$

oder

$$(13) \quad (\xi\eta)(\xi\eta) = (\eta\eta)$$

d. h.

$$(14) \quad (\xi\eta)^2 = (\eta\eta)^2.$$

Aus

$$(15) \quad \bar{x} = (\xi\bar{\eta})\xi - \eta, \quad (\bar{\xi}\bar{\eta})^2 = 1$$

und

$$(16) \quad x = \xi - (\xi\eta)\eta, \quad (\xi\eta)^2 = 1$$

ergibt sich

$$(17) \quad (x\bar{x}) \equiv l^2 = (\xi\bar{\eta})(\bar{\xi}\xi) - (\xi\bar{\eta}) - (\xi\bar{\eta})(\xi\eta)(\bar{\xi}\eta) + (\xi\eta)(\eta\bar{\eta}),$$

wo l die Länge zwischen zwei Punkten x und \bar{x} ist.

Aus (17) folgt

$$(18) \quad l^2 = 2 - (\xi\bar{\eta}) - (\bar{\xi}\eta)$$

wenn

$$(19) \quad (\xi\xi) = 1, \quad (\eta\bar{\eta}) = 1, \quad (\xi\bar{\eta}) = 1, \quad (\xi\eta) = 1$$

gilt.

Aus (18) ergibt sich

$$(20) \quad (\xi\bar{\eta}) + (\bar{\xi}\eta) \leq 2$$

wenn

$$(21) \quad l' \geq 0$$

ist.

Liegen drei Punkte

$$(22) \quad \begin{cases} (1)\xi = (1)\hat{\xi}(1)\eta, & (1)\hat{\xi} - (1)\eta, & (1)\hat{\xi}(1)\eta)^2 = 1, \\ (2)\xi = (2)\hat{\xi} - (2)\hat{\xi}(2)\eta, & (2)\eta, & (2)\hat{\xi}(2)\eta)^2 = 1, \\ (3)\xi = (3)\hat{\xi}(3)\eta, & (3)\hat{\xi} - (3)\eta, & (3)\hat{\xi}(3)\eta)^2 = 1 \end{cases}$$

auf einem Kreis η , so folgen

$$(23) \quad \begin{cases} (1)\hat{\xi}(1)\eta, & (1)\hat{\xi}\eta = (1)\eta\eta, & (2)\hat{\xi}\eta = (2)\hat{\xi}(2)\eta, & (2)\eta\eta, \\ (3)\hat{\xi}(3)\eta, & (3)\hat{\xi}\eta = (3)\eta\eta. \end{cases}$$

(23) ist unsre Bedingung.

Aus

$$(24) \quad \xi^a = \hat{\xi}^a - (\hat{\xi}^a \eta) \eta$$

und

$$(25) \quad \xi^b = \hat{\xi}^b - (\hat{\xi}^b \eta) \eta$$

folgt

$$(26) \quad l' \equiv (\xi^a \xi^b) = A^{ab} - (\hat{\xi}^a \eta) (\hat{\xi}^b \eta)$$

wo

$$(27) \quad A^{ab} = (\hat{\xi}^a \hat{\xi}^b), \quad l^a \equiv (\xi^a \xi^a)$$

gesetzt sind. Da $\hat{\xi}^a$ und η Kugeln in R_3 sind.

(U) Es gilt

$$(1) \quad (\hat{\xi}\eta) = (\hat{\xi}\eta)(\eta\eta),$$

wenn ein Punkt ξ in $\xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta$ auf einem Kreis η liegt.

Nun setzen wir

$$(2) \quad \eta + r\xi$$

anstatt η in (1), so folgt

$$(3) \quad (\hat{\xi}, \eta + r\xi) = (\hat{\xi}\eta)(\eta, \eta + r\xi),$$

wo (2) sich in \mathfrak{x} berührende Kreise bedeuten, da γ ergeben sich

Wenn (3) für jeden Wert von γ gilt, so entstehen

$$(4) \quad (\hat{\xi}\mathfrak{y}) = (\hat{\xi}\gamma)(\gamma\mathfrak{y}), \quad (\mathfrak{x}\hat{\xi}) = (\hat{\xi}\gamma)(\mathfrak{x}\gamma),$$

wo

$$(\hat{\xi}\gamma)^2 = 1.$$

Aus (4) ergeben sich

$$(5) \quad (\hat{\xi}\mathfrak{y})^2 = (\gamma\mathfrak{y})^2, \quad (\mathfrak{x}\hat{\xi})^2 = (\mathfrak{x}\gamma)^2.$$

(5) ist unsre Bedingung.

(5') ist nicht anders als

$$(6) \quad \cos^2 \varphi = \cos^2 \psi,$$

wo φ der Winkel zwischen $\hat{\xi}$ und \mathfrak{y} , ψ der zwischen γ und \mathfrak{y} ist.

Aus

$$(7) \quad \mathfrak{x} = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\gamma)\gamma$$

und

$$(8) \quad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{x}\hat{\xi})\hat{\xi} - \mathfrak{x}$$

folgt

$$(9) \quad \mathfrak{y} = -\mathfrak{x},$$

so kann man wissen, dass der inverse Punkt in bezug auf $\hat{\xi} - \mathfrak{x}$ ist.

Wir betrachten

$$(10) \quad \mathfrak{x} = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\gamma)\gamma, \quad (\hat{\xi}\gamma)^2 = 1,$$

wo $\hat{\xi}$ und γ Kreise in R_2 , \mathfrak{x} ein Punkt in R_2 ist.

Ist \mathfrak{y} ein Kreis in R_2 , so folgt

$$(11) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{y}) = (\hat{\xi}\mathfrak{y}) - (\hat{\xi}\gamma)(\gamma\mathfrak{y}).$$

Aus (11) sieht man, dass \mathfrak{x} auf \mathfrak{y} liegt, wenn

$$(12) \quad \hat{\xi} \mid \mathfrak{y}, \quad \gamma \mid \mathfrak{y}$$

sind.

Wenn (13) $(\mathfrak{y}\hat{\xi}) = 1$, $\mathfrak{y} \perp \gamma$, so folgt

Weiter gilt $(\xi\eta)^2 = 1$, wenn

$$(14) \quad (\eta\gamma) = 1, \quad \eta \perp \xi.$$

Liegt ξ auf dem Kreis η , so folgt aus (7)

$$(15) \quad 0 = (\eta\xi) = (\xi\eta) - (\xi\eta)(\eta\gamma);$$

daraus ergibt sich

$$(16) \quad (\xi\eta)^2 - (\eta\gamma)^2 = 0$$

oder

$$(17) \quad [(\xi\eta) + (\eta\gamma)][(\xi\eta) - (\eta\gamma)] = 0$$

oder

$$(18) \quad [\cos \varphi + \cos \varphi'] [\cos \varphi - \cos \varphi'] = 0.$$

Aus (18) haben wir

$$(19) \quad \cos \varphi = \cos \varphi',$$

wenn

$$(20) \quad \cos \varphi + \cos \varphi' \neq 0,$$

wo

$$(21) \quad \widehat{\xi, \eta} = \varphi, \quad \widehat{\eta, \gamma} = \varphi'$$

gesetzt ist.

Gilt

$$(22) \quad \begin{cases} \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\gamma)\gamma \\ \quad = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\bar{\eta})\bar{\eta}, \end{cases}$$

so folgt

$$(23) \quad \hat{\xi} - \hat{\xi} = (\hat{\xi}\gamma)\gamma - (\hat{\xi}\bar{\eta})\bar{\eta}$$

oder

$$(24) \quad (\eta\hat{\xi}) - (\eta\hat{\xi}) = (\hat{\xi}\gamma)(\eta\gamma) - (\hat{\xi}\bar{\eta})(\eta\bar{\eta}),$$

wo η ein Kreis in R_4 ist.

Aus (24) sieht man, dasz, wenn

$$(25) \quad (\eta \hat{\xi}) = 0, \quad (\eta \bar{\xi}) = 0, \quad (\eta \gamma) = 0,$$

so

$$(26) \quad \eta \perp \bar{\eta}$$

folgt, wenn

$$(27) \quad (\eta \hat{\xi}) = 1, \quad (\eta \bar{\xi}) = 1,$$

so

$$(28) \quad (\hat{\xi} \gamma)^2 = (\eta \gamma)^2,$$

wenn

$$(29) \quad (\eta \hat{\xi}) = 1, \quad (\eta \bar{\xi}) = 0, \quad (\eta \bar{\gamma}) = 0,$$

so

$$(30) \quad (\eta \gamma)^2 = 1$$

wenn

$$(31) \quad (\eta \gamma) = 0 = (\eta \bar{\gamma}),$$

so

$$(32) \quad (\eta \hat{\xi}) = (\eta \bar{\xi})$$

oder

$$(33) \quad \cos \varphi = \cos \psi$$

wo

$$(34) \quad \varphi = \widehat{\eta, \hat{\xi}}, \quad \psi = \widehat{\eta, \bar{\xi}}$$

ist.

Gilt

$$(35) \quad \begin{cases} \bar{\eta} = 2(\hat{\xi} \hat{\xi}) \hat{\xi} - \hat{\xi} \\ \quad = 2(\bar{\xi} \bar{\xi}) \bar{\xi} - \bar{\xi}, \end{cases}$$

so folgt

$$(36) \quad 2(\hat{\xi} \hat{\xi}) \hat{\xi} - 2(\bar{\xi} \bar{\xi}) \bar{\xi} = \hat{\xi} - \bar{\xi};$$

daraus ergibt sich

$$(37) \quad 2(\mathfrak{z} \hat{\epsilon})(\mathfrak{y} \hat{\epsilon}) - 2(\bar{\mathfrak{z}} \bar{\hat{\epsilon}})(\mathfrak{y} \hat{\epsilon}) = (\mathfrak{y} \mathfrak{z}) - (\mathfrak{y} \bar{\mathfrak{z}}),$$

wo $\hat{\epsilon}$, $\bar{\hat{\epsilon}}$, \mathfrak{z} , $\bar{\mathfrak{z}}$, \mathfrak{y} , $\bar{\mathfrak{y}}$ Kreise in R_2 sind.

Aus (37) sieht man, dasz

$$(38) \quad (\mathfrak{y} \bar{\mathfrak{z}}) = 0$$

gilt, wenn

$$(39) \quad (\mathfrak{y} \hat{\epsilon}) = (\mathfrak{y} \bar{\hat{\epsilon}}) = (\mathfrak{y} \mathfrak{z}) = 0$$

sind.

Wenn

$$(40) \quad (\mathfrak{y} \mathfrak{z}) = (\mathfrak{y} \bar{\mathfrak{z}}),$$

so

$$(41) \quad (\mathfrak{y} \hat{\epsilon})^2 = (\mathfrak{y} \bar{\hat{\epsilon}})^2.$$

Wenn

$$(42) \quad (\mathfrak{y} \hat{\epsilon}) = (\mathfrak{y} \bar{\mathfrak{z}}) = (\mathfrak{y} \bar{\hat{\epsilon}}) = 0,$$

so

$$(43) \quad (\mathfrak{y} \hat{\epsilon}) = 0.$$

Aus

$$(44) \quad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{z} \hat{\epsilon}) \hat{\epsilon} - \mathfrak{z}$$

folgt

$$(45) \quad (\mathfrak{v} \mathfrak{y}) = 2(\mathfrak{z} \hat{\epsilon})(\mathfrak{v} \hat{\epsilon}) - (\mathfrak{z} \mathfrak{v}),$$

wo \mathfrak{v} , \mathfrak{y} , $\hat{\epsilon}$ und \mathfrak{z} Kreise in R_2 bedeuten.

Aus (45) sieht man, dasz

(1) Wenn

$$(\mathfrak{v} \mathfrak{y}) = 0, \quad (\mathfrak{v} \mathfrak{z}) = 0$$

so folgt

$$\mathfrak{z} \perp \hat{\epsilon} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{v} \perp \hat{\epsilon}.$$

(2) Wenn

$$(\mathfrak{v} \mathfrak{y}) = 1, \quad (\mathfrak{z} \mathfrak{v}) = 0,$$

so

$$1 = 2 (\xi \hat{\xi}) (\eta \hat{\eta}).$$

(3) Wenn

$$(\eta \eta) = 0, \quad (\xi \eta) = 1,$$

so

$$2 (\xi \hat{\xi}) (\eta \hat{\eta}) = 1.$$

(V) Wir betrachten

$$(1) \quad \xi(t) = \hat{\xi}(t) - (\hat{\xi}(t) \eta) \eta,$$

wo t ein Parameter ist, so liegt ξ in (1) immer auf einem Kreise γ in R_2 , da η ein fester Kreis in R_2 ist.

Man hat für die Bogenlänge des Kreises

$$(2) \quad s(t) = \int_a^t \sqrt{(\xi')^2} d\tau = \int_a^t \sqrt{[\xi' - (\xi' \eta) \eta]^2} d\tau.$$

Es sei

$$(3) \quad \xi = \xi(s) \quad \text{mit} \quad \dot{\xi}^2 = 1$$

ein Kreis, so folgt⁽¹⁾

$$(4) \quad k = (\dot{\xi}, \ddot{\xi}),$$

wo k die Krümmung von γ bezeichnet; so haben wir die Relation

$$(5) \quad (\dot{\xi}, \ddot{\xi}) = \text{const.}$$

aus unsrem Kreise γ .

Sind ξ die Schnittpunkte zweier Kreise η und $\bar{\eta}$, so folgt

$$(6) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta = \bar{\xi} - (\bar{\xi} \bar{\eta}) \bar{\eta},$$

oder

$$(7) \quad \hat{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta = \bar{\xi} - (\bar{\xi} \bar{\eta}) \bar{\eta}.$$

Sind ξ und η in (1) Kugeln, so bezeichnet $\xi(t)$ in (1) eine Raumkurve.

(1) BIERBACH, L.: Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin, (1932), S. 7.

Ist

$$(8) \quad \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} \right) = 0,$$

so ist x die Minimallinie; somit folgt aus (8)

$$(9) \quad 0 = \left(\frac{d\hat{x}}{dt} \frac{d\hat{x}}{dt} \right) - 2 \left(\frac{d\hat{x}}{dt} \gamma \right)^2 = \left(\frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} \right),$$

oder

$$(10) \quad \left(\frac{d\hat{x}}{dt} \frac{d\hat{x}}{dt} \right) = \left(\frac{d\hat{x}}{dt} \gamma \right)^2.$$

(10) ist die Bedingung dafür, dass x eine Minimallinie ist.

Wir betrachten

$$(11) \quad x(t) = \hat{x}(t) - (\hat{x}(t) \gamma) \gamma,$$

wo \hat{x} , γ Kugeln im R_3 sind; $x(t)$ in (11) bezeichnet eine Raumkurve, die auf einer festen Kugel γ liegt.

Aus (11) kommt

$$(12) \quad \rho = \frac{|\dot{x}|^3}{|\dot{x} \times \ddot{x}|} = \frac{|\dot{\hat{x}} - (\dot{\hat{x}} \gamma) \gamma|^3}{|\{\dot{\hat{x}} - (\dot{\hat{x}} \gamma) \gamma\} \times \{\ddot{\hat{x}} - (\ddot{\hat{x}} \gamma) \gamma\}|},$$

wo ρ den Krümmungsradius von $x(t)$ bedeutet.

Weiter ist die Gleichung der Schmiegenebene

$$(13) \quad (y - x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$$

oder

$$(14) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{(\dot{x} \ddot{x} x)}{(\dot{x} \times \ddot{x})^2} = \frac{[\dot{\hat{x}} - (\dot{\hat{x}} \gamma) \gamma, \ddot{\hat{x}} - (\ddot{\hat{x}} \gamma) \gamma, \dot{\hat{x}} - (\dot{\hat{x}} \gamma) \gamma]}{[\{\dot{\hat{x}} - (\dot{\hat{x}} \gamma) \gamma\} \times \{\dot{\hat{x}} - (\dot{\hat{x}} \gamma) \gamma\}]}$$

ist die Gleichung der Windung von $x(t)$.

(W) Wir betrachten

$$(1) \quad x(t) = \hat{x}(t) - (\hat{x}(t) \gamma) \gamma$$

und

$$(2) \quad \gamma + r\chi$$

wo χ der Berührungspunkt von ξ und γ ist. Da ξ und γ zwei Kreise in R_2 sind.

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma + r\chi = \gamma + r\{\hat{\xi}(t) - (\hat{\xi}(t)\gamma)\gamma\} \\ \quad = \gamma + r\hat{\xi} - r(\hat{\xi}\gamma)\gamma \\ \quad = \{1 - r(\hat{\xi}\gamma)\}\gamma + r\hat{\xi}, \end{cases}$$

wo r die Konstante ist.

(X) Wir betrachten

$$(1) \quad \chi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\gamma)\gamma, \quad (\hat{\xi}\gamma)^2 = 1.$$

Wenn η ein Kreis in R_2 ist, der durch den Punkt χ geht, so folgt

$$(2) \quad 0 = (\chi\eta) = (\hat{\xi}\eta) - (\hat{\xi}\gamma)(\eta\gamma)$$

oder

$$(3) \quad (\hat{\xi}\eta) = (\hat{\xi}\gamma)(\eta\gamma)$$

d. h.

$$(4) \quad (\hat{\xi}\eta)^2 = (\eta\gamma)^2;$$

daraus sieht man, dasz

$$(5) \quad (\hat{\xi}, \eta + \lambda\gamma)^2 = (\gamma, \eta + \lambda\chi)^2$$

gilt, d. h. wir können $\eta + \lambda\chi$ anstatt η in (4) annehmen können.

(Y) Setzen wir

$$(1) \quad \beta = \chi + r\mathbf{v}$$

in

$$(2) \quad \eta = 2(\beta\hat{\xi})\hat{\xi} - \beta$$

ein, so folgt

$$(3) \quad \begin{cases} \eta = 2(\chi + r\mathbf{v}, \hat{\xi})\hat{\xi} - \{\chi + r\mathbf{v}\} \\ \quad = 2(\chi\hat{\xi})\hat{\xi} - \chi + r\{2(\mathbf{v}\hat{\xi})\hat{\xi} - \mathbf{v}\} \\ \quad = \bar{\chi} + r\bar{\mathbf{v}}, \end{cases}$$

da

$$(4) \quad \bar{x} = 2(x\hat{\zeta})\hat{\zeta} - x, \quad \bar{v} = 2(v\hat{\zeta})\hat{\zeta} - v$$

gesetzt sind, wo v , $\hat{\zeta}$, $\hat{\eta}$, x , \bar{x} Kreise in R_2 und v , \bar{v} Punkte in R_2 sind.

Aus (3) sieht man, dass die Inversion von $x + rv$ in bezug auf $\hat{\zeta}$ $\bar{x} + r\bar{v}$ gleich ist, wo \bar{x} und \bar{v} Inversionen von x bzw. v in bezug auf $\hat{\zeta}$ sind. Da r die Konstante ist.

(Z) Setzen wir

$$(1) \quad \eta = \bar{\eta} + r_1 x, \quad \hat{\zeta} = \hat{\zeta} + r_2 x$$

anstatt η und $\hat{\zeta}$ in

$$(2) \quad x = \hat{\zeta} - (\hat{\zeta}\eta)\eta,$$

so folgt

$$(3) \quad \begin{cases} x = \{\hat{\zeta} + r_2 x\} - (\{\hat{\zeta} + r_2 x\}, \{\bar{\eta} + r_1 x\}) \{\bar{\eta} + r_1 x\} \\ = \hat{\zeta} + r_2 x - (\hat{\zeta}\bar{\eta})\bar{\eta} - r_1 (\hat{\zeta}\bar{\eta})x, (\hat{\zeta}\bar{\eta})^2 = 1, \end{cases}$$

wo $\hat{\zeta}$, η , $\hat{\zeta}$, η Kreise in R_2 und r , Konstanten sind.

Wenn

$$(4) \quad (\hat{\zeta}\eta) = 1,$$

so folgt aus (3)

$$(5) \quad x = \hat{\zeta} + r_2 x - \bar{\eta} - r_1 x$$

oder

$$(6) \quad 0 = \{\hat{\zeta} - \bar{\eta}\} + \{r_2 - r_1 + 1\}x.$$

(5)

Im folgenden möchten wir

$$(A) \quad \eta = \cos \alpha \cdot \hat{\zeta} + \sin \alpha \cdot \hat{\zeta}'$$

untersuchen⁽¹⁾.

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Hbh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd., S. 132.

(A) Wenn

$$(1) \quad \alpha = \text{const.},$$

so folgt aus (A)

$$(2) \quad \gamma^{(n)} = \cos \alpha \cdot \xi^{(n)} + \sin \alpha \cdot \xi^{(n+1)};$$

Wenn

$$(3) \quad \eta \equiv \gamma^{(n)},$$

so folgt

$$(4) \quad \hat{\xi} \equiv \xi^{(n)}.$$

(B) Aus (A) kommt

$$(1) \quad \begin{cases} \gamma'(\xi, \alpha) = \cos \alpha \cdot \xi' + \sin \alpha \cdot \xi'' - \sin \alpha \cdot \xi + \cos \alpha \cdot \xi' \\ \quad \quad \quad = -\sin \alpha \cdot \xi + 2 \cos \alpha \cdot \xi' + \sin \alpha \cdot \xi''. \end{cases}$$

Nun betrachten wir

$$(2) \quad \zeta(\eta, \alpha) = \eta \cos \alpha + \eta' \sin \alpha,$$

so folgt

$$(3) \quad \begin{cases} \zeta(\eta, \alpha) = \cos^2 \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cos \alpha \cdot \xi' + 2 \cos \alpha \sin \alpha \cdot \xi' \\ \quad \quad \quad - \sin^2 \alpha \cdot \xi + \sin^2 \alpha \cdot \xi'' \\ \quad \quad \quad = \cos 2\alpha \cdot \xi + \sin 2\alpha \cdot \xi' + \sin^2 \alpha \cdot \xi'', \end{cases}$$

wenn α nicht konstant ist.

(C) Wenn

$$(1) \quad \alpha = \text{const.},$$

so folgt

$$(2) \quad \eta' = \xi' \cos \alpha + \xi'' \sin \alpha;$$

daraus ergibt sich

$$(3) \quad \zeta(\eta, \alpha) = \eta \cos \alpha + \eta' \sin \alpha = \xi \cos^2 \alpha + \xi' \sin 2\alpha + \xi'' \sin^2 \alpha$$

oder

$$(4) \quad \zeta(\xi, 2\alpha) = \xi \cos 2\alpha + \xi' \sin 2\alpha$$

wenn

$$(5) \quad \xi = -\xi'',$$

daraus folgt

$$(6) \quad \zeta(\eta, \alpha) = \zeta(\xi, 2\alpha).$$

ÜBER FLÄCHEN UND KURVEN (XXI):

Einige Bemerkungen über Flächen und Kurven

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, April 17, 1939.)

Im folgenden möchten wir über Kurven und Flächen einige Bemerkungen machen.

(1)

WHITEMORE⁽¹⁾ untersucht genauer einen von OSGOOD⁽²⁾ eingeführten neuen Begriff von einer Kurve auf einer Fläche, nämlich den Quotienten aus der Richtungsänderung der Ebene durch die Kurventangente und die Flächennormale einerseits und der Bogenlänge der Kurve andererseits.

Es wird gezeigt, dass das Quadrat des fraglichen Limes gleich der Summe der Quadrate der geodätischen Krümmung und der geodätischen Torsion ausfällt; für diesen Limes haben wir daher die Bezeichnung „totale geodätische Krümmung“ vorgeschlagen.

Nebenbei wird auch gezeigt, dass die geodätische Torsion einer Kurve C gleich

$$(1) \quad \sin \theta \cdot d\sigma/ds$$

ist, wo s und σ die Bogenlängen von C und deren sphärischem Bild I' sind, während θ den Winkel zwischen C und I' bedeutet.

Man kann (1) in die Form setzen

$$(2) \quad \sin \theta \frac{\tan \varphi \cdot d\bar{\rho}}{\tan \varphi \cdot d\rho},$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXVI, No. 2, May, 1939.]

(1) WHITEMORE, J. K.: Total geodesic curvature and geodesic torsion, American Math. Soc. Bull., 29, (1923), p. 51.

(2) Trans. American Math. Soc. (1922), 23, p. 240.

wo⁽¹⁾

$$\tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds}, \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\bar{\rho}}{d\sigma}.$$

(2)

Diskussion der Kurve an Hand der von F. GOMEZ TEIXEIRA aufgestellten Fundamentalgleichung⁽²⁾

$$(1) \quad r = kA + k/2 \cdot \cos 2s/k,$$

woraus man finden⁽³⁾ kann:

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds},$$

wo

ρ = Krümmungsradius,

r = Radiusvektor,

s = Bogenlänge,

k = positive Länge,

A = reelle Zahl

sind.

(3)

Wir betrachten die Kurven⁽⁴⁾

$$(1) \quad s = k \int \frac{d\rho}{\{(\rho/a)^n - 1\}^{\frac{1}{2}}};$$

(1) MATUMURA, S.: Über einen affingeometrischen Satz und die Deviation ebener Kurven, Tôhoku Math. Journ., Vol. 36 (1932), S. 189.

(2) HOEL, O.: Über die EULERSche Kurve, deren Bogen sich durch Kreisbogen darstellen lassen, Anais da Faculdade de Sciencias do Porto, 15, p. 5.

(3) MATSUMURA, a. a. O., S. 191.

(4) CESARO, E.: Sobre algunas notas de geometria infinitesimal, El progreso matemático, II, p. 212.

es gilt so

$$(2) \quad \tan \varphi = \frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} = \left\{ \left(\frac{\rho}{a} \right)^n - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} : 3k,$$

wo φ in meiner Arbeit⁽¹⁾ steht.

(4)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \mathfrak{x}_{uv} = a \mathfrak{x}_u + b \mathfrak{x}_v, \quad [a = \text{const.}, b = \text{const.}]$$

genügen, so nehmen a und b die Gestalt an :

$$(2) \quad \begin{cases} a = \langle E_u G + E_v F - 2 F F_u \rangle : 2 \langle EG - F^2 \rangle, \\ b = \langle 2 E F_v - E E_v - F E_u \rangle : 2 \langle EG - F^2 \rangle, \end{cases}$$

denn

$$(3) \quad \frac{1}{2} E_u - a E + b F,$$

$$(4) \quad F_v - \frac{1}{2} E_v - a F + b G,$$

wo E, F, G die Koeffizienten der ersten Grundform sind.

Nun betrachten wir

$$(5) \quad \mathfrak{x} - \lambda \bar{\mathfrak{x}};$$

es folgt

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_u - \lambda \bar{\mathfrak{x}}_u + \lambda \bar{\mathfrak{x}}_{u\bar{u}}, & \mathfrak{x}_v = \bar{\lambda} \bar{\mathfrak{x}} + \lambda \bar{\mathfrak{x}}_v, \\ \mathfrak{x}_{uv} - \lambda_{u\bar{u}} \bar{\mathfrak{x}} + \lambda_u \bar{\mathfrak{x}}_u + \lambda_v \bar{\mathfrak{x}}_v + \lambda \bar{\mathfrak{x}}_{uv}, \end{cases}$$

wo λ skalare Grösse ist. Da $\lambda = \lambda(u, v)$ gültig ist.

Aus (1) und (6) ergibt sich

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda \mathfrak{x}_{uv} + (2 \lambda_v - a \lambda) \bar{\mathfrak{x}}_u - b \lambda \bar{\mathfrak{x}}_v \\ \quad \quad \quad + (\lambda_{u\bar{u}} - a \lambda_u - b \lambda_v) \bar{\mathfrak{x}} = 0, \end{cases}$$

1) MATUMURA, a. a. O., S. 189.

oder

$$(8) \quad \lambda \bar{\xi}_{uu} + (2\lambda_u - a\lambda) \bar{\xi}_u - b\lambda \bar{\xi}_v = 0,$$

wenn

$$(9) \quad \lambda_{uu} - a\lambda_u - b\lambda_v = 0$$

gilt.

Weiter setzen wir

$$(10) \quad \xi^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \xi^2 = 0,$$

so folgen

$$(11) \quad \xi \xi_u = 0, \quad \xi \xi_v = 0, \quad \xi_u \xi_u + \xi \xi_{uu} = 0.$$

Aus (1) folgt

$$(12) \quad \xi \xi_{uu} + a \xi \xi_u + b \xi \xi_v = 0.$$

Aus (11) und (12) kommt

$$(13) \quad E = 0,$$

so erhalten wir den

Satz: Wenn ξ ein Punkt oder eine Kugel ist, so folgt

$$E = 0.$$

Wenn ξ in

$$(14) \quad \eta = 2(\xi \hat{\xi}) \hat{\xi} - \xi$$

eine feste Kugel ist, so entstehen

$$(15) \quad \begin{cases} \eta_u = 2(\xi \hat{\xi}_u) \hat{\xi} + 2(\xi \hat{\xi}) \hat{\xi}_u, \\ \eta_v = 2(\xi \hat{\xi}_v) \hat{\xi} + 2(\xi \hat{\xi}) \hat{\xi}_v, \\ \eta_{uu} = 2(\xi \hat{\xi}_{uu}) \hat{\xi} + 2(\xi \hat{\xi}) \hat{\xi}_{uu}, \end{cases}$$

so folgt

$$(16) \quad \begin{cases} \langle \eta_{uu} - a\eta_v - b\eta_u \rangle = 2(\xi, \langle \hat{\xi}_{uu} - a\hat{\xi}_u - b\hat{\xi}_v \rangle) \\ \quad + 2(\xi \hat{\xi}) \langle \hat{\xi}_{uu} - a\hat{\xi}_u - b\hat{\xi}_v \rangle, \end{cases}$$

daraus sieht man, dass

$$(17) \quad \eta_{uu} = a\eta_u + b\eta_v$$

wenn

$$(18) \quad \hat{\xi}_{uu} = a\hat{\xi}_u + b\hat{\xi}_v;$$

wir erhalten so den

Satz: *Genügt $\hat{\xi}$ in (14) der Differentialgleichung (1), so genügt η in (14) auch (1), wo χ in (14) eine feste Kugel ist.*

Aus

$$(19) \quad \chi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\tau)\tau, \quad (\hat{\xi}\tau)^2 = 1,$$

folgt

$$(20) \quad \begin{cases} 0 = (\hat{\xi}\tau_u)\tau + (\hat{\xi}\tau)\tau_u, \\ 0 = (\hat{\xi}\tau_v)\tau + (\hat{\xi}\tau)\tau_v, \\ 0 = (\hat{\xi}\tau_{uu})\tau + (\hat{\xi}\tau)\tau_{uu}, \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(21) \quad 0 = (\hat{\xi}, \{\tau_{uu} - a\tau_u - b\tau_v\})\tau + (\hat{\xi}\tau)\{\tau_{uu} - a\tau_u - b\tau_v\},$$

wo χ ein fester Punkt und $\hat{\xi}$ eine feste Kugel ist.

Aus (20) kann man wissen, dass, wenn τ der Differentialgleichung (1) genügt, so τ (19) ebenso genügt, wenn χ in (19) ein fester Punkt und $\hat{\xi}$ in (19) eine feste Kugel ist.

(5)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \xi_{vv} = a\xi_u + b\xi_v, \quad [a=\text{const.}, b=\text{const.}]$$

genügen, so nehmen a und b die Gestalt an:

$$(2) \quad \begin{cases} a = \{2GF_v - GG_u - FG_v\} : 2(EG - F^2), \\ b = \{EG_v + FG_u - 2FF_v\} : 2(EF - F^2), \end{cases}$$

denn

$$(3) \quad F_v - \frac{1}{2} G_v = a E + b F,$$

$$(4) \quad \frac{1}{2} G_v = a F + b G$$

gelten.

Nun setzen wir

$$(5) \quad \mathfrak{x} = \lambda \bar{\mathfrak{x}},$$

so folgt

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{x}_u = \lambda_u \bar{\mathfrak{x}} + \lambda \bar{\mathfrak{x}}_u, & \mathfrak{x}_v = \lambda_v \bar{\mathfrak{x}} + \lambda \bar{\mathfrak{x}}_v, \\ \mathfrak{x}_{uv} = \lambda_{uv} \bar{\mathfrak{x}} + \lambda_u \bar{\mathfrak{x}}_v + \lambda_v \bar{\mathfrak{x}}_u + \lambda \bar{\mathfrak{x}}_{uv}. \end{cases}$$

Aus (1) und (6) ergibt sich

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda \bar{\mathfrak{x}}_u + (2 \lambda_v - b \lambda) \bar{\mathfrak{x}}_v - a \lambda \bar{\mathfrak{x}}_{uv} \\ \quad + (\lambda_{uv} - a \lambda_u - b \lambda_v) \bar{\mathfrak{x}} = 0, \end{cases}$$

oder

$$(8) \quad \lambda \bar{\mathfrak{x}}_{uv} - a \lambda \bar{\mathfrak{x}}_u + (2 \lambda_v - b \lambda) \bar{\mathfrak{x}}_v = 0,$$

wenn

$$(9) \quad \lambda_{uv} - a \lambda_u - b \lambda_v = 0$$

gilt.

Nun setzen wir

$$(10) \quad \mathfrak{x}^2 = 1;$$

es folgen

$$(11) \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x}_u = 0, \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x}_v = 0, \quad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{uv} = 0.$$

Aus (1) ergibt sich

$$(12) \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{uv} = a \mathfrak{x} \mathfrak{x}_u + b \mathfrak{x} \mathfrak{x}_v;$$

hiermit folgt aus (11) und (12)

$$(13) \quad G = 0,$$

so erhalten wir den folgenden

Satz: Wenn \mathfrak{x} eine Kugel in (1) ist, so muss

$$G = 0$$

sein.

(6)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\chi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \chi_{vv} - a^2 \chi_{vv} = 0 \quad [a = \text{const.}]$$

genügen, nimmt a^2 die Gestalt an:

$$(2) \quad a^2 = \frac{1}{2} E_u : \{F_v - \frac{1}{2} G_u\},$$

denn

$$(3) \quad \chi_u \chi_{uu} - a^2 \chi_v \chi_{vv} = 0$$

gilt.

Nach MITRINOVITCH nimmt die Differentialgleichung der Asymptotenlinien die Gestalt an⁽¹⁾:

$$(4) \quad \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2 \frac{D'}{D} \frac{du}{dv} + \frac{1}{2} E_u : \left\{ F_v - \frac{1}{2} G_u \right\} = 0,$$

wo D, D', D'' die Koeffizienten der zweiten Grundform sind,

Weiter setzen wir

$$(4') \quad \chi^2 = 1,$$

so folgen

$$(5) \quad \chi \chi_{vv} = 0. \quad \chi_u \chi_{uu} + \chi_v \chi_{vv} = 0.$$

Aus (1) folgt

$$(6) \quad \chi \chi_{uu} - a^2 \chi \chi_{vv} = 0.$$

Aus (5) und (6) kommt

$$(7) \quad E = 0,$$

wenn $a=0$ ist, so erhalten wir den folgenden

Satz: Wenn χ eine Kugel in (1) ist, so folgt

(1) MITRINOVITCH, D. S.: Equation différentielle des asymptotiques et équation des cordes vibrantes qui s'y rattache, Rev. math. Un. interbalkanique I, p. 135.

$$E = 0,$$

wenn $a=0$ ist.

Wenn zwei Kreise ξ und η in dem Punkt ξ einander berühren, so folgt

$$(8) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta, \quad (\hat{\xi}\eta)^2 = 1.$$

Genügt η in (9) der Differentialgleichung (1), so folgt

$$(9) \quad (\hat{\xi}\eta_u)\eta_u = a^2(\hat{\xi}\eta_v)\eta_v,$$

denn aus (9) kommt

$$(10) \quad \begin{cases} (\hat{\xi}\eta_{uu})\eta + 2(\hat{\xi}\eta_u)\eta_u + (\hat{\xi}\eta)\eta_{uu} = 0, \\ (\hat{\xi}\eta_{vv})\eta + 2(\hat{\xi}\eta_v)\eta_v + (\hat{\xi}\eta)\eta_{vv} = 0, \end{cases}$$

(9) ist so die Bedingung dafür, dass η in (1) genügen muss.

(7)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \xi_{uu} = a\xi_u + b\xi_v + c\xi, \\ (a=\text{constant}, b=\text{constant}, c=\text{constant})$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad \xi\xi_{uu} = a\xi\xi_u + b\xi\xi_v + c\xi^2$$

oder

$$(3) \quad \xi\xi_{uu} = 0,$$

wenn ξ ein Punkt ist.

In diesem Falle gilt

$$(4) \quad \xi^2 = 0;$$

daraus ergibt sich

$$(5) \quad \xi\xi_u = 0, \quad \xi_u\xi_u + \xi\xi_{uu} = 0.$$

so kommt aus (3) und (5)

$$(6) \quad E = 0.$$

Wir haben so den folgenden

Satz: Wenn \mathfrak{x} in (1) ein Punkt ist, so führt es zum Ergebnisse

$$E = 0.$$

(8)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\mathfrak{x}(k, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \mathfrak{x}_{vv} = a \mathfrak{x}_u + b \mathfrak{x}_v + c \mathfrak{x},$$

$$(a = \text{const.}, b = \text{const.}, c = \text{const.})$$

genügen, so ergibt sich

$$(2) \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{vv} = a \mathfrak{x} \mathfrak{x}_u + b \mathfrak{x} \mathfrak{x}_v + c \mathfrak{x}^2.$$

Wenn \mathfrak{x} eine Kugel ist, so folgt aus (2)

$$(3) \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{vv} = c.$$

Aus

$$(4) \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x} = 1,$$

kommt

$$(5) \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x}_v = 0, \quad \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{vv} = 0,$$

woraus sich aus (3) (5) ergibt

$$(6) \quad G = c,$$

so folgt der

Satz: $G=c$, wenn \mathfrak{x} in (1) eine Kugel ist, und wenn \mathfrak{x} in (1) ein Punkt ist, so führt es zum Ergebnisse

$$G = 0.$$

Sind ξ die Koordinaten auf einer Tangentenebene, so haben wir

$$(7) \quad \xi = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v),$$

oder folgt aus (1)

$$(8) \quad \begin{aligned} (\xi &= (1/c \cdot \xi_{vv} - a/c \cdot \xi_u - b/c \cdot \xi_v, \xi_u, \xi_v) \\ &= 1/c (\xi_{uv}, \xi_v, \xi_u). \end{aligned}$$

(9)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \xi_{uu} = a \xi_{vv} + b \xi_u + c \xi_v, \\ (a = \text{const.}, b = \text{const.}, c = \text{const.})$$

genügen, so bekommen wir

$$(2) \quad \xi \xi_{uu} = a \xi \xi_v + b \xi \xi_u + c \xi \xi_v$$

oder

$$(3) \quad \xi \xi_{uu} = a \xi \xi_v,$$

wenn ξ ein Punkt oder eine Kugel ist.

Aus $\xi^2=1$ oder $\xi^2=0$ folgt

$$(4) \quad \xi_u \xi_u + \xi \xi_{uu} = 0, \quad \xi_v \xi_v + \xi \xi_{vv} = 0,$$

woraus sich aus (3) und (4) ergibt

$$(5) \quad E = a G,$$

so folgt der

Satz: Wenn ξ in (1) ein Punkt oder eine Kugel ist, so erhalten wir

$$E = \text{const. } G.$$

(D) Aus (1) in (A) folgt

$$(1) \quad \frac{d\eta}{dt} = 2 \left(\frac{d\lambda}{dt} \xi \right) \xi - \frac{d\lambda}{dt};$$

daraus ergibt sich

$$(2) \quad \left(\frac{d\eta}{dt} \frac{d\eta}{dt} \right) = 4 \left(\frac{d\lambda}{dt} \xi \right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dt} \frac{d\lambda}{dt} \right) - 4 \left(\frac{d\lambda}{dt} \xi \right)^2 \\ = \left(\frac{d\lambda}{dt} \frac{d\lambda}{dt} \right).$$

Wir sehen, dass sich durch Inversion isotrope Kurven zu isotropen Kurven transformieren, wo $\hat{\varepsilon}$ ein fester Kreis und t ein Parameter ist.

(10)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\chi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \chi_{uu} = a \chi_{vv} + b \chi_u + c \chi_v + d \chi, \quad [a, b, c, d = \text{const.}]$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad \chi \chi_{uu} = a \chi \chi_{vv} + b \chi \chi_u + c \chi \chi_v + d \chi^2$$

oder

$$(3) \quad \chi \chi_{uu} = a \chi \chi_{vv} + d,$$

wenn χ einen Punkt bedeutet.

Aus $\chi^2 = 0$ folgen

$$(4) \quad \chi_u \chi_u + \chi \chi_{uu} = 0, \quad \chi_v \chi_v + \chi \chi_{vv} = 0.$$

Hieraus ergibt sich aus (3) und (4)

$$(5) \quad E = G + \text{const.},$$

so haben wir den

Satz :

$$E = G + \text{const.}$$

gilt, wenn χ in (1) einen Punkt bedeutet.

(11)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\chi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad a \chi_{uu} + 2c \chi_{uv} + b \chi_{vv} = 0 \quad [a, b, c = \text{const.}]$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad a E + (b + 2c) G = 0,$$

wenn

$$(3) \quad \xi \xi = 1 \quad \text{oder} \quad \xi \xi = 0$$

gilt, denn aus (3) folgen:

$$(4) \quad \xi_u \xi_u + \xi \xi_{uu} = 0, \quad \xi_v \xi_v + \xi \xi_{vv} = 0, \quad \xi_u \xi_v + \xi \xi_{uv} = 0.$$

Wir haben so den

Satz: Wenn ξ ein Punkt oder eine Kugel ist, so folgt aus (1)

$$a E + (b + 2c) G = 0,$$

wo a, b, c Konstanten sind.

(12)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \xi_{uv} = a \xi_{vv} + b \xi_{uu} + c \xi_v + d \xi, \quad [a, b, c, d = \text{const.}]$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad \xi \xi_{uv} = a \xi \xi_{vv} + b \xi \xi_{uu} + c \xi \xi_v + d \xi^2,$$

daraus kommt

$$(3) \quad F = \text{const. } G + \text{const.},$$

wenn $\xi^2 = 1$ gilt, denn aus $\xi^2 = 1$ folgen:

$$(4) \quad \begin{cases} \xi \xi_u = 0, & \xi \xi_v = 0, \\ \xi_u \xi_v + \xi \xi_{uv} = 0, & \xi_v \xi_v + \xi \xi_{vv} = 0. \end{cases}$$

Wir haben so den folgenden

Satz: Wenn ξ eine Kugel ist, so gilt (3), und wenn ξ ein Punkt ist, so folgt

$$E = \text{const. } G.$$

Ist $\hat{\xi}$ eine feste Kugel und ξ eine Fläche, so ist

$$(5) \quad \eta = 2(\xi \hat{\xi}) \hat{\xi} - \xi$$

die zu ξ in bezug auf die Kugel $\hat{\xi}$ inverse Fläche.

Wenn ξ und η in (5) beide (1) genügen, so bekommt man

$$(6) \quad \eta_{uv} = 2(\xi_{uv}\hat{\xi})\hat{\xi} - \xi_{uv},$$

wenn

$$(7) \quad \eta_{uv} = a\eta_v + b\eta_u + c\eta_v + d\eta.$$

Wir erhalten also den folgenden

Satz: Wenn die Fläche ξ und ihre inverse Fläche η den beiden Seiten der Differentialgleichung der Form (1) genügen und ist ξ eine Translationsfläche, so muss η auch eine Translationsfläche sein.

Genügen ξ und η in (15) der folgenden Differentialgleichung

$$(8) \quad \xi_u \xi_v = a \xi_{uv} + b \xi_u + c \xi_v + d \xi^2,$$

so folgt

$$(9) \quad \eta_u \eta_v = 2(\xi_u \xi_v \cdot \hat{\xi})\hat{\xi} - \xi_u \xi_v;$$

daraus erhalten wir den folgenden

Satz: Wenn die Fläche ξ und ihre inverse Fläche η den beiden Seiten der Differentialgleichung der Form (8) genügen und

$$u = \text{const. und } v = \text{const.}$$

auf ξ aufeinander senkrecht sind, so müssen

$$u = \text{const. und } v = \text{const.}$$

auch aufeinander senkrecht sein.

(13)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \xi_{uu} = a \xi_v, \quad [a = \text{const.}]$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad E = 0$$

oder

$$(3) \quad \xi_u \xi_u = 0.$$

Wenn $\xi^3 = 1$ gilt, so erhalten wir den

Satz: Wenn ξ in (1) eine Kugel ist, so folgt

$$E = 0.$$

Gilt (1), so nimmt die Differentialgleichung der Asymptotenlinien die Gestalt an:

$$(4) \quad v = \text{const.}$$

wo D, D', D'' die Koeffizienten der zweiten Grundform bedeuten.

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ der Differentialgleichung

$$(5) \quad \xi_{u'} = a \xi_u$$

oder

$$(6) \quad \xi_{v'} = a \xi_v$$

genügen, nimmt die Differentialgleichung der Asymptotenlinien die Gestalt an:

$$(7) \quad u = \text{const.}$$

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ der Differentialgleichung

$$(8) \quad \xi_{uu} = a \xi_u$$

genügen, so nimmt die Differentialgleichung der Asymptotenlinien die Gestalt an:

$$(9) \quad v = \text{const.}$$

Weiter sehen wir

$$(10) \quad \xi = \lambda \bar{\xi}.$$

Es folgt

$$(11) \quad \begin{cases} \xi_u = \lambda_u \bar{\xi} + \lambda \bar{\xi}_u, \\ \xi_{uu} = \lambda_{uu} \bar{\xi} + 2 \lambda_u \bar{\xi}_u + \lambda \bar{\xi}_{uu}, \\ \xi_v = \lambda_v \bar{\xi} + \lambda \bar{\xi}_v, \end{cases}$$

wo $\lambda = \lambda(u, v)$ ist.

Aus (1) und (11) ergibt sich

$$(12) \quad 2 \lambda_u \cdot \bar{\xi}_u = 0$$

oder

$$(13) \quad \lambda_u \cdot \bar{\xi}_u = 0,$$

wenn

$$(14) \quad \lambda_{uu} = a \lambda_u, \quad \bar{\xi}_{uu} = a \bar{\xi}_u,$$

gültig sind, daraus sieht man, dass

$$(15) \quad \lambda_u \perp \bar{\xi}_u$$

gilt, so erhalten wir den

Satz: Genügen λ und $\bar{\xi}$ der Differentialgleichung (1), so hat man (15).

Wir betrachten die Fläche $\chi(u, v)$ in

$$(16) \quad \chi_1 = \xi + a \xi_u.$$

Es folgt aus (5) und (16)

$$(17) \quad \chi_1 = \xi + \xi_u$$

oder

$$(18) \quad \chi_1^2 = \xi^2 + \xi_u^2 + 2 \xi \xi_u$$

oder

$$(19) \quad 1 = 1 + a^2 E - 2 G$$

d. h.

$$(20) \quad a^2 E = 2 G,$$

wenn $\xi_1^2=1$ und $\xi^2=1$ ist, wo E, F, G die ersten Fundamentalgrößen von ξ bedeuten.

Also erhalten wir den folgenden

Satz: Sind χ_1 und ξ in (1) und (16) Kugeln, so folgt (20).

Gilt

$$(21) \quad \xi_u = \lambda \bar{\xi}_u$$

und

$$(22) \quad \mathfrak{x}_v = \bar{\lambda} \mathfrak{x}_v$$

in (1), so bekommen wir

$$(23) \quad \mathfrak{x}_u = 0$$

oder

$$(24) \quad \mathfrak{x} = F(v),$$

wenn

$$(25) \quad \bar{\mathfrak{x}}_{uu} = a \bar{\mathfrak{x}}_v$$

ist.

Also erhalten wir den folgenden

Satz: *Genügen \mathfrak{x} und $\bar{\mathfrak{x}}$ der Differentialgleichung (1), so muss \mathfrak{x} eine Kurve in R_3 sein, wo (21) und (22) gelten.*

(14)

Wenn die Koordinanten einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad a(u, v) \mathfrak{x}_u + b(u, v) \mathfrak{x}_v + c(u, v) \mathfrak{x} = 0$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad c(u, v) \equiv 0;$$

damit führt (1) zu

$$(3) \quad a(u, v) \mathfrak{x}_u + b(u, v) \mathfrak{x}_v = 0.$$

Man sieht daraus, dass

$$(4) \quad aE + bG = 0$$

gilt.

So erhalten wir den

Satz: *Wenn \mathfrak{x} eine Kugel ist, so muss*

$$aE + bG = 0$$

gelten.

Wenn χ in (1) einen Punkt bezeichnet, so folgt (4) auch.

Wir sehen zwei Flächen χ_1 und χ , die in EISENHARTS Arbeit⁽¹⁾ stehen. Hieraus kommt.

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial \chi_1}{\partial u} = \lambda \frac{\partial \chi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial v}, \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial v} = \sigma \frac{\partial \chi}{\partial u} + \tau \frac{\partial \chi}{\partial v}. \end{cases}$$

Genügt χ_1 der Differentialgleichung

$$(6) \quad a \frac{\partial \chi_1}{\partial u} + b \frac{\partial \chi_1}{\partial v} = 0,$$

so hat man

$$(7) \quad (a\lambda + b\sigma) \chi_u + (a\mu + b\tau) \chi_v = 0,$$

daraus sieht man, dass χ der Differentialgleichung der Form (6) genügt, wo $a, b, \lambda, \mu, \sigma, \tau$ skalare Gröszen bedeuten.

(15)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\chi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \chi_{uu} = a \chi \quad [a = \text{const.}]$$

genügen, so kommt aus (1)

$$(2) \quad \chi \chi_{uu} = a \chi^2,$$

oder

$$(3) \quad -\chi_u \chi_v = a,$$

d. h.

$$(4) \quad F = \text{const.},$$

wenn χ eine Kugel ist.

So folgt der

(1) EISENHART, L. P.: Associate Surfaces, Math. Ann. 62 (1906), S. 505.

Satz: Wenn (1) gilt, so folgt

$$F = \text{const.},$$

wo \mathfrak{x} eine Kugel ist.

Wenn \mathfrak{x} in (1) Punkte bedeuten, so folgt aus (1)

$$(5) \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x}_u = 0$$

oder

$$(6) \quad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = 0$$

so haben wir den

Satz: Wenn \mathfrak{x} in (1) Punkte sind, so führt es zum Ergebnis

$$F = 0.$$

(1) ist die sogenannte MOUTARDSche Differentialgleichung.

(16)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad a \mathfrak{x}_{uu} + 2b \mathfrak{x}_{uv} + c \mathfrak{x}_v + 2d \mathfrak{x}_u + 2e \mathfrak{x}_i + f \mathfrak{x} = 0$$

$$[a, b, c, d, e, f = \text{const.}]$$

genügen, so folgt aus (1)

$$(2) \quad a \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{uu} + 2b \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{uv} + c \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{vv} + 2d \mathfrak{x} \mathfrak{x}_u + 2e \mathfrak{x} \mathfrak{x}_v + f \mathfrak{x} \mathfrak{x} = 0$$

oder

$$(3) \quad aE + bF + cG = \text{const.}, (\mathfrak{x}^2 = 1);$$

daraus erhalten wir den folgenden

Satz: Wenn \mathfrak{x} in (1) eine Kugel bedeutet, so folgt (3). Wenn \mathfrak{x} in (1) Punkte sind, so folgt

$$(4) \quad aE + bF + cG = 0,$$

wo a, b und c Konstanten sind.

(17)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{x}_{vv} = 0$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad E + G = 0,$$

denn aus $\mathfrak{x}^2=1$ oder $\mathfrak{x}^2=0$ gilt:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} \mathfrak{x}_u = 0, & \mathfrak{x} \mathfrak{x}_v = 0, \\ \mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{x} + \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uu} = 0, & \mathfrak{x}_{vv} \mathfrak{x} + \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{vv} = 0. \end{cases}$$

Wir erhalten so den folgenden

Satz: Wenn \mathfrak{x} in (1) Punkt oder eine Kugel bedeuten, so führt es zum Ergebnisse:

$$E + G = 0.$$

Ist $\hat{\mathfrak{x}}$ eine Kugel und \mathfrak{x} eine Fläche, so gilt

$$(4) \quad \mathfrak{y} = 2(\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}}) \hat{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x},$$

wo \mathfrak{y} zu \mathfrak{x} in bezug auf die Kugel $\hat{\mathfrak{x}}$ inverse Fläche bedeutet.

Aus (4) kommen

$$(5) \quad \mathfrak{y}_{uu} = 2(\mathfrak{x}_{uu} \hat{\mathfrak{x}}) \hat{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_{uu},$$

$$(6) \quad \mathfrak{y}_{vv} = 2(\mathfrak{x}_{vv} \hat{\mathfrak{x}}) \hat{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}_{vv},$$

daraus sieht man, dass aus (5) und (6)

$$(7) \quad \{\mathfrak{y}_{uu} + \mathfrak{y}_{vv}\} = 2(\{\mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{x}_{vv}\}, \hat{\mathfrak{x}}) \hat{\mathfrak{x}} - \{\mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{x}_{vv}\}$$

folgt, so bekommt man

$$(8) \quad \mathfrak{y}_{uu} + \mathfrak{y}_{vv} = 0.$$

Wenn (1) gilt, so erhalten wir den folgenden

Satz: Wenn \mathfrak{x} in (4) die Differentialgleichung (1) erfüllt, so genügt \mathfrak{y} in (4) ebenso (1).

(18)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $x(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad x_{uu} - x_v = \alpha x, \quad [\alpha = \text{const.}]$$

genügen, so nimmt α die Gestalt

$$(2) \quad \alpha = -E$$

an, wenn $xx=1$ gilt, denn aus $xx=1$ folgt:

$$(3) \quad \begin{cases} x x_u = 0, & x x_v = 0, \\ x x_u + x x_{vv} = 0, & x_u x_u + x x_{uu} = 0. \end{cases}$$

Genügt x in (1) $xx=0$, so folgt

$$(4) \quad E = 0.$$

Wir erhalten so den folgenden

Satz: Wenn x in (1) eine Kugel bezeichnet, so ergibt sich

$$E = \text{const.}$$

Wenn x in (1) Punkte sind, so folgt

$$E = 0.$$

(19)

Genügen die Koordinaten einer Fläche der Wärmeleitungsdifferentialgleichung

$$(1) \quad x_{uu} - x_v = 0,$$

so folgt

$$(2) \quad x x_{uu} - x x_v = 0,$$

oder

$$(3) \quad E = 0.$$

Wenn $xx=1$ oder $xx=0$ gilt, so erhalten wir den folgenden

Satz: *Genügen die Koordinaten ξ einer Fläche (1), so folgt*

$$E = 0,$$

wenn ξ eine Kugel oder Punkte sind.

In diesem Falle ist

$$(4) \quad L = 0,$$

wo L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung bedeuten.

$$(20)$$

Genügen die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \xi_{''} = 0,$$

so folgt

$$(2) \quad \xi \xi_{''} = 0$$

oder

$$(3) \quad F = 0, \quad (\xi\xi=1 \text{ oder } \xi\xi=0)$$

also kann man den folgenden Satz erhalten.

Satz: *Wenn ξ in (1) eine Kugel oder Punkte sind, so wird gebildet:*

$$F = 0.$$

$$(21)$$

Genügen die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \xi_{''} + a \xi_{''} = 0,$$

so kommt zustande

$$(2) \quad \xi \xi_{''} + a \xi \xi_{''} = 0$$

oder

$$(3) \quad G = 0, \quad (\xi\xi=1, \text{ oder } \xi\xi=0);$$

Satz: Wenn ξ in (1) eine Kugel oder Punkte sind, so folgt

$$G = 0,$$

wo a eine skalare Grösse ist.

(22)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \lambda \xi_{uu} + \mu \xi_{vv} = 0$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad \lambda \xi \xi_{uu} + \mu \xi \xi_{vv} = 0$$

oder

$$\lambda E + \mu G = 0,$$

wenn

$$\xi \xi = 0 \quad \text{oder} \quad \xi \xi = 1$$

ist, so folgt der

Satz: Wenn ξ in (1) eine Kugel oder Punkte sind, so folgt

$$\lambda E + \mu G = 0,$$

wo λ, μ skalare Grössen sind.

(23)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\xi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \xi_{uv} + a \xi_u + b \xi_v + c \xi = 0$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad \xi \xi_{uv} + a \xi \xi_u + b \xi \xi_v + c \xi \xi = 0$$

oder

$$(3) \quad F = \text{const.}$$

wenn

$$(4) \quad x \bar{x} = 1$$

gelten, so folgt der

Satz: Wenn x in (1) eine Kugel ist, so folgt

$$F = \text{const.},$$

wo a, b, c skalare Größen sind.

Wenn x in R , Punkte sind, so ergibt sich

$$(5) \quad F = 0.$$

Wir betrachten⁽¹⁾

$$(6) \quad x_1 = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{x}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} x \right\}.$$

Es folgt

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)^2 \right\}, \\ \frac{1}{\lambda^2} \left\{ E + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} \right)^2 \right\}, \end{cases}$$

wenn x eine Kugel ist.

Besitzt die Gleichung

$$(8) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + a \frac{\partial x}{\partial u} + b \frac{\partial x}{\partial v} + c x = 0$$

vier Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, welche der Gleichung

$$(9) \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda_4^2$$

genügen, so entspricht jeder Lösung λ obiger Gleichung eine Lösung μ der Gleichung

1 PISATI, L.: Sulla estensione del metodo di LAPLACE alle equazioni differenziali lineari di ordine qualunque con due variabili indipendenti, Palermo rend., 20, p. 344.

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v} - a \frac{\partial \mu}{\partial u} - b \frac{\partial \mu}{\partial v} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial b} - \frac{\partial b}{\partial v} \right) \mu = 0,$$

welche durch die Formel bestimmt wird :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = \left(\lambda \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \lambda_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 \lambda_4}{\partial v^2} \right) \\ \int \left[\left(2b - \frac{\partial \log C_2}{\partial u} \right) du + \left(2a - \frac{\log B_2}{\partial v} \right) dv \right], \end{array} \right.$$

wo B_2 und C_2 Koeffizienten eines bestimmten Differentialausdrucks sind⁽¹⁾.

Betrachten wir λ als tetrazyklische Koorhinaten, so bezeichnet λ nach (9) einen Punkt in R_2 .

Wenn

$$(12) \quad \mu \mu = 0$$

ist, so folgt aus (10)

$$\bar{F} = 0,$$

$$(14) \quad u = \text{const.}$$

und

$$(15) \quad v = \text{const.}$$

müssen aufeinander senkrecht sein, wo E, F, G die ersten Fundamentalgrößen der μ Fläche sind. Also kann man wissen, dass zwischen den zwei Pankten λ und μ die Beziehung (11) gilt.

(24)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $x(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad x_{uuu} - x_{vv} = 0$$

genügen, so folgt

(1) PETOT, A.: Sur les equations linéaires aux dérivées partielles, Comptes Rendus hebdomadaires des seances de l'Académie des Sciences, Paris, 4°, CXI, p. 522.

$$(2) \quad 3E'' + 2G = 0,$$

wenn

$$(3) \quad \chi \chi' = 1$$

oder

$$(4) \quad \chi \chi' = 0$$

gilt, so folgt der

Satz: Wenn γ in R_3 eine Kugel oder Punkte sind, so folgt (2).

Denn aus $\chi\chi' = 1$ oder $\chi\chi' = 0$ kommen:

$$(5) \quad \begin{cases} \chi\chi'' = 0, & \chi\chi' = 0, \\ \chi_{,1}\chi' + \chi''\chi'' = 0, & \chi_{,1}\chi' + \chi_{,1}\chi' = 0, \\ \chi_{,1}\chi' + \chi''\chi' = 0, & \chi_{,1}\chi' + 3\chi_{,1}\chi' = 0. \end{cases}$$

Wir sehen zu die Inversionstransformation

$$(6) \quad \eta = 2(\chi \hat{\xi}) \hat{\xi} - \chi,$$

wo $\hat{\xi}$ eine feste Kugel, χ und η zwei Flächen sind, so folgen

$$(7) \quad \begin{cases} \eta_{,1} = 2(\chi_{,1}\hat{\xi}) \hat{\xi} - \chi_{,1}, \\ \eta_{,2} = 2(\chi_{,2}\hat{\xi}) \hat{\xi} - \chi_{,2}; \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(8) \quad \{\eta_{,11} - \eta_{,22}\} = 2(\{\chi_{,11} - \chi_{,22}\} \hat{\xi}) \hat{\xi} - \{\chi_{,11} - \chi_{,22}\},$$

so kann man wissen, dass

$$(9) \quad \eta_{,11} - \eta_{,22} = 0$$

gilt, wenn

$$(10) \quad \chi_{,11} - \chi_{,22} = 0.$$

Damit folgt der

Satz: Genügt χ (1), so genügt η ebenso (1).

(25)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\chi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \chi_{uu} + \chi_{vv} + a \chi_u + b \chi_v + c \chi = 0$$

genügen, so bekommt man

$$(2) \quad E + G = \text{const.}$$

wenn

$$(3) \quad \chi \chi = 1$$

gilt, so folgt der

Satz: Wenn χ in (1) eine Kugel ist, so erhalten wir

$$E + G = \text{const.},$$

wo a , b und c Konstanten sind.

Sind χ in (1) Punkte, so führt es zum Ergebnisse

$$E + G = 0.$$

(26)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\chi(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \chi \chi_{uu} + \chi \chi_{vv} = A \chi_u^2 + 2B \chi_u \chi_v + C \chi_v^2 + 2D \chi_u + 2E \chi_v$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad (A + 1)E + 2BF + (C + 1)G = 0,$$

wo A , B , C , D und E Konstanten sind.

Da

$$(3) \quad \chi \chi = 1$$

gilt, so folgt der

Satz: Wenn χ in (1) eine Kugel oder Punkte sind, so ist (2) gültig.

(27)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{vv} + \mathfrak{x} \mathfrak{x}_{vv} = 0$$

genügen, so folgt .

$$(2) \quad E + G = 0,$$

wo

$$(3) \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x} = 1$$

oder

$$(4) \quad \mathfrak{x} \mathfrak{x} = 0$$

gilt, so folgt der

Satz: Wenn \mathfrak{x} in (1) eine Kugel oder Punkte sind, so kommt daraus (2).

(28)

Eine Kurvenschar $u=\text{const.}$ einer Fläche heisst *syndrisch*, wenn sie erstens einem konjugierten Netz angehört, und zweitens die Schmiegungsebenen der konjugierten Schar $v=\text{const.}$ längs einer Linie $u=\text{const.}$ allemal parallel einer festen Gerade sind. Ein Netz heisst *doppelt syndrisch*, wenn beide Kurvenscharen syndrisch sind.

Die Bestimmung der kartesischen Koordinaten x, y, z der Flächen mit einem doppelt syndrischen Kurvensystem hängt naturgemäss, da das System konjugiert ist, von der Integrierung der Laplaceschen Gleichung

$$(1) \quad -\frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} + A \frac{\partial \chi}{\partial u} + B \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0 \quad [\chi = c, y, z]$$

ab; die Integration ist aber, wenn χ ein doppelt syndrisches System ist, stets durch Quadraturen möglich.

Im allgemeinen Falle hängen x, y, z von acht willkürlichen Funktionen $ab^{(1)}$.

Aus (1) folgen

$$(2) \quad A = \frac{FG_u - GE_v}{2(EG - F^2)}, \quad B = \frac{EG - F^2}{2(E_v F - G_u E)}.$$

Ferner musz dafür, dass die u -Kurven geodätische Linien seien, die Bedingung gelten:

$$(3) \quad E_u F + E_v E - 2 E F_u = 0.$$

Um die Tangenten zu

$$(4) \quad u = \text{const.}$$

und

$$(5) \quad v = \text{const.}$$

zu bilden, ist die Kongruenz von RIBAUCOUR

$$(6) \quad \frac{FG_u - GE_v}{FE_v - EG_u} = U \cdot V$$

wo U, V die Funktionen nur von u bzw. v darstellen.

Wenn $B=0$, $A=-1/v$, so folgt aus (1)

$$(7) \quad \chi_{uv} = 1/v \cdot \chi_u;$$

daraus ergibt sich

$$(8) \quad x = v U_1 + V_1, \quad y = v U_2 + V_2, \quad z = v U_3 + V_3,$$

wo U_1, U_2, U_3 Funktionen eines Parameters u und V_1, V_2, V_3 Funktionen eines Parameters v sind.

(29)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\chi(u, v)$ in R_3 der Telegraphengleichung

(1) RAFFY. L.: Détermination explicite des surfaces qui présentent un réseau doublement cylindré, Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires, Paris, 31, p. 77.

$$(1) \quad x_{uu} - x_{vv} + x = 0$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad G - E + 1 = 0$$

wo

$$(3) \quad x_x x_v = 1$$

gilt, so erhalten wir den

Satz: Wenn x in (1) eine Kugel ist, so ist (2) gültig.

(30)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $(x(u, v))$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad x_{uu} + x_{vv} = f(u, v) x$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad E + G + f(u, v) = 0$$

wenn

$$(3) \quad x_x x_v = 1$$

gilt, so folgt der

Satz: Wenn x in R_3 (1) genügen, so bekommt man

$$E + G + f(u, v) = 0,$$

wo x eine Kugel ist.

Wenn x aus dem Punkte besteht, so erhält man

$$(4) \quad E + G = 0.$$

(31)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $x(u, v)$ in R_3 der Differentialgleichung

$$(1) \quad x_{uu} + v x_v = 0$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad E = 0,$$

wenn

$$(3) \quad \chi \chi = 1$$

oder

$$(4) \quad \chi \chi = 0$$

gilt, so kommt daraus der folgende

Satz: Wenn χ in (1) eine Kugel oder Punkte sind, so folgt

$$E = 0.$$

Denn aus $\chi \chi = 1$ oder $\chi \chi = 0$ ergibt sich

$$(5) \quad \chi_{,n} \chi_{,n} + \chi \chi_{,nn} = 0.$$

(32)

Wenn die Koordinaten einer Fläche $\chi(u, v)$ in R_1 der Differentialgleichung

$$(1) \quad \chi_{,nn} + \chi_{,v} = \text{const. } \chi_n$$

genügen, so folgt

$$(2) \quad E + G = 0,$$

wenn

$$(3) \quad \chi \chi = 1$$

oder

$$(4) \quad \chi \chi = 0$$

gilt. Wir haben also den

Satz: Wenn χ in (1) eine Kugel oder Punkte sind, so erhält man

$$E + G = 0.$$

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXXII)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, June 19, 1939.)

Im folgenden möchten wir über die Theorie der Kreise und Kugeln einige Bemerkungen machen.

(1)

(A) Wir betrachten⁽¹⁾

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \{\hat{\xi} - \eta\} \cdot \{1 + (\hat{\xi}\eta)\},$$

$$(2) \quad \mathfrak{x} = \{\hat{\xi} + \eta\} \cdot \{1 - (\hat{\xi}\eta)\},$$

$$(3) \quad \mathfrak{x} = \{\hat{\xi} + \varepsilon\eta\} \sqrt[+]{1 - 2\varepsilon(\hat{\xi}\eta)}$$

und

$$(4) \quad \mathfrak{x} = \{\hat{\xi} - \varepsilon\eta\} \sqrt[+]{1 + 2\varepsilon(\hat{\xi}\eta)},$$

wo $\hat{\xi}$ und η Kugeln in R_3 sind. Da $(\hat{\xi}\eta)^2 = 1$ gilt, so ist ε die Einheit von dualen Zahlen ($\varepsilon^2 = 0$).

Aus (1), (2), (3) und (4) ergibt sich:

$$(5) \quad \begin{cases} (\hat{\xi}\hat{\xi}) = 1, & (\eta\eta) = 1, \\ (\mathfrak{x}\mathfrak{x}) = 0, & (\mathfrak{x}\hat{\xi}) = 0, & (\mathfrak{x}\eta) = 0; \end{cases}$$

daraus sieht man, dass \mathfrak{x} einen Berührungspunkt zweier Kugeln $\hat{\xi}$ und η bezeichnet.

Betrachten wir eine Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$, wo

$$(6) \quad \mathfrak{x}(u, v) = \{\hat{\xi}(u, v) - \eta(u, v)\} \{1 + (\hat{\xi}\eta)\}$$

gültig ist, wo u und v Parameter sind.

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXVI, No. 3, June, 1939.]

(1) Vgl. MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI (1939), S. 363.

Führen wir die von Gauss herrührenden Abkürzungen ein :

$$(7) \quad \begin{cases} E = \xi_u^2 = \{\xi_u - \eta_u\}^2 \cdot \{1 + (\xi\eta)\}^2, \\ F = \xi_u \xi_v = \{\xi_u - \eta_u\} \cdot \{\xi_v - \eta_v\} \{1 + (\xi\eta)\}^2, \\ G = \xi_v^2 = \{\xi_v - \eta_v\}^2 \cdot \{1 + (\xi\eta)\}^2, \end{cases}$$

so erhalten wir

$$(8) \quad s = \int \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt,$$

wo s die Bogenlänge unserer durch

$$(9) \quad \chi(u(t), v(t)) = \xi(t)$$

gegebenen Kurve bedeutet, wo t Parameter ist.

Die Flächennormale $\bar{\xi}$ ist mit

$$(10) \quad \bar{\xi} = \frac{\xi_u \times \xi_v}{\sqrt{(\xi_u \times \xi_v)^2}}$$

oder

$$(11) \quad \bar{\xi} = \frac{\xi_u \times \xi_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

gegeben ; daraus sieht man, dass $\bar{\xi}$ mit ξ und η zu berechnen ist.

Weiter kann man berechnen :

$$(12) \quad \begin{cases} L = \frac{(\xi_{uu} \xi_u \xi_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ M = \frac{(\xi_{uv} \xi_u \xi_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N = \frac{(\xi_{vv} \xi_u \xi_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \end{cases}$$

wo E, F, G die ersten Fundamentargrößen und L, M, N die zweiten bedeuten.

Für einen Krümmungsstreifen ist gültig

$$(13) \quad (\bar{\xi}, d\xi, d\bar{\xi}) = 0.$$

Dafür, dass die Parameterlinien ein konjugiertes Netz bilden, haben wir die Bedingung

$$(14) \quad M = 0$$

oder

$$(15) \quad (x_{uv} x_u x_v) = 0.$$

Man kann (10), (11), (12), (13) und (14) mit $\hat{\xi}$ und η berechnen. Diese letzte Bedingung (15) ist sicher zu erfüllen, wenn

$$(16) \quad x_{uu} = 0$$

ist, wenn also x die Gestalt hat:

$$(17) \quad \begin{cases} x = u(u) + v(v) \\ \quad = \{\hat{\xi} - \eta\} \cdot \{1 + (\hat{\xi}\eta)\}. \end{cases}$$

Man nennt nach LIE solche Fläche Schiebfläche oder Translationsfläche.

Von (2), (3) und (4) gilt das Gleiche.

Weiter kann man die obengenannte Fläche zum n -dimensionalen Raum erweitern.

(B) Wir betrachten

$$(1) \quad x = \hat{\xi} - \eta,$$

wo $\hat{\xi}$ und η Kreise in R_s sind. Da

$$(2) \quad (\hat{\xi}\eta) = 1$$

gilt, so folgt aus (1)

$$(3) \quad (x\hat{\xi}) = 0, \quad (x\eta) = 0, \quad (x\eta) = 0;$$

daraus sieht man, dass x der Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\xi}$ und η ist.

Von

$$(4) \quad x = \hat{\xi} + \eta, \quad (\hat{\xi}\eta) = -1$$

gilt das Gleiche.

$x(t) = \hat{\xi}(t) - \eta(t)$ bezeichnet Raumkurve (R) in R_s , wo t Parameter ist.

Als Grenzlage der Sehne ergibt sich so die Tangente, die mittels eines Parameters r folgendermassen dargestellt werden kann:

$$(5) \quad \begin{cases} \eta = \xi + r\xi' \\ = \{\xi - \eta\} + r\{\xi' - \eta'\}. \end{cases}$$

Man bezeichnet die Krümmung üblicherweise mit $1:\rho$.

Wir finden also

$$(6) \quad \begin{cases} 1/\rho = \sqrt{\xi'^2} \\ = \sqrt{\xi''^2 - \eta''^2}. \end{cases}$$

Weiter kann man

$$(7) \quad \frac{1}{\tau} = \frac{(\ddot{\xi} \times \ddot{\xi})}{(\dot{\xi} \times \dot{\xi})^2}$$

berechnen, wo $1/\tau$ die Windung von (R) bedeutet. Hier bedeuten die Punkte die Ableitungen nach t .

$\xi(u, v) = \xi(u, v) - \eta(u, v)$ bezeichnet Flächen in R_3 .

Für $\xi(u, v)$ kann man untersuchen wie in (1), wo u und v Parameter sind.

Von

$$(8) \quad \xi = \xi + \eta, \quad (\xi\eta) = -1$$

gilt das Gleiche.

(C) ξ ist der Berührungspunkt zweier Kreise ξ und η , wo

$$(1) \quad \xi = \xi - (\xi\eta)\eta$$

gilt.

Wir betrachten den Kreis η , wo

$$(2) \quad \eta(t) + \lambda(t)\xi(t)$$

gültig ist, da t Parameter ist.

Wenn man

$$(3) \quad d/dt \cdot (\eta + \lambda\xi) \cdot d/dt \cdot \xi = 0$$

erhält, so folgt aus (2)

$$(4) \quad (\dot{\eta} + \dot{\lambda} \xi + \lambda \dot{\xi}) \dot{\xi} = \dot{\eta} \dot{\xi} + \lambda \dot{\xi}^2 = 0$$

oder

$$(5) \quad \lambda = -\dot{\eta} \dot{\xi} / \dot{\xi}^2,$$

so kommt aus (1) und (5):

$$(6) \quad \eta - \frac{\dot{\eta} \{ \dot{\xi} - (\dot{\xi} \eta) \eta \}}{\{ \dot{\xi} - (\dot{\xi} \eta) \eta \}} \{ \dot{\xi} - (\dot{\xi} \eta) \eta \},$$

wo λ eine skalare Grösze ist, da η einen Kreis bedeutet.

(D) Bezeichnet man den Radius des umschriebenen Kreises ξ vom Dreieck $(1)\xi (2)\xi (3)\xi$ mit R , so gilt⁽¹⁾

$$(1) \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 9 R^2,$$

wobei die Gleichheit gültig ist, dann und nur dann, wenn das Dreieck regulär ist. Da a, b, c die Seiten des Dreiecks

$$(2) \quad (1)\xi (2)\xi (3)\xi$$

bedeuten,

Man kann

$$(3) \quad \begin{cases} (1)\xi = \xi - (\xi \cdot (1)\eta) (1)\eta, & (\xi \cdot (1)\eta)^2 = 1, \\ (2)\xi = \xi - (\xi \cdot (2)\eta) (2)\eta, & (\xi \cdot (2)\eta)^2 = 1, \\ (3)\xi = \xi - (\xi \cdot (3)\eta) (3)\eta, & (\xi \cdot (3)\eta)^2 = 1 \end{cases}$$

setzen⁽²⁾, so bekommt man

$$(4) \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = ((1)\xi (2)\xi) + ((2)\xi (3)\xi) + ((3)\xi (1)\xi) \\ = \{ (\xi (1)\eta) (\xi (2)\eta) ((1)\eta (2)\eta) - 1 \} + \{ (\xi (2)\eta) (\xi (3)\eta) ((2)\eta (3)\eta) - 1 \} \\ + \{ (\xi (3)\eta) (\xi (1)\eta) ((3)\eta (1)\eta) - 1 \} \\ = (\xi (1)\eta) (\xi (2)\eta) ((1)\eta (2)\eta) + (\xi (2)\eta) (\xi (3)\eta) ((2)\eta (3)\eta) \\ + (\xi (3)\eta) (\xi (1)\eta) ((3)\eta (1)\eta) - 3, \end{cases}$$

(1) KUBOTA, T.: Einige Ungleichheiten für das Dreieck und das konvexe Polygon, Tôhoku Math. Journ. 25 (1925), S. 122.

(2) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Band, S. 122.

so folgt aus (1) und (4)

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\xi_{(1)}\eta)(\xi_{(2)}\eta)(\xi_{(1)}\eta_{(2)}\eta) + (\xi_{(2)}\eta)(\xi_{(3)}\eta)(\xi_{(2)}\eta_{(3)}\eta) \\ & + (\xi_{(3)}\eta)(\xi_{(1)}\eta)(\xi_{(3)}\eta_{(1)}\eta) - 3 \leq 9R^2, \end{aligned} \right.$$

(5) ist unsere Bedingung.

Mit der gleichen Methode kann man HAYASIS Ungleichheit

$$(6.) \quad 4d^4 \leq \sigma^4 - 48F^2,$$

WEITZEINBÖCKS Ungleichheit

$$(7) \quad \frac{F}{a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

u. s. w. berechnen⁽¹⁾, wo

$$(8) \quad a^2 + b^2 + c^2 = \sigma^2, \quad d = 2R,$$

ist und F den Flächeninhalt des Dreiecks ${}_{(1)}\xi_{(2)}\xi_{(3)}\xi$ bedeutet.

Man kann anstatt (3)

$$(9) \quad {}_{(1)}\xi = {}_{(1)}\hat{\xi} - ({}_{(1)}\hat{\xi} \, \eta) \, \eta, \quad ({}_{(1)}\hat{\xi} \, \eta)^2 = 1$$

annehmen, in denen R den Radius des umschriebenen Kreises η ausdrückt.

Man kann oben im Raume verallgemeinern, wo wir $\hat{\xi}$ und η als Kugeln anstatt Kreise betrachten.

Aus

$$(10) \quad \xi = \hat{\xi} + \eta$$

und

$$(11) \quad \bar{\xi} = \hat{\xi} - \eta$$

folgt

$$(12) \quad (\xi \, \bar{\xi}) = 0;$$

daraus sieht man, dass zwei Punkte ξ und $\bar{\xi}$ miteinander zusammenfallen.

(1) Vgl. NAKAZIMA, S.: Some Inequalities between the Fundamental Quantities of the Triangle, Tôhoku Math. Journ. 25 (1925), S. 119.

Setzen wir

$$(13) \quad \eta = \hat{\zeta} + (\hat{\zeta} \eta) \gamma$$

und

$$(14) \quad \bar{\eta} = \bar{\hat{\zeta}} - (\bar{\hat{\zeta}} \eta) \gamma,$$

so folgt

$$(15) \quad (\eta \bar{\eta}) = 0,$$

so sieht man, dass zwei Punkte η und $\bar{\eta}$ miteinander zusammenfallen.

(E) Wir betrachten

$$(1) \quad \chi = \hat{\zeta} - (\hat{\zeta} \gamma) \gamma, \quad (\hat{\zeta} \gamma)^2 = 1,$$

wo $\hat{\zeta}, \gamma$ Kreise in R_2 und χ ein Punkt ist.

Ist ζ ein Kreis und χ ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(2) \quad \eta = 2(\chi \zeta) \zeta - \chi$$

der zu χ in bezug auf den Kreis ζ inverse Punkt.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \quad \begin{cases} \eta = 2(\{\hat{\zeta} - (\hat{\zeta} \eta) \gamma\}, \zeta) \zeta - \{\hat{\zeta} - (\hat{\zeta} \eta) \gamma\} \\ = 2\left(\{\hat{\zeta} - (\hat{\zeta} \eta) \gamma\}, \frac{\hat{\zeta} + \gamma}{2}\right) \frac{\hat{\zeta} + \gamma}{2} - \{\hat{\zeta} - (\hat{\zeta} \eta) \gamma\} \\ = -\{\hat{\zeta} - (\hat{\zeta} \eta) \gamma\}, \end{cases}$$

daraus kommt

$$(4) \quad \chi + \eta = 0,$$

wo $\zeta = \{\hat{\zeta} + \gamma\} : 2$ gesetzt ist.

Nehmen wir

$$(5) \quad \bar{\xi} - (\bar{\xi} \bar{\eta}) \bar{\eta}$$

anstatt η in (2), so folgt

$$(6) \quad \bar{\xi} - (\bar{\xi} \bar{\eta}) \bar{\eta} = 2(\{\hat{\zeta} - (\hat{\zeta} \eta) \gamma\}, \zeta) \zeta - \{\hat{\zeta} - (\hat{\zeta} \eta) \gamma\}.$$

(F) Wir betrachten einen Kreis η in R_2 , der die drei Punkte hindurchgeht :

$$(1) \quad {}_{(i)}x = {}_{(i)}\xi - ({}_{(i)}\xi {}_{(i)}\eta) {}_{(i)}\eta, \quad ({}_{(i)}\xi {}_{(i)}\eta)^2 = 1, \quad [i=1, 2, 3],$$

so folgt

$$(2) \quad 0 = ({}_{(i)}x \eta) = ({}_{(i)}\xi \eta) - ({}_{(i)}\xi {}_{(i)}\eta) ({}_{(i)}\eta \eta)$$

oder

$$(3) \quad ({}_{(i)}\xi \eta) = ({}_{(i)}\xi {}_{(i)}\eta) ({}_{(i)}\eta \eta),$$

wo ${}_{(i)}\xi$ und ${}_{(i)}\eta$ Kreise in R_2 bedeuten.

${}_{(i)}x$ ist der Berührungspunkt zweier Kreise ${}_{(i)}\xi$ und ${}_{(i)}\eta$.

Berühren sich zwei Kreise η und $\bar{\eta}$, so haben wir

$$(4) \quad (\eta \bar{\eta}) = 1,$$

wo

$$(5) \quad ({}_{(i)}\xi \eta)^2 = ({}_{(i)}\eta \eta)^2, \quad ({}_{(i)}\xi \bar{\eta})^2 = ({}_{(i)}\bar{\eta} \bar{\eta})^2$$

gültig sind.

Ist $\bar{\eta}$ der zu ${}_{(i)}\xi$ inverse Kreis in bezug auf η , so folgt

$$(6) \quad \bar{\eta} = 2 ({}_{(i)}\xi \eta) \eta - {}_{(i)}\xi;$$

daraus ergibt sich

$$(7) \quad (\eta \bar{\eta}) = ({}_{(i)}\xi \eta).$$

Aus (4), (5) und (7) kommt

$$(8) \quad ({}_{(i)}\eta \eta) = 1,$$

daraus sieht man, dass sich ${}_{(i)}\eta$ und η berühren.

(G) ξ und η seien zwei Kreise in R_2 , so bezeichnet x in

$$(1) \quad x = \xi - (\xi \eta) \eta, \quad (\xi \eta)^2 = 1$$

den Berührungspunkt von ξ und η .

Wenn x der Berührungspunkt zweier Kreise ξ und $\bar{\eta}$ ist, so hat man zur Folge

$$(2) \quad x = \xi - (\xi \eta) \eta = \xi - (\xi \bar{\eta}) \bar{\eta}, \quad (\xi \bar{\eta})^2 = 1;$$

daraus ergibt sich

$$(3) \quad (\xi \bar{\xi}) = (\xi \bar{\eta}), \quad \text{oder} \quad (\xi \bar{\xi}) = -(\xi \bar{\eta})$$

d. h.

$$(4) \quad \cos \phi = \cos \psi \quad \text{oder} \quad \cos \phi = -\cos \psi,$$

wo ϕ der Winkel zwischen ξ und $\bar{\xi}$, ψ der zwischen ξ und $\bar{\eta}$ ist.

Aus (2) folgt

$$(5) \quad (\bar{\xi} \eta)^2 = (\eta \bar{\eta})$$

oder

$$(6) \quad (\xi \bar{\eta})^2 = (\eta \bar{\eta})$$

d. h.

$$(7) \quad \cos^2 \zeta_1 = \cos \phi$$

oder

$$(8) \quad \cos^2 \zeta_2 = \cos \phi,$$

wo ζ_1 der Winkel zwischen $\bar{\xi}$ und η , ϕ der zwischen η und $\bar{\eta}$, ζ_2 der zwischen ξ und $\bar{\eta}$ ist.

(H) Es seien die Kreise

$$(1) \quad {}_{(1)}\hat{\xi}, {}_{(2)}\hat{\xi}, \dots, {}_{(k)}\hat{\xi}$$

in R_2 gegeben, die ${}_{(1)}\hat{\xi}$, ${}_{(2)}\hat{\xi}$ in ${}_{(1)}\mathfrak{L}$ und ${}_{(2)}\hat{\xi}$, ${}_{(3)}\hat{\xi}$ in ${}_{(2)}\mathfrak{L}$... berühren so folgen

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}_{(1)}\mathfrak{L} = {}_{(1)}\hat{\xi} - ({}_{(1)}\hat{\xi} {}_{(2)}\hat{\xi}) {}_{(2)}\hat{\xi}, \quad ({}_{(1)}\hat{\xi} {}_{(2)}\hat{\xi})^2 = 1, \\ {}_{(2)}\mathfrak{L} = {}_{(2)}\hat{\xi} - ({}_{(2)}\hat{\xi} {}_{(3)}\hat{\xi}) {}_{(3)}\hat{\xi}, \quad ({}_{(2)}\hat{\xi} {}_{(3)}\hat{\xi})^2 = 1, \\ \dots\dots\dots \\ {}_{(k)}\mathfrak{L} = {}_{(k)}\hat{\xi} - ({}_{(k)}\hat{\xi} {}_{(1)}\hat{\xi}) {}_{(1)}\hat{\xi}, \quad ({}_{(k)}\hat{\xi} {}_{(1)}\hat{\xi})^2 = 1. \end{array} \right.$$

Wenn ${}_{(i)}\mathfrak{L}$ auf einem Kreise \mathfrak{y} liegt, so folgt

$$(3) \quad {}_{(i)}\mathfrak{L}\mathfrak{y} = 0, \quad [i=1, 2, \dots, k]$$

oder

$$(4) \quad ({}_{(i)}\hat{\xi} \mathfrak{y}) = ({}_{(i)}\hat{\xi} {}_{(i+1)}\hat{\xi}) ({}_{(i+1)}\hat{\xi} \mathfrak{y})$$

oder

$$(5) \quad (\epsilon_1 \hat{\epsilon} \eta)^2 = (\epsilon_{i+1} \hat{\epsilon} \eta)^2,$$

(I) $\epsilon_1 \mathfrak{E}$ ist der Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\epsilon}$ und η in R_2 , so folgt

$$(1) \quad \epsilon_1 \mathfrak{E} = \eta - (\hat{\epsilon} \eta) \eta, \quad (\hat{\epsilon} \eta)^2 = 1.$$

$\epsilon_2 \mathfrak{E}$ ist der Berührungspunkt zweier Kreise η und ζ in R_2 , so bekommt man

$$(2) \quad \epsilon_2 \mathfrak{E} = \eta - (\eta \zeta) \zeta, \quad (\eta \zeta)^2 = 1.$$

$\epsilon_3 \mathfrak{E}$ ist der Berührungspunkt zweier Kreise ζ und $\hat{\epsilon}$ in R_2 , so hat man

$$(3) \quad \epsilon_3 \mathfrak{E} = \zeta - (\zeta \hat{\epsilon}) \hat{\epsilon}, \quad (\zeta \hat{\epsilon})^2 = 1.$$

Ist \mathfrak{x} ein Punkt, wo

$$(4) \quad \overline{\epsilon_1 \mathfrak{E} \mathfrak{E}} = \overline{\epsilon_2 \mathfrak{E} \mathfrak{E}} = \overline{\epsilon_3 \mathfrak{E} \mathfrak{E}},$$

so folgt

$$(5) \quad \begin{cases} (\hat{\epsilon} \mathfrak{E}) - (\hat{\epsilon} \eta)(\eta \mathfrak{E}) = (\eta \mathfrak{E}) - (\eta \zeta)(\zeta \mathfrak{E}) \\ \quad \quad \quad = (\zeta \mathfrak{E}) - (\zeta \hat{\epsilon})(\hat{\epsilon} \mathfrak{E}). \end{cases}$$

Sind $\hat{\epsilon}$, η und ζ drei Kreise in R_2 , die gleiche Gröszen sind, so ist zu erhalten:

$$(6) \quad \begin{cases} (\hat{\epsilon} \eta) - (\hat{\epsilon} \zeta)(\eta \zeta) \\ \quad \quad \quad = (\eta \zeta) - (\eta \hat{\epsilon})(\zeta \hat{\epsilon}) \\ \quad \quad \quad = (\zeta \hat{\epsilon}) - (\zeta \eta)(\hat{\epsilon} \eta). \end{cases}$$

(J) \mathfrak{x} ist der Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\epsilon}$ und η in R_2 , so folgt

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \hat{\epsilon} - (\hat{\epsilon} \eta) \eta, \quad (\hat{\epsilon} \eta)^2 = 1.$$

Fällt ein Punkt \mathfrak{p} in R_2 mit \mathfrak{x} zusammen, so folgt

$$(2) \quad (\hat{\epsilon} \mathfrak{p}) = (\hat{\epsilon} \eta)(\mathfrak{p} \eta)$$

oder

$$(3) \quad (\xi p)^2 = (\eta p)^2.$$

(3) ist die Bedingung dafür, dass p und ξ miteinander zusammenfallen.

Wenn

$$(4) \quad \overline{px} = \text{const.},$$

so

$$(5) \quad \text{const.} = (\xi p) - (\xi \eta)(\eta p).$$

Wenn ein Kreis η zwei Kreise ξ und γ in R_2 berühren, so haben wir

$$(6) \quad {}_{(1)}x = \xi - (\xi \eta) \eta, \quad (\xi \eta)^2 = 1$$

und

$$(7) \quad {}_{(2)}x = \eta - (\eta \gamma) \gamma, \quad (\eta \gamma)^2 = 1.$$

Der Abstand zwischen ${}_{(1)}x$ und ${}_{(2)}x$ ist gleich

$$(8) \quad ({}_{(1)}x {}_{(2)}x) = (\xi \eta) - (\xi \gamma)(\eta \gamma) = \begin{cases} 2, \\ 0, \\ -2. \end{cases}$$

Wenn ${}_{(1)}x$ und ${}_{(2)}x$ miteinander zusammenfallen, so folgt

$$(9) \quad ({}_{(1)}x {}_{(2)}x) = 0$$

oder

$$(10) \quad (\xi \eta) = (\xi \gamma)(\eta \gamma)$$

oder

$$(11) \quad (\xi \gamma)^2 = 1.$$

(K) $\eta, \xi, \gamma, \zeta, \dots$ seien die Kreise in R_2 , x der Berührungspunkt zwischen ξ und η , und y der zwischen η und ζ u. s. w. ist, so folgt

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \xi - (\xi \eta) \eta, \quad (\xi \eta)^2 = 1, \\ y = \eta - (\eta \zeta) \zeta, \quad (\eta \zeta)^2 = 1, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Geht v die Punkte ξ, η, \dots hindurch, so hat man zur Folge

$$(2) \quad \begin{cases} (v\xi) = (\xi\eta)(v\eta), \\ (v\eta) = (\eta\zeta)(v\zeta), \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

oder

$$(3) \quad \begin{cases} (v\xi)^2 = (v\eta)^2, \\ (v\eta)^2 = (v\zeta)^2, \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

oder

$$(4) \quad (v\xi)^2 = (v\eta)^2 = (v\zeta)^2 = \dots$$

oder

$$(5) \quad \cos^2 \phi_1 = \cos^2 \phi_2 = \cos^2 \phi_3 = \dots,$$

wo ϕ_1 der Winkel zwischen v und ξ , ϕ_2 der zwischen v und η , ϕ_3 der zwischen v und ζ , u. s. w. ist.

(L) Wir betrachten⁽¹⁾

$$(1) \quad \xi = \xi - (\xi\eta)\eta$$

und

$$(2) \quad \bar{\eta} = \cos \alpha \cdot \xi + \sin \alpha \cdot \xi';$$

so kommt⁽²⁾ aus (1)

$$(3) \quad \dot{\xi} = \dot{\xi} - (\dot{\xi}\eta)\eta;$$

daraus ergibt sich

$$(4) \quad \begin{cases} \xi \cos \alpha + \dot{\xi} \sin \alpha = \{\xi \cos \alpha + \dot{\xi} \sin \alpha\} \\ \quad \quad \quad - (\{\xi \cos \alpha + \dot{\xi} \sin \alpha\} \eta) \eta \end{cases}$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Homb. Univ., Bd. IV, S. 122.

(2) THOMSEN, a. a. O., S. 132.

oder

$$(5) \quad \bar{x} \cos \alpha + \dot{x} \sin \alpha = \bar{\eta} - (\bar{\eta} \eta) \eta.$$

Aus (1) folgt

$$(6) \quad \dot{x} = \dot{\xi} - (\dot{\xi} \eta) \eta, \quad \ddot{x} = \ddot{\xi} - (\ddot{\xi} \eta) \eta,$$

daraus kommt

$$(7) \quad \begin{cases} a\bar{x} + b\dot{x} + c\ddot{x} = \{a\bar{\xi} + b\dot{\xi} + c\ddot{\xi}\} \\ \quad - (\{a\bar{\xi} + b\dot{\xi} + c\ddot{\xi}\} \eta) \eta, \end{cases}$$

wo a , b und c konstant sind.

Im allgemeinen folgt

$$\begin{cases} a_0 \bar{x} + a_1 \dot{x} + a_2 \ddot{x} + \dots + a_l \bar{x}^{(l)} \\ \quad = \{a_0 \bar{\xi} + a_1 \dot{\xi} + a_2 \ddot{\xi} + \dots + a_l \bar{\xi}^{(l)}\} \\ \quad - (\{a_0 \bar{\xi} + a_1 \dot{\xi} + \dots + a_l \bar{\xi}^{(l)}\} \eta) \eta, \end{cases}$$

wo a_0, a_1, \dots, a_l Konstanten sind.

Von⁽¹⁾

$$\eta = 2(\bar{\eta} \bar{\xi}) \bar{\xi} - \bar{\eta}$$

gilt das Gleiche.

(2)

(A) Wir betrachten zwei zusammenfallende Punkte η und $\bar{\eta}$ in R_3 , so folgt

$$(1) \quad \eta \eta = \eta \bar{\eta} = \bar{\eta} \bar{\eta} = 0,$$

wo $\eta = \eta(u, v)$ und $\bar{\eta} = \bar{\eta}(u, v)$ ist.

Aus (1) ergibt sich

$$(2) \quad \eta \bar{\eta}_u = \eta \bar{\eta}_v = 0, \quad [\eta_u \bar{\eta} = \eta_v \bar{\eta} = 0],$$

so kann man setzen

(1) THOMSEN, a. a. O., 122.

$$(3) \quad \eta_v = \rho \eta + \sigma \bar{\eta}, \quad \bar{\eta}_u = \bar{\rho} \bar{\eta} + \bar{\sigma} \eta,$$

wo $\rho, \bar{\rho}, \sigma$ und $\bar{\sigma}$ skalare Gröszen sind, woraus sich ergibt:

$$\eta_u \bar{\eta}_u = \eta_v \bar{\eta}_v = \eta_u \bar{\eta}_u = 0.$$

Da u und v Parameter sind.

Weiter kann man untersuchen wie in BLASCHKE'S Buch⁽¹⁾.

(B) Wir betrachten zwei Kreise

$$(1) \quad \xi + \varepsilon \eta \quad \text{und} \quad \xi - \varepsilon \eta,$$

wo ξ und η zwei Kreise in R_2 bedeuten, so folgt

$$(2) \quad (\xi + \varepsilon \eta, \xi - \varepsilon \eta) = 1,$$

da ε der Rechenregel

$$(3) \quad \varepsilon^2 = 0$$

genügt, und erhalten einen dual-komplexen.

Aus (3) sieht man, dass sich zwei Kreise $\xi + \varepsilon \eta$ und $\xi - \varepsilon \eta$ berühren.

(C) Es seien zwei Kreise ξ und η in R_2 gegeben, so bezeichnet

$$(1) \quad \xi + \varepsilon \eta$$

einen Kreis in R_2 .

$\xi - i \eta$ bezeichnet einen Punkt in R_2 , wo

$$(2) \quad \xi \perp \eta$$

gilt.

Weiter ist gültig

$$(3) \quad (\xi + \varepsilon \eta, \xi + i \eta) = 1 + i \varepsilon,$$

so liegt

$$(4) \quad \xi + i \eta$$

auf

$$(5) \quad \xi + \varepsilon \eta.$$

(1) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie III (1929), S. 398.

nicht, wo man

$$(6) \quad i^2 = -1, \quad \varepsilon^2 = 0$$

zur Folge hat.

(D) Wir betrachten

$$(1) \quad T = \lambda_1 \alpha^I + \lambda_2 \alpha^{II},$$

wo α^I einen Punkt in R_3 , α^{II} eine Kugel in R_3 bezeichnet.

Aus (1) folgt

$$(2) \quad (TT) = (\lambda_2)^2 \alpha^{II} \alpha^{II},$$

oder

$$(3) \quad (TT) = (\lambda_2^2),$$

wo λ_i skalare Größen bedeuten. Da liegt α^I auf α^{II} .

(E) Wir betrachten

$$(1) \quad \beta = \xi + i\eta + \varepsilon(\bar{\xi} + i\bar{\eta}),$$

wo β , ξ , η , $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Kreise in R_2 bedeuten. Da gelten

$$i^2 = -1 \quad \text{und} \quad \varepsilon^2 = 0,$$

Aus (1) ergeben sich

$$(2) \quad 1 = (\xi\eta) + i + \varepsilon(\eta\bar{\xi}) + i\varepsilon(\eta\bar{\eta})$$

und

$$(3) \quad 1 = (\xi\bar{\xi}) + i(\eta\bar{\eta}) + \varepsilon(\xi\bar{\eta}) + \varepsilon i(\eta\bar{\xi}),$$

wenn β η und $\bar{\xi}$ berührt.

Aus (2) und (3) folgen

$$(4) \quad 1 = \cos \varphi_1 + i + \varepsilon \cos \varphi_2 + i \varepsilon \cos \varphi_3$$

und

$$(5) \quad 1 = \cos \varphi_4 + i \cos \varphi_2 + \varepsilon \cos \varphi_5 + \varepsilon i \cos \varphi_6,$$

wo φ der Winkel zwischen ξ und $\bar{\eta}$, φ_2 der zwischen η und $\bar{\xi}$, φ_3 der zwischen η und $\bar{\eta}$, φ_4 der zwischen ξ und $\bar{\xi}$, φ_5 der zwischen ξ und $\bar{\xi}$, φ_6 der zwischen $\bar{\eta}$ und $\bar{\xi}$ ist.

Nun setzen wir

$$(6) \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta + \varepsilon(\bar{\xi} - i\bar{\eta}),$$

so kann man aus (1) und (6) den Winkel zwischen ζ und $\bar{\zeta}$ berechnen.

(3)

Im folgenden möchten wir

$$(a) \quad \eta = 2(\zeta \xi) \xi - \zeta$$

betrachten⁽¹⁾.

(A) Aus (a) folgt

$$(1) \quad (\eta \zeta) = 2(\zeta \xi)(\xi \zeta) - (\zeta \zeta),$$

wo ζ, ξ, η die Kreise in R_2 sind.

Wenn ζ η und ζ berührt, so folgt

$$(2) \quad 1 = 2(\zeta \xi)(\zeta \xi) - 1;$$

daraus folgt

$$(3) \quad 1 = (\zeta \xi)(\zeta \xi).$$

Aus (3) sieht man, dass ζ auf ξ nicht senkrecht ist.

(B) Aus

$$(1) \quad \eta = 2(\zeta \xi) \xi - \zeta$$

folgt

$$(2) \quad \{\eta + \zeta\} : 2 = (\zeta \xi) \xi$$

oder

$$(3) \quad \zeta \{\eta + \zeta\} : 2 = (\zeta \xi)(\zeta \xi),$$

oder

$$(4) \quad 0 = (\zeta \xi)(\zeta \xi),$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo., Abh. aus dem Math. Seminar, der Hamb. Univ., Bd. IV, S. 122.

wenn

$$(5) \quad \{\eta + \zeta\} : 2 \perp \zeta$$

gültig ist.

Aus (5) kommt

$$\zeta \perp \xi \quad \text{oder} \quad \xi \perp \zeta,$$

(C) Aus

$$\eta = 2(\zeta \xi) \xi - \zeta$$

folgt

$$\eta + \zeta = 2(\zeta \xi) \xi$$

oder

$$2 + 2(\eta \zeta) = 4$$

oder

$$(\eta \zeta) = 1,$$

d. h. η und ζ berühren sich, wenn sich ζ und ξ berühren, wenn ξ, η, ζ die Kreise in R_2 sind.

(4)

(A) Es sei

$$(1) \quad f(x^a) = \text{const.} \quad [a = I, II, III]$$

die Gleichung eines Kurvenpaares, so folgt

$$(2) \quad f(x^a + \partial x^a) = f(x^a)$$

oder

$$(3) \quad \partial f / \partial x^a \cdot \partial x^a = 0,$$

wo x^a [$d=I, II, III$] Kugeln in R_3 bedeuten.

Bezeichnen wir $\partial f / \partial x^a$ mit p_a , so kommt aus (3)

$$(4) \quad p_a \cdot \partial x^a = 0,$$

wo

$$(5) \quad f_\lambda = \rho p_\lambda$$

gilt. Da ρ beliebig gewählt werden kann.

Die Theorie der PFAFFschen Formen belehrt bekanntlich, dass die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer derartigen Funktion f durch die Gleichung

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} p_k \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial x^\mu} - \frac{\partial p_\mu}{\partial x^\lambda} \right) + p_\lambda \left(\frac{\partial p_\mu}{\partial x^k} - \frac{\partial p_k}{\partial x^\mu} \right) \\ + p_\mu \left(\frac{\partial p_k}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial p_\lambda}{\partial x^k} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

gegeben sind.

(B)

$$(1) \quad x^\alpha \quad [\alpha = I, II, III]$$

Bezeichnet zwei Punkte P, Q in R_s , wo

$$(2) \quad x^\alpha$$

die Kugeln in R_s bedeuten.

Ferner bezeichnet

$$(3) \quad \bar{x}^\alpha \quad [\alpha = I, II, III]$$

zwei Punkte L, M in R_s .

Nun nehmen wir an, dass P, Q, L, M auf einer Gerade l liegen, und definieren die zwei Punkte P und Q mit Hilfe einer quadratischen Gleichung

$$(4) \quad Q_{rs} \lambda^r \lambda^s = 0,$$

und ähnlich erweise L und M mit

$$(5) \quad R_{rs} \lambda^r \lambda^s = 0.$$

Das Tripelverhältnis wird dann in folgender Weise dargestellt, wie man aus der Berechnung erkennt:

$$(6) \quad (O; P, Q, L, M) = \frac{Q_{rs} \lambda^r \lambda^s}{R_{rs} \lambda^r \lambda^s} \frac{R_{11} R_{22} - R_{12}^2}{Q_{11} Q_{22} - Q_{12}^2},$$

wo O ein fester Punkt auf l ist.

(C) Geben wir durch einen Punkt \mathfrak{z} drei Kugeln

$$(1) \quad \mathfrak{x}^a \quad [a = I, II, III]$$

in R_3 und durch einen weiteren Punkt \mathfrak{z}^* ebenfalls drei Kugeln \mathfrak{x}^{*a} vor, so gibt es genau vier MÖBIUSTransformationen des R_3 -Raumes, die die Figur

$$(2) \quad \{\mathfrak{z} \mathfrak{x}^a\}$$

überführen in die Figur

$$(3) \quad \{\mathfrak{z}^* \mathfrak{x}^{*a}\}.$$

Wir können zunächst durch eine Ähnlichkeit \mathfrak{z} in \mathfrak{z}^* überführen, dann gehen die \mathfrak{x}^a dabei in drei Kugeln \mathfrak{x}^{*a} durch \mathfrak{z}^* über.

Nun kann man auf zwei verschiedene Weisen durch eine Kreisverwandtschaft durch \mathfrak{z}^* eine \mathfrak{x}^{*a} in die \mathfrak{x}^a überführen.

Auszer jeder solchen Kreisverwandtschaft haben wir dann nach dem eben ausgeführten noch zwei zugehörige Transformationen des R_3 -Raumes.

Diese vier Abbildungen sind nun auch die einzig möglichen.

Denn die Figur

$$(4) \quad \{\mathfrak{z}^* \mathfrak{x}^{*a}\}$$

kann, wenn man die Identität mitrechnet, nur durch vier Transformationen in sich übergeführt werden.

Zunächst gibt es zu der Identität auf dem Punkte \mathfrak{z}^* zwei Kreisverwandtschaften einmal die Identität des R_3 -Raumes, dann die Inversion an \mathfrak{z}^* , die alle Kugeln durch \mathfrak{z}^* in Ruhe lässt.

Dann gibt es die Inversion auf \mathfrak{z}^* , die die Gerade durch die Kugeln \mathfrak{x}^{*a} durch \mathfrak{z} punktweise in Ruhe lässt, und zu dieser gibt es zwei Transformationen im R_3 -Raum, von denen man wieder die eine aus der andern erhält, indem man noch die Inversion an \mathfrak{z}^* ausführt.

Da die Figur

$$(5) \quad \{\mathfrak{z}^* \mathfrak{x}^{*a}\}$$

von 10 Bestimmungsstücken abhängt, ist unsere Gruppe der Abbildungen von MÖBIUS im R_3 -Raum 10 gliedrig.

(D) Wir betrachten zwei Punktepaare ζ und $\bar{\zeta}$, die mit

$$(1) \quad \zeta = a_I \hat{\xi}^I + a_{II} \hat{\xi}^{II} + a_{III} \hat{\xi}^{III},$$

und

$$(2) \quad \bar{\zeta} = \bar{a}_I \bar{\xi}^I + \bar{a}_{II} \bar{\xi}^{II} + \bar{a}_{III} \bar{\xi}^{III}$$

gegeben, wo $\hat{\xi}^a$ und $\bar{\xi}^a$ Kugeln in R_3 und a_a, \bar{a}_a skalare Größen sind.

Wenn

$$(3) \quad (\hat{\xi}^a \bar{\xi}^a) = 0$$

gilt, so fallen ζ und $\bar{\zeta}$ miteinander zusammen.

Wenn die Punkte ζ auf einer Fläche \mathfrak{F} liegen, so folgt

$$(4) \quad (\mathfrak{F} \hat{\xi}^a) = 0.$$

Betreffs

$$\hat{\xi}^a = c_{\beta}^a \hat{\xi}^{\beta}, \quad |c_{\beta}^a| \neq 0, \quad \bar{\xi}^a = \bar{c}_{\mu}^a \bar{\xi}^{\mu}, \quad |\bar{c}_{\mu}^a| \neq 0$$

kann man untersuchen wie in meiner Arbeit⁽¹⁾.

(E) \mathfrak{z} in

$$(1) \quad \mathfrak{z} = \sum_a \rho_a(t) \cdot \mathfrak{x}^a$$

bezeichnen zwei Kurven in R_3 , wo

$$(2) \quad \mathfrak{x}^a \quad [\alpha = I, II, III]$$

Kugeln in R_3 sind, da

$$(3) \quad \sum_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} \cdot \rho_{\alpha}(t) \cdot \rho_{\beta}(t) = 0$$

gültig ist.

Weiter kann man untersuchen wie in BLASCHKES Buch⁽²⁾.

(F) Wir behandeln zunächst den einfachsten Fall der linearen Transformationen, d. h. wir nehmen an, dass der Übergang von \mathfrak{x}^a zu $\bar{\mathfrak{x}}^a$ durch die Formeln

- (1) NAKAZIMA (=MATUMURA = MATUMURA), S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 187.
 (2) BLASCHKE, a. a. O., S. 435.

$$(1) \quad \xi^{\alpha} = Q_{\beta}^{\alpha} \bar{\xi}^{\beta}, \quad [\alpha, \beta = I, II, III]$$

gegeben sei, wo ξ^{α} und $\bar{\xi}^{\beta}$ Kugeln in R_3 bedeuten.

Die Determinante $|Q_{\beta}^{\alpha}|$ sei von Null verschieden, so dass auch die Umkehrung

$$(2) \quad \bar{\xi}^{\beta} = P_{\gamma}^{\beta} \xi^{\gamma}$$

existiert.

Das System der Zahlen P_{γ}^{β} heisst invers zum System Q_{β}^{α} .

Durchs Einsetzen von (2) in (1) erhält man die Identität

$$(3) \quad \xi^{\alpha} = Q_{\beta}^{\alpha} P_{\gamma}^{\beta} \xi^{\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \xi^{\gamma},$$

wo $Q_{\beta}^{\alpha} P_{\gamma}^{\beta} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$ gesetzt ist; es ist also

$$(4) \quad \begin{cases} \delta_{\gamma}^{\alpha} = 1, & \text{wenn } \alpha = \gamma \text{ ist,} \\ \delta_{\gamma}^{\alpha} = 0, & \text{wenn } \alpha \neq \gamma \text{ ist (sich nicht summiert!).} \end{cases}$$

Ebenso erhält man durchs Einsetzen von (1) in (2)

$$(5) \quad P_{\gamma}^{\beta} Q_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\gamma}^{\alpha}.$$

Das Zeichen δ_{γ}^{α} soll stets für das durch (4) definierte System von Zahlen reserviert bleiben,

Wenn u die Koeffizienten einer invarianten Linearform f sind, so schreiben wir

$$(6) \quad f = u_{\alpha} \xi^{\alpha}, \quad [\alpha = I, II, III].$$

Führt man die Transformation (1) aus, so erhält man eine in den neuen Veränderlichen $\bar{\xi}$ ebenfalls lineare Form

$$(7) \quad \bar{f} = \bar{u}_{\alpha} \bar{\xi}^{\alpha}.$$

Wegen der Invarianz von f folgt

$$(8) \quad \bar{f} = f = u_{\alpha} Q_{\beta}^{\alpha} \bar{\xi}^{\beta},$$

so dass

$$(9) \quad \bar{u}_{\beta} = Q_{\beta}^{\alpha} u_{\alpha}$$

ist. Multipliziert man (9) beiderseits mit P_{γ}^{β} und summiert über β , so folgt (CRAMERSche Regel)

$$(10) \quad P_{\tau}^{\beta} \bar{u}_{\beta} = P_{\tau}^{\beta} Q_{\beta}^{\alpha} u_{\alpha} = \delta_{\tau}^{\alpha} u_{\alpha} = u_{\tau}.$$

Die Umkehrung von (9) ist also

$$(11) \quad u_{\alpha} = P_{\alpha}^{\beta} \bar{u}_{\beta}.$$

Man nennt die u in diesem Fall die Bestimmungszahlen oder Komponenten eines kovarianten Vektors u_{α} .

Eine Transformation sei von der Form

$$(12) \quad \bar{x}^{\alpha} = \bar{x}^{\alpha}(\bar{x}) \quad \text{bzw.} \quad \bar{x}^{\alpha} = \bar{x}^{\alpha}(\bar{x})$$

gegeben.

Setzt man nämlich

$$(13) \quad \partial \bar{x}^{\alpha} / \partial \bar{x}^{\beta} = Q_{\beta}^{\alpha} \quad \text{und} \quad \partial \bar{x}^{\alpha} / \partial x^{\beta} = P_{\beta}^{\alpha},$$

so folgen durch die Differentiation von (12)

$$(14) \quad d \bar{x}^{\alpha} = \partial \bar{x}^{\alpha} / \partial \bar{x}^{\beta} \cdot d \bar{x}^{\beta} = Q_{\beta}^{\alpha} d \bar{x}^{\beta}$$

und

$$(15) \quad d \bar{x}^{\alpha} = \partial \bar{x}^{\alpha} / \partial x^{\beta} \cdot d x^{\beta} = P_{\beta}^{\alpha} d x^{\beta},$$

wo P_{β}^{α} und Q_{β}^{α} zueinander invers sind.

(G) Wir betrachten die neuen Kugeln

$$(1) \quad \bar{x}_{\mu}(u^1, u^2) = a^{\mu}(u^1, u^2) \bar{x}_{\mu}(u^1, u^2), \quad [\mu, v = 1, 2, 3, 4]$$

in R_3 , wo

$$(2) \quad \bar{x}_{\mu}$$

Kugeln in R_3 sind. Da u^i Parameter sind.

Wir setzen

$$(3) \quad \left| \bar{x}_r \frac{\partial \bar{x}_s}{\partial u^1} \frac{\partial \bar{x}_t}{\partial u^2} d^2 \bar{x}_v \right| \equiv g_{rst} du^r du^s \quad [r, s = 1, 2].$$

Wenn (3) für jede Transformation von den Parametern

$$(4) \quad \bar{u}^1 = \bar{u}^1(u^1, u^2), \quad \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2)$$

invariant ist, d. h.

$$(5) \quad \bar{g}_{rs} d\bar{u}^r d\bar{u}^s = g_{rs} du^r du^s,$$

so folgt daraus

$$(6) \quad \overline{g_{rs}} = g_{rs} \cdot \partial u^r / \partial \overline{u}^r \cdot \partial u^s / \partial \overline{u}^s.$$

An (6) kann man erkennen, dass g_{rs} ein Tensor ist.

Wir werden daher g_{rs} als Fundamentaltensor für die Massbestimmung annehmen und führen eine RIEMANNsche Übertragung, folglich die kovariante Differentiation im Sinne RIEMANNscher Geometrie, in unsere Theorie ein.

Die kovariante partielle Ableitung eines kovarianten Vektors v_r wird dann durch

$$(7) \quad v_{rs} = \frac{dv_r}{du^s} - \Gamma_{rs}^t v_t$$

definiert, wobei

$$(8) \quad \Gamma_{rs}^t = g'^p \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial u^s} + \frac{\partial g_{ps}}{\partial u^r} - \frac{\partial g_{rs}}{\partial S^p} \right),$$

und g'^p die kontravarianten Bestimmungszahlen des Tensors g_{rs} sei, d. h.

$$(9) \quad \begin{cases} g^{11} = \frac{g_{22}}{G}, & g^{12} = -\frac{g_{12}}{G}, & g^{22} = \frac{g_{11}}{G}, \\ G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2. \end{cases}$$

Setzen wir ferner

$$(10) \quad \xi_v \frac{\partial \xi_r}{\partial u^1} \frac{\partial \xi_s}{\partial u^2} \xi_{r/s} \left| du^r du^s du^t \right|,$$

so folgt

$$(11) \quad g'^{rs} a_{rst} = 0.$$

(H) Es sei

$$(1) \quad f(\xi, \xi) = a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta$$

eine positiv definite quadratische Form. Führt man für die 3 Veränderlichen ξ^α lineare Kombinationen aus zwei verschiedenen und nicht proportionalen anderen Reihen von Veränderlichen ein, setzt also

$$(2) \quad \xi^a = \lambda \eta^a + \mu \zeta^a, \quad [a = \text{I, II, III}],$$

so erhält man

$$(3) \quad \begin{cases} f(\xi, \xi) = a_{\alpha\beta} (\lambda \eta^\alpha + \mu \zeta^\alpha) (\lambda \eta^\beta + \mu \zeta^\beta) \\ \quad = a_{\alpha\beta} [\lambda^2 \eta^\alpha \eta^\beta + \lambda \mu (\eta^\alpha \zeta^\beta + \zeta^\alpha \eta^\beta) + \mu^2 \zeta^\alpha \zeta^\beta]. \end{cases}$$

Löst man die eckige Klammer auf und setzt

$$(4) \quad \begin{cases} a_{\alpha\beta} \eta^\alpha \eta^\beta = f(\eta, \eta), \\ a_{\alpha\beta} \eta^\alpha \zeta^\beta = a_{\alpha\beta} \zeta^\alpha \eta^\beta = f(\eta, \zeta) = f(\zeta, \eta), \\ a_{\alpha\beta} \zeta^\alpha \zeta^\beta = f(\zeta, \zeta), \end{cases}$$

so folgt

$$(5) \quad f(\xi, \xi) = \lambda^2 f(\eta, \eta) + 2 \lambda \mu f(\eta, \zeta) + \mu^2 f(\zeta, \zeta),$$

da gilt⁽¹⁾

$$(6) \quad f(\eta, \eta) f(\zeta, \zeta) - f(\eta, \zeta)^2 > 0.$$

(I) Wenn die Gleichung

$$(1) \quad F(\xi^{\text{I}}, \xi^{\text{II}}, \xi^{\text{III}}, u) = 0$$

mit einer willkürlichen Konstante u ein einfach unendliches Kurvenpaar darstellt, indem die Gleichung $F_u = 0$ nicht infolge von $F = 0$ allein gilt, so kommen die Scharen einhüllender Kurven zu, sobald die durch

$$(2) \quad F = 0 \quad \text{und} \quad F_u = 0$$

bestimmten Schnittpunkte unendlich benachbarter Kurvenpaare der Schar als geometrische Örter das Kurvenpaar erzeugen, die alsdann die Einhüllenden sind.

Diese Einhüllenden berühren die einzelnen Kurvenpaare der Schar längs jener Schnittpunkten, wo ξ^{I} , ξ^{II} und ξ^{III} Kugeln in R_3 bedeuten.

(J) Wir betrachten

$$(1) \quad T = \lambda_1 \alpha^{\text{I}} + \lambda_2 \alpha^{\text{II}} + \lambda_3 \alpha^{\text{III}}.$$

wo α^{I} , α^{II} und α^{III} Kugeln in R_3 , λ_i skalare Größen bedeuten.

(1) LEVI-CIVITA, T.: Der Absolute Differentialkalkül, Berlin, (1928), S. 53.

T' in (1) bezeichnet das Punktpaar in R_s .

Aus (1) folgt

$$(2) \quad (T'T) = \sum_{i,k=1}^3 \lambda_i \lambda_k (\alpha^i \alpha^k) = 0$$

oder

$$(3) \quad (T'T) = \alpha^{ik} \lambda_i \lambda_k = 0,$$

wo

$$(4) \quad \alpha^{ik} = (\alpha^i \alpha^k)$$

gesetzt ist.

(5)

(A) Wir können zwei neue Ebenen

$$(1) \quad \overset{*}{x}^\alpha = \sum_{\beta=1}^{\Pi} c_\beta^\alpha \overset{*}{x}^\beta \quad [\alpha = I, II]$$

als Linearkombinationen der $\overset{*}{x}^\alpha$ einführen mit Koeffizienten c_β^α , deren Determinante

$$(2) \quad |c_\beta^\alpha| \neq 0$$

sein muss, wenn $\overset{*}{x}^I$ und $\overset{*}{x}^{II}$ nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut mit $\overset{*}{x}^\alpha$ eine Gerade dargestellt, wo

$$(3) \quad \overset{*}{x}^\alpha \quad [\alpha = I, II]$$

die Ebenen bedeuten.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Ebenen

$$(4) \quad \overset{*}{x}^\alpha, \overset{*}{y}^\alpha, \overset{*}{z}^\alpha \dots, \quad [\alpha = I, II],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Geraden festlegen, nur von der geometrischen Figur der Gerade abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Ebenen, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen von der Art (1).

Wir wollen (1) auch die Büscheltransformationen der Ebene T' nennen.

Wir betrachten zunächst eine Grade $\overset{*}{x}^\alpha$.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(5) \quad (\xi^a \xi^b) = A^{ab},$$

so haben wir in A^{ab} ein Größensystem, das sich nach (1) in folgender Weise substituiert:

$$(6) \quad \overset{*}{A}{}^{ab} = c^a_{\beta} c^b_{\delta} A^{\tau\delta} \quad [\overset{*}{A}{}^{ab} = (\overset{*}{\xi}^a \overset{*}{\xi}^b)].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis II, und es ist über doppelt vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Für der Gerade T gehörigen Tensor A^{ab} gilt

$$(7) \quad A^{ab} = A^{ba}$$

und auch dass sich ferner die Determinante

$$(8) \quad A = |A^{ab}|$$

nach

$$(9) \quad A^* = |c^a_{\beta}|^2 \cdot A$$

substituiert.

Wollen wir nun eine eigentliche reelle Gerade haben, so müssen wir die Determinante

$$(10) \quad A > 0$$

voraussetzen.

Für

$$(11) \quad A = 0$$

schrumpft die Gerade auf einen Punkt zusammen, da sich dann die λ^a berühren, und für

$$(12) \quad A < 0$$

ist er imaginär.

Ist

$$(13) \quad A^{ab} \equiv 0,$$

so erhalten wir im komplexen Gebiet als Ausartung eine Minimalgerade.

Setzen wir

$$(14) \quad A = 0$$

voraus, so gibt es in dem Büschel der Ebenen χ^a zwei, allerdings nicht reelle, die in Punkt ausarten, die sogenannten Scheitel der Gerade.

Kombiniert sich ein Scheitel u aus den χ^a mit Koeffizienten ρ_a :

$$(15) \quad u = \rho_a \chi^a,$$

so muss gelten:

$$(16) \quad (uu) = \rho_a \rho_b A^{ab} = 0$$

und diese quadratische Gleichung in den homogen Grössen ρ_a hat zwei Lösungen, die wegen

$$(17) \quad A > 0$$

konjugiert komplex sind.

Im folgenden werden wir neben dem Grössensystem A^{ab} ein anderes, gleichfalls symmetrisches A_{ab} verwenden, das wir mit unteren Indizes schreiben, und das sich nach

$$(18) \quad A_{11} = A^{22}/A, \quad A_{12} = -A^{12}/A, \quad A_{22} = A^{11}/A$$

aus den A^{ab} bestimmt.

Es gilt dann

$$(19) \quad A^{ab} A_{\gamma\tau} = \begin{cases} 1 & \text{für } a = \gamma \\ 0 & \text{,, } a \neq \gamma \end{cases}$$

und ferner

$$(20) \quad \frac{1}{2} A^{ab} A_{ab} = 1.$$

Aus der Invarianz der linken Seite von (20) ersieht man, dass A_{ab} ein kovarianter Tensor ist.

Man nennt ihn den zu A^{ab} rezipriken Tensor.

Da die Tensoren spielen werden, wollen wir uns folgender Schreibweise bedienen:

Haben wir einen kontravarianten Vektor X^a definiert, so schreiben wir X_a für $A_{ab} X^b$ und nennen X_a den zu X^a gehörigen kovarianten Vektor.

In der Tat ist X^β ein solcher, denn es gilt

$$(21) \quad A_{\alpha\beta} X^\beta = c_\alpha^\gamma c_\beta^\delta \bar{A}_{\gamma\delta} X^\beta = c_\alpha^\gamma \bar{A}_{\gamma\delta} \bar{X}^\delta.$$

Ebenso gehört zu Y_α der zugehörige kontravariante Vektor

$$(22) \quad Y^\alpha = A^{\alpha\beta} Y_\beta.$$

Wir betrachten zwei Geraden \mathfrak{G} und $\bar{\mathfrak{G}}$, die durch die beiden Ebenepaare \mathfrak{x}^α und $\bar{\mathfrak{x}}^\lambda$ [$\alpha, \lambda = \text{I, II}$] dargestellt sind.

Wir definieren analog zu (5)

$$(23) \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = (\bar{\mathfrak{x}}^\lambda \bar{\mathfrak{x}}^\mu) \quad \text{mit} \quad A^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(24) \quad A = | \bar{A}^{\lambda\mu} | > 0$$

voraus.

Dann haben wir für \mathfrak{G} die Büscheltransformationen

$$(25) \quad \bar{\mathfrak{x}}^{\lambda*} = \bar{c}_\mu^\lambda \bar{\mathfrak{x}}^\mu$$

zu berücksichtigen.

Die \bar{c}_μ^λ in (25) sind aber von den c_β^α in (1) völlig unabhängige neue Grössen.

Daher haben wir unter Vektoren und Tensoren bezüglich der Büscheltransformationen von \mathfrak{G} einerseits und von $\bar{\mathfrak{G}}$ andererseits zu unterscheiden.

In

$$(26) \quad S^{\alpha\lambda} = (\mathfrak{x}^\alpha \bar{\mathfrak{x}}^\lambda)$$

haben wir ein Grössensystem, bei dem beide Arten von Indizes vorkommen, einen „gemischten“ Tensor, der sich nach

$$(27) \quad \bar{S}^{\alpha\lambda} = c_\beta^\alpha \bar{c}_\mu^\lambda S^{\beta\mu}$$

transformiert.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(28) \quad || \mathfrak{x}^{\text{I}}, \mathfrak{x}^{\text{II}}, \bar{\mathfrak{x}}^{\text{I}}, \bar{\mathfrak{x}}^{\text{II}} || \equiv 0$$

ist, wo eine lineare Beziehung der Form

$$(29) \quad \sigma_{\alpha} \xi^{\alpha} = \bar{\sigma}_{\lambda} \bar{\xi}^{\lambda}$$

besteht.

Die Bedeutung von (29) ist aber die, dass es eine Ebene

$$(30) \quad \delta = \sigma_{\alpha} \xi^{\alpha} = \bar{\sigma}_{\lambda} \bar{\xi}^{\lambda}$$

gibt, auf der beide Geraden liegen.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit⁽¹⁾.

$$(31) \quad \xi^{\alpha} \quad [\alpha = I, II, III]$$

bezeichnet den Punkt in R_3 , wo ξ^{α} Ebenen in R_3 sind.

Bezüglich (31) kann man untersuchen wie oben.

Man kann den obenerwähnten Punkt zum n -dimensionalen Raum erweitern.

(B) Wir betrachten eine Figur F , die aus n Kugeln

$$(1) \quad \xi^{\alpha} \quad [\alpha = I, II, \dots, n]$$

in R_N besteht.

Wir können n neue Kugeln

$$(2) \quad \overset{*}{\xi}^{\alpha} = \sum_{\beta=1}^n c_{\beta}^{\alpha} \xi^{\beta} \quad [\alpha = I, II, \dots, n]$$

als Linearkombinationen der ξ^{α} einführen mit Koeffizienten c_{β}^{α} , deren Determinante

$$(3) \quad |c_{\beta}^{\alpha}| \neq 0$$

sein muss, wenn $\overset{*}{\xi}^I, \overset{*}{\xi}^{II}, \dots$ und $\overset{*}{\xi}^n$ nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die $\overset{*}{\xi}^{\alpha}$ unsere Figur F darstellen.

Ein Ausdruck in den

$$(4) \quad \xi^{\alpha}, \eta^{\alpha}, \zeta^{\alpha}, \dots \quad [\alpha = I, II, \dots, n],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von F festlegen, soll nur von der geometrischen Figur der F abhängen.

Wir wollen (2) auch die Büscheltransformationen der F nennen.

Wir betrachten zunächst eine F ξ^{α} .

(1) NAKAZIMA (= MATSUMURA = MATSUMURA), S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1921), S. 187.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(5) \quad (\xi^{\alpha} \xi^{\beta}) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Größensystem, das sich nach (2) in folgender Weise substituiert:

$$(6) \quad \overset{*}{A}^{\alpha\beta} = c_{\beta}^{\alpha} c_{\delta}^{\beta} A^{\tau\delta} \quad [\overset{*}{A}^{\alpha\beta} = (\overset{*}{\xi}^{\alpha} \overset{*}{\xi}^{\beta})].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis n , und es ist über n -mal vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Für

$$(7) \quad A^{\alpha\beta}$$

gilt

$$(8) \quad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$$

und auch dasz sich ferner die Determinante

$$(9) \quad A = |A^{\alpha\beta}|$$

nach

$$(10) \quad A^* = |c_{\beta}^{\alpha}|^2 \cdot A$$

substituiert.

Wollen wir nun eine eigentliche reelle F haben, so müssen wir die Determinante

$$(11) \quad A > 0$$

voraussetzen.

Wir betrachten zwei F und \bar{F} , die durch die beiden Kugeln

$$(12) \quad \xi^{\alpha} \text{ und } \bar{\xi}^{\lambda} \quad [\alpha, \lambda = I, II, \dots, n]$$

dargestellt sind.

Wir definieren analog zu (5)

$$(13) \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = (\bar{\xi}^{\lambda} \bar{\xi}^{\mu}) \text{ mit } \bar{A}^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(14) \quad A = |\bar{A}^{\lambda\mu}| > 0$$

voraus. Dann müssen wir für F die Büscheltransformationen

$$(15) \quad \overset{*}{x}^\lambda = \bar{c}_\mu^\lambda \bar{x}^\mu$$

berücksichtigen.

Die \bar{c}_μ^λ in (15) sind aber von den c_β^α in (2) völlig unabhängige neue Größen.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(16) \quad ||\bar{x}^I, \bar{x}^{II}, \dots, \bar{x}^n, \bar{x}^I, \bar{x}^{II}, \dots, \bar{x}^n|| \equiv 0$$

ist, wo eine lineare Beziehung der Form

$$(17) \quad \sigma_\alpha \bar{x}^\alpha = \bar{\sigma}_\lambda \bar{x}^\lambda$$

besteht.

Die Bedeutung von (17) ist aber die, dass es

$$\delta = \sigma_\alpha \bar{x}^\alpha = \bar{\sigma}_\lambda \bar{x}^\lambda$$

gibt.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit⁽¹⁾.

(C) Wir können zwei neue Flächen

$$(1) \quad \overset{*}{x}^\alpha = \sum_{\beta=1}^{II} c_\beta^\alpha \bar{x}^\beta \quad [\alpha = I, II]$$

als Linearkombinationen der \bar{x}^α einführen mit Koeffizienten c_β^α , deren Determinante

$$(2) \quad |c_\beta^\alpha| \neq 0$$

sein muss, wenn $\overset{*}{x}^\alpha$ und $\overset{*}{x}^{II}$ nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die $\overset{*}{x}^\alpha$ unsere Kurve darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Flächen

$$(3) \quad x^\alpha, y^\alpha, \delta^\alpha, \dots \quad [\alpha = I, II],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Kurven festlegen, nur von der geometrischen Figur der Flächen abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Flächen, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen von der Art (1).

(1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 196.

Dabei werden wir für die verschiedenen Flächen die Substitutionen (1) mit verschiedenen Koeffizientensystemen haben.

Wir wollen (1) auch die Büscheltransformationen der Kurve ξ^a nennen.

Betrachten wir zunächst eine Kurve ξ^a .

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(4) \quad (\xi^a \xi^b) = A^{ab}.$$

so haben wir in A^{ab} ein Grössensystem, das sich nach (1) in folgender Weise substituiert:

$$(5) \quad \bar{A}^{ab} = c_\beta^a c_\delta^b A^{\tau\delta} \quad [\bar{A}^{ab} = (\bar{\xi}^a \bar{\xi}^b)].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis II, und es ist über doppelt vorkommende Indizes auf der rechten Seite zu summieren.

Aus (4) gilt

$$(6) \quad A^{ab} = A^{ba}$$

und ferner ist gültig

$$(7) \quad A^* = |c_\beta^a|^2 \cdot A,$$

wo

$$(8) \quad A = |A^{ab}|.$$

Wollen wir nun eine eigentliche reelle Kurve haben, so müssen wir die Determinante

$$(9) \quad A \neq 0$$

voraussetzen.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit⁽¹⁾.

(D) Wir können n neue Flächen

$$(1) \quad \bar{\xi}^a = \sum_{\beta=1}^n c_\beta^a \xi^\beta \quad [a = I, II, \dots, n]$$

als Linearkombinationen der ξ^a einführen mit Koeffizienten c_β^a , deren Determinante

(1) Vgl. (A) in (5).

$$(2) \quad |c_p^a| \neq 0$$

sein muss, wenn $\overset{*}{x}^I, \overset{*}{x}^{II}, \dots$ und $\overset{*}{x}^n$ nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut mit $\overset{*}{x}^a$ unsere Punkte darstellen, wo

$$(3) \quad x$$

die Fläche in R_3 bedeutet.

Ein Ausdruck in den Koordinaten der Flächen

$$(4) \quad x^a, y^a, z^a, \dots \quad [a = I, II, \dots, n],$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl der Punkte festlegen, soll nur von der geometrischen Figur der Punkte abhängen.

Wir wollen (1) die Büscheltransformationen des Punktes p nennen.

Wir betrachten zunächst ein System der Punkte x^a .

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(5) \quad (x^a x^b) = A^{ab},$$

so haben wir in A^{ab} ein Grössensystem, das sich nach (1) in folgender Weise substituiert:

$$(6) \quad \overset{*}{A}^{ab} = c_a^p c_b^q A^{pq} \quad [\overset{*}{A}^{ab} = (\overset{*}{x}^a \overset{*}{x}^b)].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis n .

Weiter gelten

$$(7) \quad A^{ab} = A^{ba}$$

und

$$(8) \quad A^* = |c_p^a|^2 \cdot A$$

wo

$$(9) \quad A = |A^{ab}|$$

ist.

Wir betrachten zwei Systeme der Punkte

$$(10) \quad p \text{ und } \bar{p},$$

die durch die beiden Flächenpaare

$$(11) \quad x^a \text{ und } \bar{x}^\lambda \quad [a, \lambda = I, II, \dots, n]$$

dargestellt sind.

Wir definieren

$$(12) \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = (\bar{x}^\lambda \bar{x}^\mu) \text{ mit Hilfe von } \bar{A}^{\mu\mu} = \bar{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(13) \quad A = |\bar{A}^{\lambda\mu}| \sim 0$$

voraus.

Dann haben wir für \bar{p} die Büscheltransformationen

$$(14) \quad \bar{x}^\lambda = \bar{c}_\mu^\lambda \bar{x}^\mu$$

zu berücksichtigen.

Die \bar{c}_μ^λ in (14) sind aber von den c_μ^α in (1) völlig unabhängige neue Größen.

Wenn

$$(15) \quad \|\bar{x}^I, \bar{x}^{II}, \dots, \bar{x}^{(n)}, \bar{x}^I, \bar{x}^{II}, \dots, \bar{x}^{(n)}\| \equiv 0$$

gilt, so folgt

$$(16) \quad \sigma_\alpha \bar{x}^\alpha = \bar{\sigma}_\lambda \bar{x}^\lambda.$$

Weiter kann man untersuchen wie oben.

(6)

Im folgenden möchten wir

$$(a) \quad (\theta_i \theta_i), (\theta_i \theta_\tau), (\theta_\tau \theta_\tau), (= 1)$$

darlegen⁽¹⁾.

(A) Kreispunktpolaren sind die Polaren der unendlich fernen Kreispunkte in bezug auf einen Kegelschnitt.

Die durch die Kreispunktpolaren der DUPINSchen Indikatrix auf einer Fläche bestimmten (stets imaginären) Kurven nennt NEUENDORFF⁽²⁾ Kreispunktpolarkurven.

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

(2) NEUENDORFF, R.: Zur Theorie der Kreispunktpolarkurven, Journ. für Math. 137, S. 145.

Sie sind zu den Minimallinien konjugiert.

Wählt man sie zu Parameterlinien, so muß sein

$$(1) \quad \frac{(\theta_i \theta_i)}{L} = \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{N} = \frac{2(\theta_i \theta_\tau) M}{LN + M^2} = R_1 R_2$$

auf der Kreisfläche, wo R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien, L, M , N der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung im Sinne der gewöhnlichen Differentialgeometrie bedeuten.

Aus (1) kann man untersuchen die Kreisflächen wie in NEUENDORFFS Arbeit.

Aus (1) ersieht man, dasz

$$(2) \quad L d\tau^2 + \frac{LN + M^2}{M} dt d\tau + N dt^2 = 0$$

die Gleichung der Minimallinien auf unserer Kreisfläche (K) ist.

Aus (2) kann man die folgenden Sätze erhalten.

(1) Wenn

$$LN + M^2 = 0, \quad M \neq 0$$

gilt, so sind beide Scharen von Minimallinien (2) aufeinander senkrecht.

(2) *Die Tangenten der beiden Parameterlinien in einem Kreisflächenpunkte (t, τ) sind dann und nur dann Minimalgeraden, wenn für diesen Punkt die Fundamentalgrößen*

$$L = 0, \quad N = 0$$

gültig sind.

(3) *Von den Tangenten eines Kreisflächenpunktes (t, τ) existieren zwei und nur zwei Minimalgeraden.*

Die zu ihnen gehörigen Fortschreitungsrichtungen $(d\tau : dt)$ werden durch die Gleichung

$$LM d\tau^2 + \{LN + M^2\} dt d\tau + NM dt^2 = 0$$

bestimmt.

Die beiden Minimalgeraden fallen miteinander nicht zusammen.

(4) *Zwei Fortschreitungsrichtungen (k_1) und (k_2) eines Kreis-*

flächenpunktes (t, τ) , die nicht seinen Minimaltangenten angehören, sind dann und nur dann aufeinander senkrecht, wenn sie der Bedingung

$$L + \{LN + M^2\} \{k_1 + k_2\} + NM k_1 k_2 = 0$$

Genüge leisten.

(5) Ist identisch mit dem Netze

$$A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0,$$

das durch

$$LM dt^2 + \{LN + M^2\} dt d\tau + NM d\tau^2 = 0$$

definiert ist, so folgt

$$A : B : C = LM : \{LN + M^2\} : NM.$$

(6) Ein Kurvennetz

$$A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf einer Kreisfläche (\mathbf{K}) ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$LMC - 2 \{LN + M^2\} B + NMA = 0$$

ist.

(7) Definiert die Differentialgleichung

$$d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf einer Kreisfläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$\frac{d\tau}{dt} = - \frac{LN + \{LN + M^2\} \lambda}{\{LN + M^2\} + NM \lambda}.$$

(8) Um zwei Kreisflächen (\mathbf{K}) und ($\bar{\mathbf{K}}$) aufeinander abzubilden, muß man solche Parameter auf beiden Kreisflächen (\mathbf{K}) und ($\bar{\mathbf{K}}$) einführen, in denen

$$LM : \{LN + M^2\} : NM = \bar{L} \bar{M} : \{\bar{L} \bar{N} + \bar{M}^2\} : \bar{N} \bar{M}$$

gültig ist.

(9) Wird eine reelle Kreisfläche Punkt für Punkt, aber nicht konform, auf eine andere reelle Kreisfläche abgebildet, so gibt es ein und nur ein Orthogonalsystem auf der einen Kreisfläche, dem auf der anderen Kreisfläche wieder ein Orthogonalsystem entspricht, und diese beiden Orthogonalsysteme sind reell, wo jene Orthogonalsysteme durch die Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} d\tau^2 & LM & \bar{L}\bar{M} \\ -dt d\tau & LN + M^2 & \bar{L}\bar{N} + \bar{M}^2 \\ dt^2 & NM & \bar{N}\bar{M} \end{vmatrix} = 0$$

zwischen t und τ definiert.

(10) Die Formel für das Krümmungsmasz des zu einer Fortschreitungsrichtung k oder $d\tau : dt$ von einem Kreisflächenpunkte (t, τ) aus gehörigen Normalschnittes der Kreisfläche ist

$$\begin{vmatrix} k^2 & LM & L \\ -k & LN + M^2 & M \\ 1 & NM & N \end{vmatrix} = 0.$$

u. s. w..

(B) Im folgenden möchten wir die Loxodromen darlegen, nämlich diejenigen Kurven auf unseren beliebigen Kreisflächen (\mathbf{K}), welche eine Kurvenschar unter dem konstanten Winkel schneiden.

Wenn

$$(1) \quad t = \text{const.},$$

die betreffende Kurve ist, so ist die Gleichung der Loxodromen

$$(2) \quad \{(\theta_t \theta_t) (\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2\} d\tau^2 = a^2 \{(\theta_t \theta_t) dt + (\theta_t \theta_\tau) d\tau\}^2,$$

wo a in DINAS Arbeit⁽¹⁾ steht.

Wenn

(1) DINA, C.: Sopra una curva particolare giacente sopra una superficie in generale, Giornale matematico ad uso degli studenti delle universita italiane pubblicate per cura del G. BATTAGLINI, XIX, p. 298.

$$(3) \quad a = 0, \quad (\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) \neq (\theta_t \theta_\tau)^2,$$

so folgt aus (2)

$$(4) \quad \tau = \text{const.}$$

Weiter gilt

$$(5) \quad \{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2\} d\tau^2 = \{(\theta_t \theta_t) dt + (\theta_t \theta_\tau) d\tau\}^2,$$

wenn

$$(6) \quad a = 1$$

folgt.

Wenn

$$(7) \quad (\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) = (\theta_t \theta_\tau)^2,$$

so folgt aus (2)

$$(8) \quad (\theta_t \theta_t) dt + (\theta_t \theta_\tau) d\tau = 0.$$

(C) Wir betrachten eine Kreisfläche (\mathbf{K}), deren Bogenelement ist

$$(1) \quad ds^2 = 1/\lambda \cdot \{(\theta_t \theta_t) dt^2 + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2\},$$

da

$$(2) \quad \lambda = \text{const.}, \quad (\theta_t \theta_t) = f(t), \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = \varphi(\tau)$$

gilt.

Indem man

$$(3) \quad \int \sqrt{\lambda^{-1}(\theta_t \theta_t)} dt$$

und

$$(4) \quad \int \sqrt{\lambda^{-1}(\theta_\tau \theta_\tau)} d\tau$$

als neue Parameter \bar{t} und $\bar{\tau}$ einführt, bringt es alsdann die Form:

$$(5) \quad ds^2 = d\bar{t}^2 + d\bar{\tau}^2.$$

Dies aber ist das Quadrat des Bogenelements in der Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten \bar{t} , $\bar{\tau}$, so dass die Kreisfläche (\mathbf{K}) abwickelbar wäre.

(D) Nimmt das Quadrat des Linienelements die Form

$$(1) \quad ds^2 = (\theta_i \theta_i) dt^2 + d\tau^2$$

an, so folgt

$$(2) \quad (\theta_i \theta_i) = 0.$$

Betrachten wir den Bogen einer beliebigen Linie t , die zwischen zwei festen Kurven der Schar τ , etwa

$$(3) \quad \tau = \tau_0, \quad \tau = \tau_1$$

liegt, so ist seine Länge durch das Integral

$$(4) \quad \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = \tau_1 - \tau_0$$

gegeben, das von t ganz unabhängig ist.

Wird das Quadrat des Linienelementes in der Form (1) dargestellt, so wird ein Stück der Kreisfläche dargestellt durch

$$(5) \quad \iint \sqrt{(\theta_i \theta_i)} dt d\tau.$$

Sucht man nun irgend zwei Funktionen ϑ , σ der Art⁽¹⁾, dasz

$$(6) \quad \partial \vartheta / \partial \tau - \partial \sigma / \partial t = \sqrt{(\theta_i \theta_i)}$$

ist, so wird das Doppelintegral reduziert auf

$$(7) \quad - \int (\vartheta dt + \sigma d\tau),$$

welches sich auf den Rand bezieht; also muss nach den Prinzipien der Variationsrechnung für eine Kurve mit konstanter geodätischer Krümmung im oben gegebenen Sinne die erste Variation des Integrales

$$(8) \quad \int [(\sqrt{(\theta_i \theta_i)} dt^2 + d\tau^2 + k(\vartheta dt + \sigma d\tau)]$$

verschwinden, wo k eine willkürliche Konstante bedeutet,

Nach einem allgemeinen Theorem von JACOBI kann man nun weiter so verfahren.

V sei eine Funktion von t und τ , welche der Differentialgleichung

(1) DARBOUX, G.: Sur les cercles géodésiques, Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, XCVI, p. 54.

genügt

$$(9) \quad \frac{(\partial V / \partial t - k \vartheta)^2}{(\theta_i \theta_i)} + \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} - k \sigma \right)^2 = 1,$$

und welche die willkürliche Grösze α enthält.

Dann gibt die Gleichung

$$(10) \quad \partial V / \partial \alpha = \beta,$$

wo β eine andere Konstante bedeutet, die endliche Gleichung der geodätisch konstant gekrümmten Kurven an.

Diese Gleichung enthält drei willkürliche Konstanten α , β , k und die Tangente in jedem Punkte der Kurve ist bestimmt durch die Gleichungen

$$(11) \quad (\theta_i \theta_i) \frac{dt}{ds} = k \vartheta + \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \frac{d\tau}{ds} = k \sigma + \frac{\partial V}{\partial \tau}.$$

Ist

$$(12) \quad \varphi(t, \tau) = \text{const.}$$

die Gleichung einer Kurvenschar einer Kreisfläche, so werden deren orthogonale Projektoren bekanntlich dargestellt durch:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left\{ (\theta_i \theta_i) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} dt \\ & + \left\{ (\theta_i \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_\tau \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} d\tau = 0. \end{aligned} \right.$$

In dem Falle (1) folgt aus (1), (2) und (13)

$$(15) \quad (\theta_i \theta_i) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} dt - \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\tau = 0.$$

(E) Im folgenden möchten wir die äquivalente Abbildung einer Umdrehungskreisfläche auf einer Ebene behandeln.

Ist nämlich das Quadrat des Linienelementes der Umdrehungsfläche

$$(1) \quad ds^2 \doteq (\theta_i \theta_i) dt^2 + d\tau^2,$$

so ist z. B. eine solche Abbildung dargestellt durch die Gleichungen:

$$(2) \quad X = \frac{\alpha}{k} \int \sqrt{(\theta_t \theta_t)} d\tau, \quad Y = \frac{1}{\alpha} t,$$

wo k die konstante Kreisflächenvergrößerung und α eine beliebige Konstante bedeutet⁽¹⁾.

Sind nämlich zwei Kreisflächen in den Parametern t', τ' dargestellt, also in beliebiger Weise auf einander abgebildet, so werden die Liniensysteme, die in beiden Kreisflächen zugleich Orthogonalsysteme sind, bestimmt durch die Bedingung

$$(3) \quad \begin{aligned} & \{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau)_1 - (\theta_t \theta_\tau)(\theta_t \theta_t)_1\} dt'^2 \\ & + \{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau)_1 - (\theta_t \theta_t)(\theta_t \theta_t)_1\} dt' d\tau' \\ & + \{(\theta_t \theta_\tau)(\theta_\tau \theta_\tau)_1 - (\theta_\tau \theta_\tau)(\theta_t \theta_t)_1\} d\tau'^2 = 0, \end{aligned}$$

wo $(\theta_t \theta_t)$, $(\theta_t \theta_\tau)$, $(\theta_\tau \theta_\tau)$; $(\theta_t \theta_t)_1$, $(\theta_t \theta_\tau)_1$, $(\theta_\tau \theta_\tau)_1$ die Fundamentalgrößen unserer Kreisflächen bezeichnen.

Weiter kann man untersuchen die Kreisflächen wie in Korkines⁽²⁾ Arbeit.

(F) Die Aufgabe der Bekleidung einer Kreisfläche (K) ist identisch mit der Zurückführung der Quadrats ihres Linienelements auf die Form

$$(1) \quad dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2.$$

Der Kosinus des Winkels α der zu $k = d\tau : dt$ und $x = d\tau : dt$ auf (K) gehörigen Fortschreitungsrichtungen ist.

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{1 + (\theta_t \theta_\tau) \{k + x\} + kx}{\sqrt{1 + 2(\theta_t \theta_\tau) k + x^2} \sqrt{1 + 2(\theta_t \theta_\tau) k + x^2}}.$$

Weiter ist die Differentialgleichung der Krümmungskurven

$$(3) \quad \begin{vmatrix} d\tau^2 & 1 & L \\ -dt d\tau & (\theta_t \theta_\tau) & M \\ dt^2 & 1 & N \end{vmatrix} = 0,$$

(1) KORKINE, A.: Sur les cartes géographiques, Math. Ann. XXXV, S. 588.

(2) KORKINE, a. a. O., S. 589.

wo L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung im Sinne der gewöhnlichen Differentialgeometrie bedeuten.

Wir haben

$$(4) \quad \sin \omega = \sqrt{1 - (\theta_t \theta_\tau)^2},$$

und

$$(5) \quad \cos \omega = (\theta_t \theta_\tau),$$

wo ω in Schffers Buch⁽¹⁾ steht.

Definiert die Differentialgleichung

$$(6) \quad d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf einer (K) keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$(7) \quad \frac{d\tau}{dt} = - \frac{(\theta_t \theta_\tau) \lambda + 1}{\lambda + (\theta_t \theta_\tau)}.$$

Ein Kurvennetz

$$(8) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf einer (K) ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$(9) \quad C - 2(\theta_t \theta_\tau) B + A = 0$$

gilt.

Aus (1) ersieht man, dass die Differentialgleichung der Minimallinien auf (K) mit

$$(10) \quad dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2 = 0$$

gegeben ist.

(10) zerlegt sich:

$$(11) \quad [dt + \{(\theta_t \theta_\tau) + i \sqrt{1 - (\theta_t \theta_\tau)^2}\} d\tau] \\ \times [dt + \{(\theta_t \theta_\tau) - i \sqrt{1 - (\theta_t \theta_\tau)^2}\} d\tau] = 0.$$

(1) SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig, 1922, S. 36.

(G) Betrachten wir RACHMANINOWS Arbeit in dem Falle der Kreisfläche, so gilt

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda = -T_{\tau,t} \sqrt{(\theta_\tau \theta_\tau) / (\theta_t \theta_t)}, & \mu = T_{t,t} = T_{\tau,\tau}, \\ \nu = -T_{t,\tau} \sqrt{(\theta_t \theta_t) / (\theta_\tau \theta_\tau)} \end{cases}$$

anstatt

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda = -T_{v,u} \sqrt{G/E}, & \mu = T_{u,u} = T_{v,v}, \\ \nu = -T_{u,v} \sqrt{E/G}; \end{cases}$$

daraus kann man weiter RACHMANINOWS Arbeit in dem Falle der Kreisfläche⁽¹⁾ untersuchen.

(H) Im folgenden möchten wir die Kreisflächen (F) betrachten, deren Bogenelement die Form

$$(1) \quad ds^2 = (t + \tau)^2 dt^2 + 2(t + \tau) dt d\tau + d\tau^2$$

hat, wo $(\theta_t, \theta_t) = (t + \tau)^2$, $(\theta_t, \theta_\tau) = (t + \tau)$.

Aus (1) ersieht man, dass die Gleichung der Minimallinien

$$(2) \quad (t + \tau)^2 dt^2 + 2(t + \tau) dt d\tau + d\tau^2 = 0$$

ist, oder aus (2) sich ergibt:

$$(3) \quad (t + \tau) dt + d\tau = 0.$$

Der Kosinus des Winkels α der zu $k = d\tau : dt$ und $x = d\tau : dt$ auf (F) gehörigen Fortschreitungsrichtungen ist:

$$(4) \quad \cos \alpha = \frac{(t + \tau)^2 + (t + \tau)(k + x) + kx}{[(t + \tau) + k][(t + \tau) + x]}.$$

Weiter kann man wissen, dass ein Kurvennetz

$$(5) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf (K) dann und nur dann ein Orthogonalsystem ist, wenn

$$(6) \quad (t + \tau)^2 C - 2(t + \tau) B + A = 0$$

ist.

Definiert die Differentialgleichung

(1) RACHMANINOW, J.: Gleichgewicht einer biegsamen unausdehnbaren Fläche, Mosk. Math. Samml. XIX, p. 110 (Russisch, 1896).

$$(7) \quad d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf einer (K) keine Schar der Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$(8) \quad \frac{d\tau}{dt} = - \frac{(t+\tau)^2 + (t+\tau)\lambda}{(t+\tau) + \lambda}.$$

Die Parameterlinien einer (K) bilden ein Kurvennetz ohne Umwege nicht, denn

$$(9) \quad \frac{\partial(t+\tau)}{\partial\tau} \neq 0$$

ist gültig.

Weiter kann man untersuchen die Sätze in der gewöhnlichen Differentialgeometrie in unserem Falle.

(I) Im folgenden möchten wir die Kreisflächen (S) betrachten, deren Bogenelement die Form

$$(1) \quad ds^2 = t^2 dt^2 + 2t dt d\tau + d\tau^2$$

hat, wo

$$(\theta_i \theta_i) = t^2, \quad (\theta_i \theta_\tau) = t, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1$$

ist.

Aus (1) ersieht man, dass die Gleichung der Minimallinien

$$(2) \quad t^2 dt + 2t dt d\tau + d\tau^2 = 0$$

ist oder aus (2) sich ergibt:

$$(3) \quad t dt + d\tau = 0.$$

Der Kosinus des Winkels α der zu

$$k = d\tau : dt$$

und

$$\bar{k} = d\tau : dt$$

auf (S) gehörigen Fortschreitungsrichtungen ist:

$$(4) \quad \cos a = \frac{t^2 + 2t(k + \bar{k}) + \bar{k}\bar{k}}{\sqrt{t^2 + 2tk + k^2} \sqrt{t^2 + 2t\bar{k} + \bar{k}^2}}.$$

Weiter kann man wissen, dass ein Kurvennetz

$$(5) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf (S) dann und nur dann ein Orthogonalsystem ist, wenn

$$(6) \quad t^2 C - 2tB + A = 0$$

gilt.

Definiert die Differentialgleichung

$$(7) \quad d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf einer (S) keine Schar der Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$(8) \quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{t^2 + t\lambda}{t + \lambda}.$$

Die Parameterlinien einer (S) bilden ein Kurvennetz ohne Umwege, denn

$$(9) \quad \partial t / \partial \tau = 0$$

ist gültig.

Weiter kann man untersuchen die Sätze in der gewöhnlichen Differentialgeometrie in unserem Falle.

(J) Ist

$$(1) \quad ds^2 = dt^2 + d\tau^2$$

das Bogenelement einer Kreisfläche

$$(S): \quad x = x(t, \tau),$$

bezogen auf isometrische Parameter t, τ , so erzeugen die Geraden die Punkte

$$(2) \quad x = x + x_u$$

parallel mit Kreisflächennormalen in x ein Strahlensystem (C), dessen Geraden die Mittenfläche der Kongruenz in den Punkten M' treffen.

Die Punkte M' liegen auf den Tangentialebenen der Punkte $M(x)$ von (S) im Falle von Minimalflächen, Torsen, Spiralfächen und deren Biegungsverwandten.

Für die letzte dieser Flächenklassen ergibt sich⁽¹⁾:

$$(3) \quad 1 = e^{-t} T, \quad T = T(\tau).$$

(K) Wir betrachten im folgenden die in der Geometrie aus Untersuchungen von Tschebyscheff bekannten Kurvennetzen aus Asymptotenlinien auf Kreisflächen mit $(\theta, \theta_t) = (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1$, für die das Bogenelement die Form hat:

$$(1) \quad ds^2 = dt^2 + d\tau^2 + 2 dt d\tau \cos 2\alpha, \quad (\theta, \theta_\tau) = \cos 2\alpha,$$

wo 2α = Winkel der Asymptotenlinien, t, τ deren Parameter bedeuten.

Aus (1) ersieht man, dass die Gleichung von Minimallinien auf unserer Fläche ist:

$$(2) \quad dt^2 + d\tau^2 + 2 dt d\tau \cos 2\alpha = 0.$$

Weiter kann man untersuchen wie in (I).

(1) Vgl. DELGLEIZE, A.: Sur la theorie des congruences et la deformation infiniment petite des surfaces, Memoires Liege (3) 18, Nr. I, p. 24.

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXXIII)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, June 16, 1939.)

Im folgenden möchten wir über die Theorie der Kreise und Kugeln einige Bemerkungen machen.

(1)

Zunächst behandeln⁽¹⁾ wir

(A) $(\theta, \theta_t), (\theta, \theta_-), (\theta_- \theta_-)$.

(A) Die Koordinaten eines Punktes **M** einer Kreisfläche seien durch die Krümmungsparameter t und τ dargestellt, und es sei das Quadrat des Linienelements⁽¹⁾

$$(1) \quad d^2s = 1/\lambda \cdot \{(\theta_t \theta_t) dt^2 + (\theta_- \theta_-) d\tau^2\}, \quad (\theta_t \theta_-) = 0.$$

r_1 und r_2 seien die beiden Hauptkrümmungsradien.

Die Kreisfläche sei in der bekannten Weise auf die Gausssche Kugel abgebildet, d. h. so, dass in den entsprechenden Punkten die Normalen beider Kreisflächen gleichgerichtet sind.

Sucht man nun diejenigen Elemente in **M**, welche mit den entsprechenden Elementen der Kugel einen gegebenen Winkel bilden, dessen Kosinus A gleich sei, so erhält man die Differentialgleichung

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXVI, No. 4, July, 1939.]

(1) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MOBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. II, S. 36.

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)^2}{r_1^2} (1-A^2) d\tau^4 + (\theta_i \theta_i) (\theta_\tau \theta_\tau) \left\{ -\frac{2}{r_1 r_2} - A \left(\frac{1}{r_1^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{r_2^2} \right) \right\} dt^2 d\tau^2 + \frac{(\theta_i \theta_i)^2}{r_2^2} (1-A^2) dt^4 = 0. \end{aligned} \right.$$

Es gibt also in jedem Punkte im allgemeinen vier Richtungen, welche die Bedingung erfüllen⁽¹⁾.

Ist

$$A = 1,$$

so folgt aus (2)

$$(3) \quad dt = \text{const} \quad \text{oder} \quad \tau = \text{const.}$$

(3) ist die Gleichung in unserem Falle.

Wenn

$$(4) \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 0,$$

so folgt aus (2)

$$(5) \quad t = \text{const.}$$

Wenn

$$(6) \quad (\theta_i \theta_i) = 0,$$

so kommt aus (2)

$$(7) \quad \tau = \text{const.}$$

Da

$$(8) \quad A \neq 1.$$

(B) Wir betrachten ferner, in dem Falle, wo sich das Quadrat des Linienelementes ds^2 sich folgendenmassen darstellen lässt⁽²⁾:

$$(1) \quad ds^2 = (1 + a\tau + b\tau^2) dt^2 + d\tau^2,$$

folgt die Gleichung von Minimallinien auf unserer Kreisfläche (K), die mit

1) RUFFINI, F. P.: Die alcune proprieta della rappresentazione suferica del GAUSS, Bologna Mem. (4), VIII, p. 661.

2) Vgl. PIRONDINI, G.: Sur les surfaces de révolution, Nonv. Ann. (3) VII, p. 486.

$$(2) \quad (1 + a\tau + b\tau^2) dt' + d\tau^2 = 0$$

versehen ist, wo a und b Konstanten bedeuten.

Aus (1) ersieht man, dass

$$(3) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(4) \quad \tau = \text{const.}$$

zueinander senkrecht seien.

Ist

$$(5) \quad 1 + a\tau + b\tau^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2b}$$

in (2), so folgt aus (2)

$$(6) \quad \tau = \text{const.}$$

(6) sind unsere Minimallinien.

Ein Kurvennetz

$$(7) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf unserer Kreisfläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$(8) \quad (1 + a\tau + b\tau^2)C + A = 0$$

gültig ist.

Aus (8) ersieht man, dass B beliebig ist.

Definiert die Differentialgleichung

$$(9) \quad d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf einer unserer Kreisflächen keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$(10) \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1 + a\tau + b\tau^2}{\lambda}$$

Wenn

$$(11) \quad a\tau + b\tau^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \tau = 0, \quad a + b\tau = 0$$

gilt, so folgt aus (2)

$$(12) \quad dt^2 + d\tau^2 = 0.$$

Weiter kann man wissen, dass die Parameterlinien unserer Kreisflächen ein Kurvennetz ohne Umwege bilden, wenn

$$(13) \quad \frac{\partial \sqrt{a\tau + b\tau^2}}{\partial \tau} = 0 \quad \text{oder} \quad a + 2b\tau = 0$$

gültig ist.

(C) Das Linienelement dS auf einem Helikoid (Schraubenkreisfläche, erzeugt von einer beliebigen Kurve τ durch die gleichzeitige Rotation und proportionale axiale Verschiebung) wird in der Form dargestellt:

$$(1) \quad dS = d\tau^2 + (p^2 + R^2) dt^2,$$

wo p das konstante Verhältnis beider Bewegungen, t den Rotationswinkel, R den Abstand eines Punktes von der Axe bezeichnet⁽¹⁾.

Zwei Helikoide sind aufeinander abwickelbar, wenn für eine beliebige Konstante K

$$(2) \quad t = K t_1, \quad R_1^2 = K^2 (p^2 + R^2) \quad p_1^2$$

und diese Gleichungen mithin auch Helikoid auf der Rotationsfläche für

$$(3) \quad p = 0,$$

sind.

Weiter kann man untersuchen wie in PIRONDINI'S Arbeit⁽¹⁾.

Aus (1) ersieht man, dass die Gleichung von Minimallinien mit

$$(4) \quad d\tau^2 + (p^2 + R^2) dt^2 = 0$$

gegeben ist, woran man erkennt, dass

$$(5) \quad \tau = \text{const.}$$

und

(1) PIRONDINI, G.: Studio sulle superficie elicoidali, Annali di Mat. (2) XVI, p. 137.

$$(6) \quad t = \text{const.}$$

gelten, wenn die Gleichung von (1) reell ist.

Unsere Kreisfläche wird durch ein Kurvennetz in infinitesimale Rhomben zerlegt, wenn

$$(7) \quad p^2 + R^2 = 1$$

ist unter Zugrundelegung der Kurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ dieses Netzes als Koordinatenlinien.

(D) Ist

$$ds^2 = (\theta_1 \theta_1) dt^2 + (\theta_2 \theta_2) d\tau^2, \quad \lambda = 1, \quad (\theta_1 \theta_2) = 0,$$

wo ds die Bogenlänge auf unserer Kreisfläche (K) bedeutet, und setzt man

$$\phi_1 = A(\rho_1 - \rho_2), \quad \phi_2 = B(\rho_1 - \rho_2)$$

(ρ_1 und ρ_2 sind die Hauptkrümmungen), so sind ϕ_1 und ϕ_2 „*invariants paramétriques*“ und, wenn die Kreisfläche nicht isotherm ist, durch zwei Differentialgleichungen verknüpft.

Weiter kann man untersuchen wie in KONIGS Arbeit⁽¹⁾.

(E) RAFFY führt im Anschluss an frühere Untersuchungen das Linienelement einer Spiralkreisfläche mit parallelen Linien gleicher Krümmung in die Form⁽²⁾ über

$$(1) \quad ds^2 = d\tau^2 + F(\tau/t) dt^2.$$

Wenn

$$(2) \quad \tau/t = \text{const.}$$

gilt, so ist die Gleichung von Minimallinien

$$(3) \quad \text{const. } dt^2 + d\tau^2 = 0.$$

Ist

- 1) KONIG, K.: Untersuchungen über das sphärische Bild, Tôhoku Math. Journ. Vol. 29, p. 91.
- 2) RAFFY, L.: Détermination de l'élément linéaire des surfaces spirales à lignes d'égal courbure parallèles, Bulletin de la Société Math. de France publiée par les secrétaires, Paris, XX, p. 22.

$$(4) \quad F(\tau/t) = 0$$

in (1), so ist die Gleichung von Minimallinien

$$(5) \quad \tau = \text{const.}$$

Die Bogenelemente der Kurven (τ) und (t) wollen wir mit d_s und $d_\tau s$ bezeichnen; der angehängte Index t bzw. τ deutet dabei an, welcher Parameter die Veränderliche ist.

Diese Bogenelemente sind also:

$$(6) \quad d_s = \sqrt{F(\tau/t)} dt, \quad d_\tau s = d\tau.$$

Ein Kurvennetz

$$(7) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf unserer Kreisfläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$(8) \quad F(\tau/t) C + A = 0$$

ist. Man ersieht, dass wir B beliebig annehmen können.

Weiter kann man wissen, dass die Parameterlinien unserer Kreisfläche ein Kurvennetz ohne Umwege bilden, wenn

$$(9) \quad \frac{\partial \sqrt{F(\tau/t)}}{\partial \tau} = 0$$

gültig ist.

Unsere Kreisfläche wird durch ein Kurvennetz in infinitesimale Rhomben zerlegt, wenn

$$(10) \quad F(\tau : t) = 1$$

ist unter Zugrundelegung der Kurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ dieses Netzes als Koordinatenlinien.

(F) Wir betrachten die Kreisflächen, deren Linienelement durch die Gleichung

$$(1) \quad \begin{cases} ds^2 = (\tau + kt^2 + lt) dt^2 + d\tau^2, & (\theta, \theta_\tau) = 0, \\ (\theta, \theta_t) = \tau + kt^2 + lt, & (\theta_\tau, \theta_t) = 1 \end{cases}$$

gegeben ist, wo k und l Konstanten bedeuten.

Aus (1) ersieht man, dass die Gleichung von Minimallinien auf unserer Kreisfläche mit

$$(2) \quad (\tau + k t^2 + l t) d t^2 + d \tau^2 = 0$$

gegeben wird.

Auf der Kurve

$$(3) \quad \tau + k t^2 + l t = 0,$$

lautet (2)

$$(4) \quad \tau = \text{const.}$$

Wenn sich die Parameterlinien (t) und (τ) einer unserer Kreisfläche zu einem Isothermennetze anordnen lassen, in dem (t) bzw. (τ) von Kurve zu Kurve um dieselbe unendlich kleine Grösze wächst, so hat man zur Folge:

$$(5) \quad \tau + k t^2 + l t = 1.$$

(G) Wir betrachten eine Kreisfläche, deren Bogenelement mit

$$(1) \quad ds^2 = 2 \{ \tau + \phi(t) \} dt^2 + d\tau^2$$

gegeben ist, so lautet die Differentialgleichung der Minimalkurven unserer Kreisfläche:

$$(2) \quad 2 \tau dt^2 + d\tau^2 = 0,$$

wenn

$$\phi(t) = 0.$$

Sie lässt sich sofort zerlegen in

$$(3) \quad \{ d\tau + i \sqrt{2} \tau dt \} \{ d\tau - i \sqrt{2} \tau dt \} = 0$$

oder in

$$(4) \quad \left\{ \frac{d\tau}{\sqrt{2}\tau} + i dt \right\} \left\{ \frac{d\tau}{\sqrt{2}\tau} - i dt \right\} = 0,$$

woraus sich die beiden einzelnen Gleichungen sofort durch eine Quadratur integrieren lassen.

Danach stellen

$$(5) \quad \int \frac{d\tau}{\sqrt{2\tau}} + i t = \text{const.}, \quad \int \frac{d\tau}{\sqrt{2\tau}} - i \tau = \text{const.}$$

die Minimalkurven unserer Kreisfläche dar.

Definiert die Differentialgleichung

$$(6) \quad d\tau / dt = \lambda(t, \tau)$$

auf einer unserer Kreisfläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$(7) \quad \frac{d\tau}{dt} = - \frac{2 \{ \tau + \phi(t) \}}{\lambda}$$

Aus () kann man wissen, dass die Gleichung von Minimallinien auf unserer Kreisfläche mit

$$(8) \quad 2 \{ \tau + \phi(t) \} dt^2 + d\tau^2 = 0$$

gegeben ist.

Ein Kurvennetz

$$(9) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf unserer Kreisfläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$(10) \quad 2 \{ \tau + \phi(t) \} C + A = 0$$

ist.

Weiter ersieht man, dass die Parameterlinien unserer Kreisfläche ein Kurvennetz ohne Umwege nicht bilden, da

$$(11) \quad \frac{\partial \{ \tau + \phi(t) \}}{\partial \tau} \neq 0$$

gültig ist.

(H) Wir betrachten eine Kreisfläche (K), deren Bogenelement mit

$$(1) \quad \begin{cases} ds^2 = 2\tau dt^2 + 2t dt d\tau + d\tau^2, \\ (\theta_t, \theta_t) = 2\tau, \quad (\theta_t, \theta_\tau) = t, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1 \end{cases}$$

gegeben ist⁽¹⁾.

$$(2) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(3) \quad \tau = \text{const.}$$

sind zueinander senkrecht, wenn

$$(4) \quad t = 0$$

gilt.

Längs der Kurve

$$(5) \quad \tau = 0$$

lautet die Gleichung der Minimallinien:

$$(6) \quad \tau = \text{const.}, \quad 2t dt + d\tau = 0.$$

Die Parameterlinien unserer Kreisfläche bilden dann und nur dann ein Kurvennetz ohne Umwege, wenn

$$(7) \quad \frac{\partial \sqrt{2\tau}}{\partial \tau} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{2\tau}} = 0$$

gilt.

Definiert die Differentialgleichung

$$(8) \quad d\tau / dt = \lambda(t, \tau)$$

auf unserer Kreisfläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$(9) \quad \frac{d\tau}{dt} = - \frac{2(\tau + t\lambda)}{2t + \lambda}.$$

1) BARCHI, A.: Sopra una classe di superficie applicabili e sulle loro flessioni, Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nelle università italiane, 41, p. 129.

Ein Kurvennetz

$$(10) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf unserer Kreisfläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$(11) \quad 2 \tau C - 2 t B + A = 0$$

gilt.

Unsere Kreisfläche wird durch ein Kurvennetz in infinitesimale Rhomben zerlegt, wenn

$$(12) \quad 2 \tau = 1$$

ist unter Zugrundeliegung der Kurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$ dieses Netzes als Koordinatenlinien.

(I) Wir werden die Loxodromen im allgemeinen Sinne behandeln, nämlich diejenigen Kurven auf beliebigen Kreisflächen (K), welche eine Kurvenschaar unter konstantem Winkel schneiden.

Letztere wird als die eine der zwei Schaaren von Parameterlinien betrachtet⁽¹⁾.

Ist es die Kurve

$$(1) \quad t = \text{const.},$$

so ist die Gleichung der Loxodromen:

$$(2) \quad [\sqrt{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau)} - (\theta_t \theta_\tau)^2 - a(\theta_t \theta_\tau)] d\tau = a(\theta_t \theta_t) dt.$$

Aus (2) ergibt sich

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d\tau}{dt} = \frac{a(\theta_t \theta_t) [D + a(\theta_t \theta_\tau)]}{(\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (1 + a^2)(\theta_t \theta_\tau)^2}, \\ D^2 = (\theta_t \theta_t)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2, \end{cases}$$

daraus folgt

$$(4) \quad t = \text{const.}$$

(1) DINA, C.: Sopra una curva particolare giacente sopra una superficie in generale, *Giornale matematico ad uso degli studenti delle università italiane* pubblicato per cura del Prof. G. BATTAGLINI, Napoli, XIX, p. 298.

wenn

$$(5) \quad (\theta, \theta_t)(\theta_z, \theta_z) = (1 + a^2)(\theta, \theta_z)^2$$

gültig ist, wo a in Dinas Arbeit steht.

Wenn

$$(6) \quad D + a(\theta, \theta_z) = 0 \quad \text{oder} \quad (\theta, \theta_t) = 0$$

in (3) gilt so kommt aus (3)

$$(7) \quad \tau = \text{const.}$$

Wenn

$$(8) \quad d\tau / dt = \text{const.}, \quad \text{oder} \quad \tau = \text{const.} t + \text{const.},$$

so folgt aus (3)

$$(9) \quad \begin{cases} \text{const. } a(\theta, \theta_t) [D + a(\theta, \theta_z)] \\ = (\theta, \theta_t)(\theta_z, \theta_z) - (1 + a^2)(\theta, \theta_z) \end{cases}$$

Wenn

$$(10) \quad D = 0,$$

so lautet (2)

$$(11) \quad (\theta, \theta_z) d\tau = (\theta, \theta_t) dt.$$

Sind (2) zugleich Minimallinien, so gilt

$$(12) \quad (\theta, \theta_t) dt^2 + 2(\theta, \theta_z) dt d\tau + (\theta_z, \theta_z) d\tau^2 = 0$$

oder

$$(13) \quad \begin{cases} \{(\theta, \theta_t) dt + [(\theta, \theta_z) + iD] d\tau\} \{(\theta, \theta_t) dt \\ + [(\theta, \theta_z) - iD] d\tau\} = 0, \end{cases}$$

daraus ergibt sich aus (2) und (13)

$$(14) \quad D(1 \pm ai) d\tau = 0$$

d. h.

$$(15) \quad \tau = \text{const.}$$

Sind in (2) die Parameterlinien Minimalkurven, so folgt aus (2)

und

$$(16) \quad (\theta_t \theta_t) = (\theta_\tau \theta_\tau) = 0, \quad D = i(\theta_t \theta_\tau):$$

$$(17) \quad \{i(\theta_t \theta_\tau) - a(\theta_t \theta_\tau)\} d\tau = 0,$$

oder

$$(18) \quad \tau = \text{const.}$$

Sind

$$(19) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(20) \quad \tau = \text{const.}$$

in (2) Minimallinien, so folgt aus 2) und

$$(21) \quad (\theta_t \theta_t) = 0, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 0:$$

$$(22) \quad (i - a)(\theta_t \theta_\tau) d\tau = 0$$

oder

$$(23) \quad \tau = \text{const.}$$

Sind

$$(24) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(25) \quad \tau = \text{const.}$$

zueinander senkrecht, so folgt

$$(26) \quad (\theta_t \theta_\tau) = 0;$$

also ergibt sich aus (2) und (26)

$$(27) \quad (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = a^2 (\theta_t \theta_t) dt^2$$

(27) ist unsere Gleichung der Loxodromen.

Bilden

$$(28) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(29) \quad \tau = \text{const.}$$

auf unserer Fläche ein Netz von unendlich kleinen Rhomben, so folgt

$$(30) \quad (\theta_i \theta_i) : (\theta_\tau \theta_\tau) = \frac{1}{\alpha^2(t)} : \frac{1}{\beta^2(\tau)};$$

so kommt aus (2) und (30)

$$(31) \quad \{ \sqrt{\alpha^2 (\theta_i \theta_i)^2 - \beta^2 (\theta_\tau \theta_\tau)^2} - \alpha \beta (\theta_i \theta_\tau) \} d\tau = \alpha \alpha' (\theta_i \theta_i) dt.$$

Hier bedeutet α eine von Null verschiedene Funktion von t allein und β eine von Null verschiedene Funktion von τ allein.

Definiert eine Gleichung der Form

$$(32) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

ein Kurvennetz auf (K), so ist

$$(33) \quad AC - B^2 \neq 0.$$

Gilt das Kurvennetz (32) aus lauter Minimalkurven, so ist es mit dem Netze identisch, das durch

$$(34) \quad (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2 (\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0$$

definiert ist. Also erhalten wir

$$(35) \quad A : B : C = (\theta_i \theta_i) : (\theta_i \theta_\tau) : (\theta_\tau \theta_\tau).$$

In diesem Falle kommt aus (2) und (35)

$$(36) \quad [\sqrt{AC} - B] d\tau = \alpha A dt.$$

In unserem Falle ist (36) die Gleichung der Loxodromen.

Betrachten wir ein Kurvennetz

$$(37) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf unserer Fläche (K), die ein Orthogonalsystem ist, so folgt

$$(38) \quad (\theta_i \theta_i) C - 2 (\theta_i \theta_\tau) B + (\theta_\tau \theta_\tau) A = 0.$$

In diesem Falle ergibt sich aus (2) und (38)

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} & [\sqrt{[2 (\theta_i \theta_\tau) B - (\theta_\tau \theta_\tau) A : C] (\theta_i \theta_\tau)} - (\theta_i \theta_\tau)^2 \\ & - \alpha (\theta_i \theta_\tau)] d\tau = [\alpha \{2 (\theta_i \theta_\tau) B - (\theta_\tau \theta_\tau) A\} : C] dt. \end{aligned} \right.$$

Definiert die Differentialgleichung

$$(40) \quad \frac{d\tau}{dt} = - \frac{(\theta_i \theta_t) + (\theta_i \theta_\tau) \lambda}{(\theta_i \theta_\tau) + (\theta_\tau \theta_\tau) \lambda}$$

auf unserer Fläche (\mathbf{K}) keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$(41) \quad \frac{d\tau}{dt} = - \frac{(\theta_i \theta_t) + (\theta_i \theta_\tau) \lambda}{(\theta_i \theta_\tau) + (\theta_\tau \theta_\tau) \lambda}.$$

Aus (41) folgt

$$(42) \quad [(\theta_i \theta_t) + (\theta_i \theta_\tau) \lambda] dt + [(\theta_i \theta_\tau) + (\theta_\tau \theta_\tau) \lambda] d\tau = 0;$$

so ergibt sich aus (2) und (42)

$$(43) \quad D d\tau + a\lambda [(\theta_i \theta_\tau) dt + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau] = 0$$

Um zwei Flächen (\mathbf{K}) und $(\bar{\mathbf{K}})$ konform aufeinander abzubilden, ist göltig

$$(44) \quad (\theta_i \theta_t) : (\theta_i \theta_\tau) : (\theta_\tau \theta_\tau) = (\bar{\theta}_i \bar{\theta}_t) : (\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau) : (\bar{\theta}_\tau \bar{\theta}_\tau).$$

In diesem Falle folgt aus (2) und (44)

$$(45) \quad \left[\sqrt{(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_t)(\bar{\theta}_\tau \bar{\theta}_\tau)} - (\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau)^2 - a(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau) \right] d\tau = a(\bar{\theta}_i \bar{\theta}_t) dt.$$

(45) ist unsere Gleichung der Loxodromen auf (\mathbf{K}) .

Wenn

$$(46) \quad (\theta_i \theta_t) = 0$$

gilt, so folgt aus (2)

$$(47) \quad (i - a)(\theta_i \theta_\tau) d\tau = 0.$$

(47) ist die Gleichung unserer Kurve, wo

$$i = \sqrt{-1}$$

ist.

Für Nabelpunkte ist göltig

$$(48) \quad L : M : N = (\theta_i \theta_t) : (\theta_i \theta_\tau) : (\theta_\tau \theta_\tau);$$

so ergibt sich aus (2) und (48)

$$(49) \quad [\sqrt{LN} - M^2 - aM] d\tau = aL dt,$$

wo L, M, N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung im Sinne gewöhnlicher Differentialgeometrie bedeuten.

Wenn sich die Parameterlinien

$$t = \text{const.}$$

und

$$\tau = \text{const.}$$

senkrecht schneiden und die unendlich kleinen Rechtecke, in die sie die Fläche zerlegen, sind, so folgt aus (2)

$$(50) \quad d\tau = dt.$$

Wenn

$$t = \text{const.}$$

und

$$\tau = \text{const.}$$

aquidistante Kurvenscharen sind, so gilt

$$(51) \quad (\theta_t, \theta_t) = (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1, \quad (\theta_t, \theta_\tau) = \cos \varphi,$$

so folgt aus (2) und (51)

$$(52) \quad [\sin \varphi - a] d\tau = a dt,$$

deren φ in Voss' Arbeit¹⁾ steht.

Ist (**K**) die Fläche in (**B**), so folgt

$$(53) \quad (\theta_t, \theta_t) = 1 + a\tau + b\tau^2, \quad (\theta_t, \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1;$$

so ergibt sich aus (2) und (53)

$$(54) \quad d\tau = a\sqrt{1 + a\tau + b\tau^2} dt.$$

Ist (**K**) die Fläche in (**E**), so folgt

1) VOSS, A.: Über ein neues Princip der Abbildung krummer Oberflächen, Math. Ann. 19, S. 1.

$$(55) \quad (\theta_i \theta_i) = F(\tau/t), \quad (\theta_i \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1;$$

so ergibt sich aus (2) und (55)

$$(56) \quad d\tau = a \sqrt{F(\tau/t)} dt.$$

Wenn (K) die Fläche in (H) ist, so folgt

$$(57) \quad (\theta_i \theta_i) = 2\tau, \quad (\theta_i \theta_\tau) = t, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1;$$

so kommt aus (2) und (57)

$$(58) \quad [\sqrt{2\tau - t^2} - at] d\tau = 2a\tau dt.$$

(54), (56) und (58) sind unsere Kurven auf jeder Fläche.

Hat

$$(59) \quad d\tau : dt$$

in (2) einen gegebenen Wert k , so folgt aus (2)

$$(60) \quad k = - \frac{a(\theta_i \theta_i) [D + a(\theta_i \theta_\tau)]}{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (1 + a^2)(\theta_i \theta_\tau)^2},$$

(J) Wird ein Netz von OCCHIPINTIS Kurven⁽¹⁾ als Koordinatennetz auf einer Kreisfläche gewählt, so besteht als notwendig und hinreichend zwischen den sechs Fundamentalgrößen die Relation

$$(1) \quad (\theta_i \theta_\tau)(\theta_\tau \theta_\tau)L - 2(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau)M + (\theta_i \theta_i)(\theta_i \theta_\tau)N = 0,$$

wo L, M, N die zweiten Fundamentalgrößen im Sinne gewöhnlicher Differentialgeometrie.

Wenn

$$(2) \quad (\theta_i \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_i \theta_i) \neq 0, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) \neq 0$$

in (1) ist, so folgt aus (1)

$$(3) \quad M = 0.$$

Wenn

$$(4) \quad M = 0, \quad (\theta_i \theta_i) \neq 0, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) \neq 0$$

in (1), so kommt aus (1)

(1) OCCHIPINTI, R. Linee isocline rispetto alle bisettrici delle linee di curvatura, Palermo Rend. 36, P. 29.

$$(5) \quad (\theta_i \theta_\tau) = 0.$$

Daraus ersieht man, dass, wenn unsere Kurven

$$(6) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(7) \quad \tau = \text{const.}$$

zueinander senkrecht sind, so (6) und (7) Krümmungskurven sein müssen und dieser Umkehrungssatz gültig ist, wenn

$$(8) \quad (\theta_i \theta_\tau) \neq 0, \quad (\theta_\tau \theta_i) \neq 0$$

gelten.

(K) Kreispunktpolaren sind die Polaren der unendlich fernen Kreispunkte in bezug auf einen Kegelschnitt.

Die durch die Kreispunktpolaren der Dupinschen Indikatrix auf einer Kreisfläche bestimmten stets imaginären Kurven nennt man nach NEUENDORFF⁽¹⁾ Kreispunktpolarkurven.

Sie sind zu den Minimallinien konjugiert.

Wählt man sie zu Parameterlinien, so muss sein

$$(1) \quad \frac{(\theta_i \theta_i)}{L} = \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{N} = \frac{2(\theta_i \theta_\tau)M}{LN + M^2} = \frac{1}{\lambda} (R_1 + R_2),$$

wobei R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien bedeuten, L, M, N die zweiten Fundamentalgrößen im Sinne in gewöhnlicher Differentialgeometrie sind und λ in meiner Arbeit⁽²⁾ steht.

Aus (1) kann man wissen, dass, wenn

$$(2) \quad M = 0$$

oder

$$(3) \quad R_1 + R_2 = 0$$

gilt, so

(1) NEUENDORFF, R.: Zur Theorie der Kreispunktpolarkurven, J. für Math. 137, p. 145.

(2) NAKAZIMA, S.: Kugelgeo. von MOBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

$$(4) \quad (\theta_i, \theta_i) = 0$$

und

$$(5) \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 0$$

folgen.

Danach erkennt man, dass, wenn

$$(6) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(7) \quad \tau = \text{const.}$$

Krümmungslinien oder

$$(8) \quad R_1 + R_2 = 0$$

sind, so

$$(9) \quad (\theta_i, \theta_i) = 0, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 0$$

folgen.

Für die Kreisfläche, deren Bogenelement mit (H) gegeben ist, folgt aus (1):

$$(10) \quad \frac{2\tau}{L} = \frac{1}{N} = \frac{2tM}{LN + M^2} = \frac{1}{\lambda} \{R_1 + R_2\}.$$

Daraus ergibt sich

$$(11) \quad \tau = 0, \quad t = 0,$$

wenn

$$R_1 + R_2 = 0, \quad [\lambda \neq 0]$$

gilt.

(2)

(A) Es seien $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3$ homogene Koordinaten eines Punktes im elliptischen Raume mit dem absoluten Gebilde

$$(1) \quad \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

Man kann nach WEIERSTRASZ die Koordinaten jedes reellen Punktes so „normieren“, dass die Quadratsumme der Koordinaten Eins wird.

Wir nehmen also an, es sei

$$(2) \quad (x \ x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

wofür wir abkürzend schreiben wollen:

$$(3) \quad (x \ x) = 1,$$

indem wir die Bezeichnung

$$(4) \quad x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = (x \ y)$$

einführen.

Für diese normierten Koordinaten nimmt das Bogenelement des elliptischen Raumes, wenn wir ihm die Krümmung Eins zuschreiben, die einfache Form an:

$$(5) \quad ds^2 = (dx \ dx).$$

Weiter kann man untersuchen wie in meiner Arbeit⁽¹⁾.

(B) Wir betrachten n Punkte

$$(1) \quad x^a \quad [a = I, II, \dots, n]$$

in R_χ .

Wir können daher n neue Punkte

$$(2) \quad x^a_* = \sum_{\beta=1}^n c^a_{\beta} x^{\beta} \quad [a = I, II, \dots, n]$$

als Linearkombinationen der x^a einführen mit Koeffizienten c^a_{β} , deren Determinante

$$(3) \quad |c^a_{\beta}| \neq 0$$

sein muss, wenn x^I_* , x^{II}_* , ... und x^n_* nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die x^a_* unsere Kurve, die mit x^a_* bestimmt wird, darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Punkten

1) NAKAZIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, Tôhoku Math. Journ. Vol. 31, S. 21 und Vol. 32, S. 152.

$$(4) \quad x^\alpha, y^\alpha, z^\alpha, \dots \quad [\alpha = I, II, \dots, n]$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Kurven festlegen, nur von der geometrischen Figur der Kurve abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Punkten, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen von der Art (2).

Wir wollen (2) auch die Büscheltransformationen der Kurve K nennen.

Betrachten wir zunächst eine Kurve x^α .

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(5) \quad (x^\alpha x^\beta) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Größensystem, das sich nach (2) in folgender Weise substituiert:

$$(6) \quad \bar{A}^{\alpha\beta} = c_\beta^\alpha c_\delta^\beta A^{\tau\delta} \quad [\bar{A}^{\alpha\beta} = (\bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta)].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis n .

Da gelten

$$(7) \quad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$$

und

$$(8) \quad A^* = |c_\beta^\alpha|^2 \cdot A$$

wo sich

$$(9) \quad A = |A^{\alpha\beta}|$$

ergibt.

Wir betrachten zwei Kurven K und \bar{K} , die durch die beiden Punktpaare

$$(10) \quad x^\alpha \text{ und } \bar{x}^\lambda \quad [\alpha, \lambda = I, II, \dots, n]$$

dargestellt sind.

Wir definieren analog zu (5)

$$(11) \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = (\bar{x}^\lambda \bar{x}^\mu) \text{ mit Hilfe von } \bar{A}^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(12) \quad A = |\bar{A}^{\lambda\mu}| > 0$$

voraus.

Dann haben wir für K die Büscheltransformationen

$$(13) \quad \bar{x}^\lambda = \bar{c}_\mu^\lambda \bar{x}^\mu$$

zu berücksichtigen.

Die \bar{c}_μ^λ in (13) sind aber von den c_β^α in (2) völlig unabhängige neue Gröszen.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(14) \quad ||\bar{x}^I, \bar{x}^{II}, \dots, \bar{x}^{(n)}, \bar{x}^I, \bar{x}^{II}, \dots, \bar{x}^{(n)}|| \equiv 0$$

ist, in der eine lineare Beziehung der Form

$$(15) \quad \sigma_\alpha \bar{x}^\alpha = \bar{\sigma}_\lambda \bar{x}^\lambda$$

besteht.

Die Bedeutung von (15) ist aber die, dass es eine Kurve

$$(16) \quad z = \sigma_\alpha \bar{x}^\alpha = \bar{\sigma}_\lambda \bar{x}^\lambda$$

gibt, auf der beide Punkte liegen.

Weiter kann man untersuchen wie in meiner früheren Arbeit⁽¹⁾.

(C) Es seien n Kugeln in R_n vorgegeben.

Wir suchen eine Kugel \bar{x} so, wie

$$(1) \quad \sum (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \rightarrow \text{Mini.}$$

wird, dann folgt aus (1)

$$(2) \quad \sum (\bar{x}_i - \bar{x}) = 0$$

oder

$$(3) \quad \bar{x} = 1/n \cdot \sum \bar{x}_i,$$

wobei

$$(4) \quad \bar{x}_i = \bar{x}$$

die Länge zwischen zwei gemeinsamen Tangenten von \bar{x}_i und \bar{x} bedeuten.

(1) NAKAZIMA (=MATUMURA), S. Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 187.

(D) Im folgenden möchten wir zwei Flächen untersuchen, für welche das Strahlensystem, welches von den gemeinschaftlichen Tangenten dieser zwei Flächen gebildet wird, ein Normalensystem ist.

Dann ergibt sich⁽¹⁾

$$(1) \quad \lambda x_u + \sigma x_u + x_v = 0.$$

Für die Schränkung

$$(2) \quad 1/p$$

der Querregelflächen

$$(3) \quad u = \text{const.}$$

gilt⁽²⁾.

$$(4) \quad p = \frac{4ME(EG - F^2)}{4M^2E + (EG_u - FE_v)^2}.$$

Aus (1) und (4) folgt

$$(5) \quad D^2 p x_v + 2ME(D - MP) \{ \sigma x_u + x_v \} = 0,$$

oder

$$(6) \quad x = U + V.$$

wenn

$$(7) \quad p = D/M$$

gilt, wo

$$(8) \quad U = f(u), \quad V = \varphi(v), \quad D^2 = EG - F^2,$$

sind.

Wenn x in (6) eine Kurel bedeutet, so folgt

$$(9) \quad U^2 + V^2 + 2UV = 1.$$

$$(10) \quad U^2 + V^2 + 2UV = 1$$

(1) NAKAZIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, I. Tôhoku Math. Journ. Vol. 30 (1928), S. 142.

(2) SAUER, R.: Wackelige Kurvennetze bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung, Math. Ann. 108 (1933), S. 678.

bezeichnet einen Punkt in R_3 .

Wenn

$$(11) \quad D = 0 \quad \text{oder} \quad p = 0,$$

so folgt aus (5)

$$(12) \quad \sigma_{\xi, \eta} + \xi, \eta = 0.$$

Wenn ξ eine Kugel ist, so genügt ξ (12).

(E) Es seien zwei Kreise

$$(1) \quad \hat{\xi} = l\xi + m\bar{\xi}, \quad \hat{\xi} + d\hat{\xi} = p\eta + q\bar{\eta},$$

in R_2 , so folgt

$$(2) \quad \cos \phi = (l\xi + m\bar{\xi}, p\eta + q\bar{\eta}) = (\hat{\xi}, \hat{\xi} + d\hat{\xi}),$$

wo $\xi, \bar{\xi}, \eta$ und $\bar{\eta}$ Kreise in R_2 bedeuten und l, m, p und q skalare Größen sind.

Da gelten

$$(3) \quad \begin{cases} \phi = l\xi + m\widehat{\bar{\xi}}, p\eta + q\bar{\eta}, \\ \eta = \xi + d\xi + \frac{1}{2}d^2\xi, \\ \bar{\eta} = \bar{\xi} + d\bar{\xi} + \frac{1}{2}d^2\bar{\xi}. \end{cases}$$

Aus (2) ergibt sich

$$(4) \quad \begin{cases} \cos \phi = \frac{3}{2} \{lp + mq\} + lq \{(\xi\bar{\xi}) + (\xi d\bar{\xi}) + \frac{1}{2}(\xi d^2\bar{\xi})\} \\ \quad + mp \{(\bar{\xi}\xi) + (\bar{\xi} d\xi) + \frac{1}{2}(\bar{\xi} d^2\xi)\}, \end{cases}$$

wo

$$(5) \quad (d\xi d\xi) = 1.$$

(F) Geben wir auf einer Ebene \mathfrak{z} drei Punkte

$$(1) \quad \xi^a \quad [a = I, II, III]$$

in R_2 und auf einer weiteren Ebene \mathfrak{z}^* ebenfalls drei Punkte ξ^{*a} in R_2 vor, so gibt es genau vier MÖBIUSTransformationen des Raumes, die die Figur

$$(2) \quad \{\mathfrak{z} \xi^a\}$$

überführen in die Figur

$$(3) \quad \{ \overset{*}{\underset{*}{\mathfrak{z}}} \overset{*}{\mathfrak{x}}^a \}.$$

Wir können zunächst durch eine Ähnlichkeit \mathfrak{z} in $\overset{*}{\mathfrak{z}}$ überführen, dann gehen die $\overset{*}{\mathfrak{x}}^a$ in drei Punkte $\overset{*}{\mathfrak{x}}^a$ auf $\overset{*}{\mathfrak{z}}^*$ über.

Also kann man dann auf verschiedene Weisen durch eine Kreisverwandtschaft auf $\overset{*}{\mathfrak{z}}$ die $\overline{\mathfrak{x}}^i$ in die $\overset{*}{\mathfrak{x}}^a$ überführen.

Zu jeder solchen Kreisverwandtschaft haben wir dann nach dem eben ausgeführten noch zwei zugehörige Transformationen des Raumes.

Diese vier Abbildungen sind nun auch die einzig möglichen.

Denn die Figur

$$(4) \quad \{ \overset{*}{\underset{*}{\mathfrak{z}}} \overset{*}{\mathfrak{x}}^a \}$$

kann, wenn man die Identität mitrechnet, nur durch vier Transformationen in sich übergeführt werden.

Zunächst gibt es zu der Identität auf der Ebene \mathfrak{z}^* zwei Kreisverwandtschaften, einmal die Identität des Raumes, dann die Inversion an \mathfrak{z}^* , die alle Punkte von \mathfrak{z}^* in Ruhe lässt.

Dann gibt es die Inversion auf \mathfrak{z}^* , die den Kreis durch die Punkte $\overset{*}{\mathfrak{x}}^a$ auf \mathfrak{z} punktweise in Ruhe lässt, und zu dieser gibt es zwei Transformationen im Raum, von denen man wieder die eine aus der andern erhält, indem man noch die Inversion an \mathfrak{z}^* ausführt.

Da die Figur

$$(5) \quad \{ \overset{*}{\underset{*}{\mathfrak{z}}} \overset{*}{\mathfrak{x}}^a \}$$

von 10 Bestimmungsstücken abhängt, ist unsere Gruppe der Abbildungen von MÖBIUS im Raum $10 = \text{Gliederig}$. Weiter kann man das erwähnte Dreieck auf der Kugel erweitern.

(G) Im folgenden möchten wir die Fläche F in R_3 klarlegen, die mit n Punktpaaren und m Kreise in R_3 bestimmt wird.

Wir können daher auch n neue Punktpaaren und m neue Kreise in R_3

$$(1) \quad \overset{*}{\mathfrak{x}}^a = \sum c_{\mathfrak{r}}^a \overset{*}{\mathfrak{x}}^{\mathfrak{r}}$$

als Linearkombinationen der $\overset{*}{\mathfrak{x}}^a$ einführen mit Koeffizienten $c_{\mathfrak{r}}^a$, deren

Determinante

$$(2) \quad |c_p^{\alpha}| \neq 0$$

sein muss, wenn ξ^I, ξ^{II}, \dots nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut mit der ξ^{α} unsere Fläche F darstellen, wo

$$\alpha = 3n + 2m$$

ist.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kugeln

$$(3) \quad \xi^{\alpha}, \eta^{\alpha}, \zeta^{\alpha}, \dots \quad [\alpha = I, II, \dots, 3n + 2m]$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von F festlegen, nur von der geometrischen Figur der F abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kugeln, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen von der Art (1).

Wir wollen (1) auch die Büscheltransformationen des F nennen. Betrachten wir zunächst einen $F \xi^{\alpha}$.

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(4) \quad (\xi^{\alpha} \xi^{\beta}) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Grössensystem, das sich nach (1) in folgender Weise substituirt:

$$(5) \quad \overset{*}{A}^{\alpha\beta} = c_p^{\alpha} c_q^{\beta} A^{pq} \quad [\overset{*}{A}^{\alpha\beta} = (\overset{*}{\xi}^{\alpha} \overset{*}{\xi}^{\beta})].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis $3n + 2m$.

Da bestehen

$$(6) \quad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$$

und

$$(7) \quad A^* = |c_p^{\alpha}|^2 \cdot A,$$

wo

$$(8) \quad A = |A^{\alpha\beta}|$$

gilt.

Wir betrachten zwei Flächen F und \bar{F} , die durch die beiden Kugelpaare

$$(9) \quad \bar{x}^a \text{ und } \bar{x}^\lambda \quad [a, \lambda = \text{I, II}, \dots, 3n+2m]$$

dargestellt sind.

Wir definieren analog zu (4)

$$(10) \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = (\bar{x}^\lambda \bar{x}^\mu) \text{ mit Hilfe von } \bar{A}^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(11) \quad A = |\bar{A}^{\lambda\mu}| \neq 0$$

voraus.

Dann haben wir für \bar{F} die Büscheltransformationen

$$(12) \quad \bar{x}^\lambda = \bar{c}_\mu^\lambda \bar{x}^\mu$$

zu berücksichtigen.

Die \bar{c}_μ^λ in (12) sind aber von den c_μ^a in (1) völlig unabhängig neue Größen.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(13) \quad || \bar{x}^{\text{I}}, \bar{x}^{\text{II}}, \dots, \bar{x}^{3n+2m}, \bar{x}^{\text{I}}, \bar{x}^{\text{II}}, \dots, \bar{x}^{3n+2m} || \equiv 0$$

ist, wo eine lineare Beziehung der Form

$$(14) \quad \sigma_a \bar{x}^a = \bar{\sigma}_\lambda \bar{x}^\lambda$$

gilt.

Die Bedeutung von (14) ist aber die, dass es eine Kugel

$$(15) \quad \bar{z} = \sigma_a \bar{x}^a = \bar{\sigma}_\lambda \bar{x}^\lambda$$

gibt, von der beide Flächen F bestimmt werden.

Weiter kann man so untersuchen wie in meiner Arbeit⁽¹⁾.

(H) Es werden n Funktionen

$$(1) \quad \theta_i(x, u^1, \dots, u^m), [i=1, 2, \dots, n],$$

der Variablen $x(t)$ und dem Parameter u^1, \dots, u^m zugrundegelegt, wo $x(t)$ die Kugel in R_n bedeutet und $0 \leq t \leq 1$ ist.

Die n Vektoren θ_i und alle ihre linearen Kombinationen mit Koef-

(1) NAKAZIMA (=MATUMURA), S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., 34 (1931), S. 187.

fizienten, die von den u , aber nicht von ξ abhängen, bilden einen Vektorraum R_n .

Wenn sich die Ableitungen

$$(2) \quad \theta_{i,\lambda} = \partial \theta_i / \partial u^\lambda$$

durch die θ , nicht linear ausdrücken lassen, so kann man zu k weitere Funktionen

$$(3) \quad \theta_{p+1}, \dots, \theta_{n+k}$$

hinzufügen, sodass die $\theta_{i,\lambda}$ in dem erweiterten Raum R_{n+k} liegen, der die „erste Normalerweiterung“ von R_n heisst.

Die erste Normalerweiterung von R_{n+1} heisst zweite Normalerweiterung von R_n , usw.⁽¹⁾.

(3) .

(A) Ist α eine feste Kugel und $\hat{\xi}$ eine beliebige Kugel in R_3 , so bezeichnet ξ in

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\alpha)\alpha$$

einen Punkt auf α .

Aus (1) folgt

$$(2) \quad \xi' = \hat{\xi}' - (\hat{\xi}'\alpha)\alpha,$$

so erhalten wir

$$(3) \quad \eta = \xi + r\xi'$$

oder

$$(4) \quad \eta = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\alpha)\alpha + r\{\hat{\xi}' - (\hat{\xi}'\alpha)\alpha\}$$

als Gleichung der Tangente unserer Kurve (\mathbb{K}), wo r ein Parameter ist.

$$(5) \quad (\eta - \xi, \xi', \xi'') = 0$$

oder

(1) INGOLD, L.: Geometry of a set of n functions, Annals of Math, (2) 27, p. 494.

$$(6) \quad (\xi - \hat{\xi} + (\hat{\xi}a)a, \quad \xi' - (\hat{\xi}'a)a, \quad \xi'' - (\hat{\xi}''a)a) = 0$$

ist die Gleichung der Schmiegebene.

Man bezeichnet die Krümmung üblicherweise mit $1/\rho$, so findet man

$$(7) \quad 1/\rho = \sqrt{\xi'^2}$$

oder

$$(8) \quad 1/\rho = \sqrt{\{\xi'' - (\hat{\xi}''a)a\}^2},$$

u. a. w..

(B) Wenn ξ der Berührungspunkt der zwei Kreise $\hat{\xi}$ und η in R_2 , so folgt

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta, \quad (\hat{\xi}\eta)^2 = 1$$

oder

$$(2) \quad \hat{\xi} = \xi + (\hat{\xi}\eta)\eta$$

oder

$$(3) \quad (\hat{\xi}\eta) = (\xi\eta) + (\hat{\xi}\eta)(\eta\eta),$$

wo η ein beliegiger Kreis in R_3 ist.

Aus (3) ersieht man, dass

$$(4) \quad \cos \varphi_1 = (\xi\eta) + \varepsilon \cos \varphi_2$$

gilt, wo φ_1 der Winkel zwischen $\hat{\xi}$ und η , φ_2 der zwischen η und ξ , $\varepsilon = +1$ oder -1 ist.

Nehmen wir einen Punkt p auf $\hat{\xi}$, so folgt aus (2)

$$(5) \quad (p\hat{\xi}) = (p\xi) + (\hat{\xi}\eta)(p\eta)$$

oder

$$(6) \quad 0 = (p\xi) + (\hat{\xi}\eta)(p\eta);$$

daraus folgt

$$(7) \quad l = \varepsilon (p\eta),$$

wo l die Länge zwischen p und ξ ist.

Aus

$$(8) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta$$

folgt

$$(9) \quad \hat{\xi} = \xi + (\hat{\xi}\eta)\eta,$$

so ergibt sich

$$(10) \quad (p\hat{\xi}) = (p\xi) + (\hat{\xi}\eta)(p\eta)$$

oder

$$(11) \quad (p\hat{\xi}) = (p\xi),$$

wo p ein Punkt auf η ist; so ersieht man, dass, wenn ein Punkt p auf η liegt, so

$$(12) \quad (p\hat{\xi}) = l^2$$

gilt, wo l die Länge zwischen ξ und p ist.

(C) Sind

$$(1) \quad {}_{(i)}\xi, \quad [i=1, 2, 3, 4]$$

die Berührungspunkte zwischen zwei Kugeln ${}_{(i)}\hat{\xi}$ und ${}_{(i)}\eta$ in R_s , so folgen

$$(2) \quad {}_{(i)}\xi = {}_{(i)}\hat{\xi} - ({}_{(i)}\hat{\xi}{}_{(i)}\eta){}_{(i)}\eta \quad [i=1, 2, 3, 4];$$

daraus kommen

$$(3) \quad 0 = (\eta {}_{(i)}\xi) = (\eta {}_{(i)}\hat{\xi}) - ({}_{(i)}\hat{\xi}{}_{(i)}\eta)(\eta {}_{(i)}\eta) \quad [i=1, 2, 3, 4]$$

oder

$$(4) \quad (\eta {}_{(i)}\hat{\xi})^2 = (\eta {}_{(i)}\eta)^2, \quad [i=1, 2, 3, 4]$$

oder

$$(5) \quad \cos^2 {}_{(i)}\phi = \cos^2 {}_{(i)}\phi', \quad [i=1, 2, 3, 4]$$

wo ${}_{(i)}\phi$ der Winkel zwischen η und ${}_{(i)}\hat{\xi}$, ${}_{(i)}\phi'$ der zwischen η und ${}_{(i)}\eta$ ist.

Sind

$$(6) \quad {}_{(i)}\xi, \quad [i=1, 2, \dots, n]$$

die Berührungspunkte zwischen zwei Kugeln ${}_{(i)}\hat{\xi}$ und ${}_{(i)}\eta$ in R_n , so gelten

$$(7) \quad \cos^2 {}_{(i)}\phi = \cos^2 {}_{(i)}\psi, \quad [i=1, 2, \dots, n]$$

anstatt (5).

(D) ξ , η und ζ seien drei Berührungskreise in R_2 , so folgt

$$(1) \quad \xi^2 = 2 \{1 - (\hat{\xi}\eta)(\hat{\xi}\zeta)(\eta\zeta)\} = 0,$$

wenn

$$(2) \quad (\hat{\xi}\eta)(\hat{\xi}\zeta)(\eta\zeta) = 1,$$

wo

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = (\hat{\xi}\zeta)\zeta - (\hat{\xi}\eta)\eta, \\ (\hat{\xi}\zeta)^2 = 1, \quad (\hat{\xi}\eta)^2 = 1, \quad (\eta\zeta)^2 = 1; \end{cases}$$

daraus ersieht man, dass ξ ein Punkt in R_2 ist, wenn (2) gilt.

Liegt ξ auf einem Kreise η in R_2 , so ergibt sich

$$(4) \quad 0 = (\xi\eta) = (\hat{\xi}\zeta)(\eta\zeta) - (\hat{\xi}\eta)(\eta\eta)$$

oder

$$(5) \quad (\eta\zeta)^2 = (\eta\eta)^2.$$

Weiter gelten

$$(6) \quad \begin{cases} (\xi\zeta) = (\hat{\xi}\zeta) - (\hat{\xi}\eta)(\eta\zeta) = 0, \\ (\xi\eta) = (\hat{\xi}\zeta)(\eta\zeta) - (\hat{\xi}\eta) = 0, \end{cases}$$

wenn

$$(7) \quad (\hat{\xi}\eta) = (\hat{\xi}\zeta) = (\eta\zeta) = 1.$$

$$(8) \quad (\xi\xi) = 0$$

gelten, falls

$$(9) \quad (\hat{\xi}\zeta)^2 = 1, \quad (\hat{\xi}\eta)^2 = 1, \quad (\eta\zeta)^2 = 1;$$

man kann sagen, dass, wenn (7) gilt, so der Punkt ξ auf dem Kreise η und ζ in R_2 liegt.

Wenn (9) gültig ist, so liegt der Punkt ξ auf dem Kreise ξ .

Wir betrachten

$$(10) \quad \mathfrak{x} = (\hat{\xi}\zeta)\zeta - (\hat{\xi}\eta)\eta$$

als Funktion eines Parameters t , so ergibt sich

$$(11) \quad \mathfrak{x}(t) = (\hat{\xi}\zeta)\zeta(t) - (\hat{\xi}\eta)\eta(t).$$

Mit (11) kann man eine Kurve in R_3 bezeichnen.

Wenn $\hat{\xi}$, η und ζ Kugeln in R_3 sind, so kann man mit

$$(12) \quad \mathfrak{x}(t) = (\hat{\xi}\zeta)\zeta(t) - (\hat{\xi}\eta)\eta(t)$$

eine Raumkurve in R_3 bezeichnen.

Aus (12) ergibt sich die *Tangente*, die mittels eines Parameters r folgendermassen dargestellt werden kann:

$$(13) \quad \begin{cases} \mathfrak{y} = \mathfrak{x} + r\mathfrak{x}' = (\hat{\xi}\zeta)\zeta(t) - (\hat{\xi}\eta)\eta(t) \\ \quad + r\{(\hat{\xi}\zeta)\zeta'(t) - (\hat{\xi}\eta)\eta'(t)\}. \end{cases}$$

Ist \mathfrak{y} ein beliebiger Punkt von Schmiegebene der Kurve (13) im Punkte \mathfrak{x} , so liegen die drei vom Ursprung aus abgetragenen Vektoren \mathfrak{x}' , \mathfrak{x}'' und $\mathfrak{y} - \mathfrak{x}$ in einer Ebene, die sich durch die Gleichung

$$(14) \quad (\mathfrak{y} - \mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'') = 0,$$

oder

$$(15) \quad \begin{cases} (\mathfrak{y} - (\hat{\xi}\zeta)\zeta + (\hat{\xi}\eta)\eta, (\hat{\xi}\zeta)\zeta' - (\hat{\xi}\eta)\eta'), \\ ((\hat{\xi}\zeta)\zeta'' - (\hat{\xi}\eta)\eta'') = 0 \end{cases}$$

zum Ausdruck bringen lässt.

(15) ist also die Gleichung der *Schmiegebene*.

Ein Ausnahmefall tritt nur dann ein, wenn die Vektoren \mathfrak{x}' und \mathfrak{x}'' gleichgerichtet sind, falls es also zwei Zahlen a und b gibt, die nicht alle beide Null sind, so dass

$$(16) \quad a\mathfrak{x}' + b\mathfrak{x}'' = 0$$

oder

$$(17) \quad a\{(\hat{\xi}\zeta)\zeta' - (\hat{\xi}\eta)\eta'\} + b\{(\hat{\xi}\zeta)\zeta'' - (\hat{\xi}\eta)\eta''\} = 0$$

ist oder, wenn

$$(18) \quad \{(\xi\zeta)\zeta' - (\xi\eta)\eta'\} \times \{(\xi\zeta)\zeta'' - (\xi\eta)\eta''\} = 0$$

ist.

Wann tritt der Ausnahmefall ein, dasz

$$(19) \quad \{(\xi\zeta)\zeta' - (\xi\eta)\eta'\} \times \{(\xi\zeta)\zeta'' - (\xi\eta)\eta''\} = 0$$

längs einer Kurve identisch verschwindet?

Da ξ' mit Null nicht identisch sein darf, falls die Kurve nicht auf einen einzigen Punkt zusammenschrumpfen soll, so musz ξ'' von ξ' linear abhängen:

$$(20) \quad \xi'' = \varphi \xi'$$

oder

$$(21) \quad \{(\xi\zeta)\zeta' - (\xi\eta)\eta'\} = \varphi \{(\xi\zeta)\zeta'' - (\xi\eta)\eta''\}.$$

Nehmen wir jetzt die Bogenlänge als Kurvenparameter

$$(22) \quad \begin{cases} \xi = \xi(s) = (\xi\zeta)\zeta(s) - (\xi\eta)\eta(s), \\ \{(\xi\zeta)\zeta' - (\xi\eta)\eta'\}^2 = 1, \end{cases}$$

so wird

$$(23) \quad \{(\xi\zeta)\zeta' - (\xi\eta)\eta'\} \{(\xi\zeta)\zeta'' - (\xi\eta)\eta''\} = 0.$$

Weiter erhalten wir

$$(24) \quad ds^2 = \{(\xi\zeta)\dot{\zeta} - (\xi\eta)\dot{\eta}\}^2 dt^2,$$

wo ds das Bogenelement der Raumkurve bezeichnet.

Weiter kann man unsere Kurve untersuchen wie in gewöhnlicher Differentialgeometrie.

(E) Wir betrachten

$$(1) \quad \xi = (\xi\eta)\eta + (\xi\zeta)\zeta - (\eta\zeta)\zeta,$$

wo

$$(2) \quad \begin{cases} (\xi\eta)^2 = (\xi\zeta)^2 = (\eta\zeta)^2 = 1, \\ (\eta\zeta)(\xi\eta)(\xi\zeta) = (\xi\zeta)(\eta\zeta) = (\xi\eta)(\eta\zeta) = 1 \end{cases}$$

gültig sind. Es ergibt sich

$$(3) \quad \xi^2 = 1,$$

so bezeichnet ξ in (1) einen Punkt in R_2 , wo $\hat{\xi}$, η und ζ Kreise in R_2 bedeuten.

Aus (1) kann man

$$(4) \quad (\eta\xi)^2 = 1$$

und

$$(5) \quad (\hat{\xi}\xi) = 1$$

bezeichnen; daraus ersieht man, dass ξ auf η oder $\hat{\xi}$ nicht liegt.

(F) Wir betrachten

$$(1) \quad \xi = (\hat{\xi}\eta)\zeta + (\eta\zeta)\hat{\xi} + (\hat{\xi}\zeta)\eta,$$

wo $\hat{\xi}$, η und ζ drei Berührungskreise in R_2 sind. Man kann wissen, dass

$$(2) \quad \xi^2 \neq 0, \quad (\xi\hat{\xi}) \neq 0, \quad (\xi\eta) \neq 0, \quad (\xi\zeta) \neq 0;$$

darin erkennt man, dass ξ nicht ein Punkt ist und ξ bzw. $\hat{\xi}$, η und ζ nicht berühren.

(G) Ist ξ der Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\xi}$ und η in R_2 , so folgt

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta.$$

Ist η der Berührungspunkt zweier Kreise η und ζ in R_2 , so ergibt sich

$$(2) \quad \eta = \eta - (\eta\zeta)\zeta.$$

Ist ζ der Berührungspunkt zweier Kreise ζ und $\hat{\xi}$ in R_2 , so folgt

$$(3) \quad \zeta = \zeta - (\zeta\hat{\xi})\hat{\xi}.$$

Berührt ein Kreis ν $\hat{\xi}$, η und ζ in $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ bzw. $\bar{\zeta}$, so folgen

$$(4) \quad \bar{\xi} = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\nu)\nu, \quad \bar{\eta} = \eta - (\eta\nu)\nu, \quad \bar{\zeta} = \zeta - (\zeta\nu)\nu.$$

Geht ein Kreis R durch drei Punkte $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ und $\bar{\zeta}$, so folgt aus (1), (4)₂ und (4)₁:

$$(5) \quad (\xi R)^2 = (\eta R)^2, \quad (\xi R)^2 = (bR)^2, \quad (\eta R)^2 = (bR)^2.$$

Geht ein Kreis S drei Punkte $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$ und η hindurch, so folgt aus (2), (4)₃ und (4)₂:

$$(6) \quad (\eta S)^2 = (\xi S)^2, \quad (\eta S)^2 = (bS)^2, \quad (\xi S)^2 = (bS)^2.$$

Geht ein Kreis drei Punkte $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ und ξ hindurch, so folgt aus (4)₄, (4)₃ und (3):

$$(7) \quad (\xi T)^2 = (\eta T)^2, \quad (\xi T)^2 = (bT)^2, \quad (\eta T)^2 = (bT)^2.$$

(H) Wir betrachten

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi}\eta)\eta,$$

wo ξ der Berührungspunkt zweier Kugeln $\hat{\xi}$ und η in R_3 ist.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Länge einer auf der Fläche

$$(2) \quad \xi = \xi(u^1, u^2) \quad \text{oder} \quad \xi = \hat{\xi}(u^1, u^2) - (\hat{\xi}\eta)\eta(u^1, u^2)$$

gelegenen stetig differenzierbaren Kurve

$$(3) \quad u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t)$$

zu ermitteln, wo u^i , t Parameter bedeuten.

Wir finden dafür

$$(4) \quad s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\xi}^2} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\{\dot{\hat{\xi}} - (\hat{\xi}\eta)\dot{\eta}\}^2} dt,$$

wo s die Bogenlänge bedeutet.

Wir kürzen wie üblich ab:

$$(5) \quad \begin{cases} g_{11} = \{\hat{\xi}_1 - (\hat{\xi}\eta)\eta_1\}^2, & g_{12} = \{\hat{\xi}_1 - (\hat{\xi}\eta)\eta_1\} \{\hat{\xi}_2 - (\hat{\xi}\eta)\eta_2\}, \\ g_{21} (= g_{12}) = \{\hat{\xi}_2 - (\hat{\xi}\eta)\eta_2\} \{\hat{\xi}_1 - (\hat{\xi}\eta)\eta_1\}, & g_{22} = \{\hat{\xi}_2 - (\hat{\xi}\eta)\eta_2\}^2 \end{cases}$$

und können dann kurz schreiben:

$$(6) \quad \dot{\xi}^2 = \sum g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = \{\dot{\hat{\xi}} - (\hat{\xi}\eta)\dot{\eta}\}^2.$$

Die quadratische Differentialform (6) heisst die erste Fundamentalform.

Die g_{ik} sind dabei stetige Funktionen der u^1 , u^2 .

Aus (6) kann man wissen, dass die Gleichung unserer Minimalkurven ist:

$$(7) \quad \{\dot{\xi} - (\xi\eta)\dot{\eta}\}^2 = g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k = 0.$$

Sind z. B.

$$(8) \quad u^i = u^i(t_1), \quad u^i = \bar{u}^i(t_2)$$

die beiden Kurven, so sind

$$(9) \quad \dot{\xi} - (\xi\eta)\dot{\eta} = \{\xi_1 - (\xi\eta)\eta_1\}\dot{u}^1 + \{\xi_2 - (\xi\eta)\eta_2\}\dot{u}^2$$

und

$$(10) \quad \dot{\bar{\xi}} - (\bar{\xi}\bar{\eta})\dot{\bar{\eta}} = \{\bar{\xi}_1 - (\bar{\xi}\bar{\eta})\bar{\eta}_1\}\dot{\bar{u}}^1 + \{\bar{\xi}_2 - (\bar{\xi}\bar{\eta})\bar{\eta}_2\}\dot{\bar{u}}^2$$

die Tangentenvektoren, wo für ξ_1, ξ_2 die Werte dieser Funktionen im Schnittpunkt, für t_1 und t_2 die dem Schnittpunkt entsprechenden Parameter zu nehmen sind.

Dann wird

$$(11) \quad \cos \theta = \frac{\dot{\xi}\bar{\xi}}{\sqrt{\dot{\xi}^2}\sqrt{\dot{\bar{\xi}}^2}} = \frac{g_{ik}\dot{u}^i\dot{\bar{u}}^k}{\sqrt{g_{ik}\dot{u}^i\dot{u}^k}\sqrt{g_{ik}\dot{\bar{u}}^i\dot{\bar{u}}^k}},$$

wenn θ der Winkel ihrer beiden Tangentenvektoren ist.

Sind die beiden Kurven die beiden Parameterlinien $u^1 = \text{const.}$ und $u^2 = \text{const.}$ durch den Flächenpunkt, so hat man $\dot{u}^1 = 0$ und $\dot{\bar{u}}^2 = 0$ zu nehmen,

Dann wird der Winkel ω der Parameterlinien

$$(12) \quad \cos \omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

g_{12} bedeutet also, dass die Parameterlinien aufeinander senkrecht stehen.

Weiter kann man berechnen die Formeln in gewöhnlicher Differentialgeometrie in unserer Geometrie.

(I) Wenn sich zwei Kreise α und ξ in R_2 in ξ innen berühren, so folgt

$$(1) \quad \xi = \alpha + \hat{\xi}.$$

Ist η innerer Berührungspunkt zweier Kreise α und γ in R_2 , so ergibt sich

$$(2) \quad \eta = \alpha + \gamma.$$

Weiter ist δ äusserer Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\xi}$ und γ in R_2 , so folgt

$$(3) \quad \delta = \hat{\xi} - \gamma.$$

Aus (1), (2) und (3) kommt

$$(4) \quad \xi - \eta = \delta.$$

Geht ein Kreis ν in R_2 die Punkte ξ , η und δ hindurch, so folgt

$$(5) \quad \begin{cases} (\alpha\nu) + (\hat{\xi}\nu) = 0, & (\alpha\nu) + (\gamma\nu) = 0, \\ (\nu\hat{\xi}) - (\nu\gamma) = 0, \end{cases}$$

daraus kann man wissen, dass

$$(6) \quad \cos \phi + \cos \psi = 0,$$

ist, wo ϕ der Winkel zwischen α und ν , ψ der zwischen $\hat{\xi}$ und ν ist.

Wenn sich zwei Kreise α und $\hat{\xi}$ innen berühren in dem Punkt ξ , so folgt

$$(7) \quad \xi = \alpha + \hat{\xi}.$$

Berühren sich zwei Kreise γ und $\hat{\xi}$ in dem Punkt η auszen, so folgt

$$(8) \quad \eta = \hat{\xi} - \gamma$$

und

$$(9) \quad (\alpha\gamma) = 0;$$

daraus ersieht man, dass

$$(10) \quad (\alpha\eta) = (\alpha\hat{\xi}) = 1, \quad 0 = (\alpha\xi)$$

gültig ist, so erkennt man, dass

$$(11) \quad 0 = (\alpha\xi) = (\alpha\alpha) + (\alpha\hat{\xi}) = 1 + (\alpha\hat{\xi}).$$

Es folgt

$$(12) \quad (a\hat{\xi}) = -1,$$

wenn sich a und $\hat{\xi}$ innen berühren.

Weiter ersieht man, dass

$$(13) \quad (a\hat{\xi}) = 1$$

ist, wenn sich zwei Kreise a und $\hat{\xi}$ in R_2 auszen berühren.

Schneiden γ und a einander mit dem Winkel φ in (9), so folgt

$$(14) \quad \xi = a + \hat{\xi}, \quad \eta = \hat{\xi} - \gamma, \quad (a\gamma) = \cos \phi,$$

so folgt

$$(15) \quad (a\eta) = (a\hat{\xi}) - \cos \phi, \quad (a\xi) = 1 + (a\hat{\xi})$$

oder

$$(16) \quad \begin{cases} (a\eta) = (a\xi) - 1 - \cos \phi \\ \quad \quad = -2 - \cos \phi. \end{cases}$$

Berühren sich zwei Kreise $\hat{\xi}$ und γ in R_2 in dem Punkt ξ auszen, so folgt

$$(17) \quad \xi = \hat{\xi} - \gamma;$$

daran erkennt man, dass

$$(18) \quad (a\xi) = (a\hat{\xi}) - (a\gamma)$$

gilt, so liegt der Punkt ξ auf einem Kreis a .

Berührt $\hat{\xi}$ a in ξ auszen, so folgt

$$(19) \quad \xi = a - \hat{\xi}.$$

Berührt γ $\hat{\xi}$ in η auszen, so folgt

$$(20) \quad \eta = \hat{\xi} - \gamma.$$

Sind a und γ zueinander senkrecht, so folgt

$$(21) \quad (a\gamma) = 0,$$

daraus ergibt sich

$$(22) \quad (a\xi) = 1 - (a\hat{\xi}), \quad (a\eta) = (a\hat{\xi}) - (a\gamma),$$

so folgt

$$(23) \quad 0 = (\alpha\chi) = 1 - (\alpha\eta) - (\alpha\gamma)$$

oder

$$(24) \quad 1 = (\alpha\eta) + (\alpha\gamma)$$

d. h.

$$(25) \quad 1 = (\alpha\eta),$$

wenn α und η zueinander senkrecht sind.

Gelten

$$(26) \quad \chi = \alpha - \hat{\xi}, \quad \eta = \hat{\xi} - \gamma, \quad (\alpha\gamma) = \cos \varphi,$$

so folgt

$$(27) \quad (\alpha\chi) = 1 - (\alpha\hat{\xi}), \quad (\alpha\eta) = (\alpha\hat{\xi}) - (\alpha\gamma),$$

daraus ergibt sich

$$(28) \quad (\alpha\chi) = 1 - (\alpha\eta) - (\alpha\gamma)$$

oder

$$(29) \quad 1 = (\alpha\eta) + \cos \varphi$$

d. h.

$$(30) \quad (\alpha\eta) = 1 - \cos \varphi.$$

Ist χ ein äusserer Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\xi}$ und ζ , so folgt

$$(31) \quad \chi = \hat{\xi} - \zeta.$$

Ist η ein äusserer Berührungspunkt zweier Kreise γ und ζ , so folgt

$$(32) \quad \eta = \gamma - \zeta.$$

Wenn ζ und ν zueinander senkrecht sind, so folgt

$$(33) \quad (\zeta\nu) = 0.$$

Aus (31), (32) und (33) kommt

$$(34) \quad (\chi\nu) = (\hat{\xi}\nu), \quad (\eta\nu) = (\gamma\nu)$$

Betrachten wir die Kugeln anstatt der oben genannten Kreise, so folgen ähnliche Sätze wie oben.

(J) Berühren sich zwei Kreise α und β in \mathcal{C} innen, so folgt

$$(1) \quad \mathcal{C} = \alpha + \beta.$$

Berührt ein Kreis χ α auszen und β innen, so folgt

$$(2) \quad v = \alpha - \chi, \quad w = \beta - \chi.$$

Aus (1) und (2) erhalten wir

$$(3) \quad \begin{cases} 2\alpha = v + \mathcal{C} - w, & 2\beta = -v + \mathcal{C} + w, \\ v - w = \alpha - \beta. \end{cases}$$

Gilt

$$(4) \quad (\chi\beta) = 0$$

anstatt

$$(5) \quad w = \beta - \chi$$

in (2)₂, so haben wir zur Folge

$$(6) \quad \mathcal{C} = \alpha + \beta, \quad v = \alpha - \chi, \quad (\chi\beta) = 0.$$

Aus (6) folgt

$$(7) \quad (\mathcal{C}\beta) = (\alpha\beta) + 1, \quad (v\beta) = (\alpha\beta) - (\chi\beta)$$

oder

$$(8) \quad (v\beta) = -1.$$

Schneiden χ β mit dem Winkel ϕ in (6), so folgt

$$(9) \quad \mathcal{C} = \alpha + \beta, \quad v = \alpha - \chi, \quad (\chi\beta) = \cos \phi;$$

daraus ergibt sich

$$(10) \quad (\mathcal{C}\beta) = (\alpha\beta) + 1, \quad (v\beta) = (\alpha\beta) - (\chi\beta)$$

oder

$$(11) \quad (\mathcal{C}\beta) = (\alpha\beta) + 1, \quad (v\beta) = (\alpha\beta) - \cos \phi.$$

Daraus sieht man, dass

$$(12) \quad (\mathcal{C}\beta) = (v\beta) + \cos \phi + 1$$

folgt.

Es seien drei Kreise a , \mathfrak{B} und b in R_2 gegeben, die sich in dem Punkt \mathfrak{C} innen berühren, so folgt

$$(13) \quad \begin{cases} \mathfrak{C} = a + \mathfrak{B}, & \mathfrak{C} = a + b, \\ b = a - \mathfrak{x}, & w = b - \mathfrak{x}, \end{cases}$$

wo der Kreis \mathfrak{x} a auszen im Punkt b berührt und \mathfrak{x} im Punkt w b innen berührt.

Weiter gilt

$$(14) \quad (\mathfrak{x}\mathfrak{B}) = \cos \phi,$$

wo ϕ der Winkel zwischen \mathfrak{x} und \mathfrak{B} ist.

Aus (13) und (14) kommt

$$(15) \quad \begin{cases} (\mathfrak{x}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{x}a) + \cos \phi, & (\mathfrak{x}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{x}a) + (\mathfrak{x}b), \\ (\mathfrak{x}w) = (\mathfrak{x}a) - 1, & (\mathfrak{x}w) = (\mathfrak{x}b) - 1. \end{cases}$$

(K) Wenn sich drei Kreise ξ , η und b in R_2 in dem Punkt \mathfrak{x} berühren, so folgt

$$(1) \quad \eta = \xi + r_1 \mathfrak{x}, \quad b = \xi + r_2 \mathfrak{x}$$

wo r_i Konstanten sind.

Wenn ein Kreis η in R_2 zu \mathfrak{z} senkrecht ist und ξ innen und ferner b auszen berührt, so folgt

$$(2) \quad \begin{cases} (\xi\eta) + r_1(\mathfrak{x}\eta) = 0, & (\xi\eta) = -1, \\ (\xi b) + r_2(\mathfrak{x}b) = 1, \end{cases}$$

woraus sich ergibt:

$$(3) \quad \eta = \xi - \frac{(\xi\eta)}{(\mathfrak{x}\eta)} \mathfrak{x}, \quad b = \xi + \frac{1 - (\xi b)}{(\mathfrak{x}b)} \mathfrak{x},$$

oder

$$(4) \quad \eta = \xi + \mathfrak{x} : (\mathfrak{x}\eta), \quad b = \xi + \frac{1 - (\xi b)}{(\mathfrak{x}b)} \mathfrak{x}.$$

Daraus folgt

$$(5) \quad (\eta\eta) = -2, \quad (b\eta) = -1 + \frac{1 - (\xi b)}{(\mathfrak{x}b)} (\mathfrak{x}\eta).$$

(L) Nun möchten wir den folgenden Satz beweisen.

Satz: Es seien drei Kreise $\hat{\xi}$, η und $\bar{\eta}$ in R_2 gegeben, η und $\bar{\eta}$ berühren $\hat{\xi}$ in dem Punkt \mathfrak{x} , so berühren η und $\bar{\eta}$ einander.

Beweis: Wir haben

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \hat{\xi} - \eta$$

und

$$(2) \quad \mathfrak{x} = \hat{\xi} + \bar{\eta},$$

so folgt

$$(3) \quad 0 = 1 - (\hat{\xi} \eta) + (\hat{\xi} \bar{\eta}) - (\eta \bar{\eta})$$

oder

$$(4) \quad (\eta \bar{\eta}) = +1,$$

w. z. b. w.,

(M) Wenn sich drei Kreise $\hat{\xi}$, η und ζ in R_2 auszen berühren, so folgt

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \hat{\xi} - \eta, \quad \mathfrak{y} = \eta - \zeta, \quad \mathfrak{z} = \zeta - \hat{\xi};$$

daraus ergibt sich

$$(2) \quad \mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z} = 0,$$

wo \mathfrak{x} , \mathfrak{y} , \mathfrak{z} die Berührungspunkte zwischen $\hat{\xi}$, η ; η , ζ bzw. ζ , $\hat{\xi}$ bedeuten.

Geht der Kreis η die Punkte \mathfrak{x} , \mathfrak{y} und \mathfrak{z} hindurch, so folgen

$$(3) \quad (\hat{\xi} \eta) = (\eta \mathfrak{y}), \quad (\eta \mathfrak{y}) = (\zeta \mathfrak{y}), \quad (\zeta \mathfrak{y}) = (\hat{\xi} \mathfrak{y})$$

oder

$$(4) \quad (\hat{\xi} \mathfrak{y}) = (\eta \mathfrak{y}) = (\zeta \mathfrak{y}).$$

Daraus ergibt sich

$$(5) \quad \cos \varphi = \cos \psi = \cos \phi,$$

wo φ der Winkel zwischen $\hat{\xi}$ und \mathfrak{y} , ψ der zwischen η und \mathfrak{y} , ϕ der zwischen ζ und \mathfrak{y} ist.

Wenn \mathfrak{x} , \mathfrak{z} die inneren Berührungspunkte zwischen $\hat{\xi}$, η bzw. ζ ,

ξ und η die äusseren Berührungspunkte zwischen γ und ζ sind, so folgen

$$(6) \quad \chi = \xi - \eta, \quad \psi = \eta + \zeta, \quad \vartheta = \zeta - \xi.$$

Daraus kann man die Länge zwischen χ und ψ , zwischen ψ und ϑ bzw. zwischen ϑ und χ berechnen.

Wenn sich zwei Kreise ξ und η in R_2 auszen berühren, so folgt

$$(7) \quad \chi = \xi - \eta.$$

Geht ein Kreis η in R_2 den Punkt χ hindurch, so kommt aus (7)

$$(8) \quad 0 = (\eta\chi) = (\eta\xi) - (\eta\eta)$$

oder

$$(9) \quad \cos \alpha = \cos \beta,$$

wo α der Winkel zwischen η und ξ , β der zwischen η und η ist.

Wenn sich zwei Kreise ξ und η in R_2 innen berühren, so folgt

$$(10) \quad \chi = \xi + \eta.$$

Geht ein Kreis η in R_2 den Punkt χ hindurch, so folgt aus (10)

$$(11) \quad (\eta\xi) = -(\eta\eta)$$

oder

$$(12) \quad \cos \alpha = -\cos \beta,$$

wo α der Winkel zwischen η und ξ , β der zwischen η und η ist.

(N) Wenn sich zwei Kreise ξ und η in R_2 im Punkt χ auszen berühren, so folgt

$$(1) \quad \chi = \xi - \eta.$$

Weiter gelten

$$(2) \quad \psi = \xi + \zeta$$

und

$$(3) \quad \vartheta = \eta + \zeta,$$

wenn zwei Kreise ξ , η im Punkt ψ bzw. im Punkt ϑ innen berühren.

Geht ein Kreis \mathfrak{v} in R_2 die Punkte \mathfrak{x} , \mathfrak{y} und \mathfrak{z} hindurch, so gelten

$$(4) \quad \begin{cases} 0 = (\mathfrak{v}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{v}\xi) - (\mathfrak{v}\eta), \\ 0 = (\mathfrak{v}\mathfrak{y}) = (\mathfrak{v}\xi) + (\mathfrak{v}\zeta), \\ 0 = (\mathfrak{v}\mathfrak{z}) = (\mathfrak{v}\eta) + (\mathfrak{v}\zeta) \end{cases}$$

oder

$$(5) \quad \begin{cases} \cos \phi_1 = \cos \phi_2, & \cos \phi_1 = -\cos \phi_3, \\ \cos \phi_2 = -\cos \phi_3, \end{cases}$$

wo ϕ_1 der Winkel zwischen \mathfrak{v} und ξ , ϕ_2 der zwischen \mathfrak{v} und η , ϕ_3 der zwischen \mathfrak{v} und ζ ist.

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXXIV)

Sôzi MATUMURA

(Accepted for publication, September, 22, 1939.)

Im folgenden möchten wir einige Bemerkungen über die Theorie der Kreise und Kugeln machen.

(1)

Zunächst werden wir zwei Berührungskreise oder zwei Berührungskugeln erläutern.

(A) Wenn sich zwei Kreise $\hat{\epsilon}$ und γ in R_2 in dem Punkt ξ berühren, so folgt daraus

$$(1) \quad \xi = \hat{\epsilon} - \gamma.$$

Nehmen wir einen Punkt υ auf γ , so haben wir

$$(2) \quad (\upsilon\xi) = (\upsilon\hat{\epsilon}) - (\upsilon\gamma)$$

oder

$$(3) \quad (\upsilon\xi) = (\upsilon\hat{\epsilon}),$$

da gilt

$$(4) \quad (\upsilon\gamma) = 0.$$

Aus (3) sieht man, dass

$$(5) \quad l^2 = (\upsilon\hat{\epsilon})$$

gilt, wo l die Länge zwischen zwei Punkten υ und ξ ist, wo υ auf dem Kreise γ liegt.

Liegt der äussere Berührungspunkt υ von zwei Kreisen $\hat{\epsilon}$ und $\bar{\gamma}$ auf γ in

$$(6) \quad \xi = \bar{\xi} - \eta,$$

so folgt daraus

$$(7) \quad l = (\bar{\xi} \xi) - (\xi \bar{\eta}),$$

wo l die Länge zwischen ξ und η ist; so gilt

$$(8) \quad \eta = \bar{\xi} - \bar{\eta}$$

und

$$(9) \quad (\eta \bar{\xi}) = (\eta \bar{\eta}).$$

(B) Wenn sich zwei Kreise ξ und η in R_2 innen berühren, so gilt

$$(1) \quad \xi = \bar{\xi} + \eta.$$

Wenn sich $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ in R_2 auszen berühren, so folgt

$$(2) \quad \bar{\xi} = \xi - \bar{\eta}.$$

Aus (1) und (2) kommt

$$(3) \quad \begin{cases} (\xi \bar{\xi}) = 1 + (\xi \eta) - (\bar{\xi} \bar{\eta}) - (\eta \bar{\eta}) \\ \quad = 1 + 1 - (-1) - (\eta \bar{\eta}) \\ \quad = 3 - (\eta \bar{\eta}) \end{cases}$$

d. h.

$$(4) \quad l_s = 3 - (\eta \bar{\eta}),$$

wo l die Länge zwischen zwei Punkten ξ und $\bar{\xi}$ darstellt.

(C) Die im Büschel

$$(1) \quad \lambda_1 a^I + \lambda_2 a^I$$

enthaltenen Punkte \mathcal{C} sind durch

$$(2) \quad \begin{cases} 0 = (\mathcal{C}\mathcal{C}) = \lambda_1 \lambda_1 (a^I a^I) + 2 \lambda_1 \lambda_2 (a^I a^{II}) + \lambda_2 \lambda_2 (a^{II} a^{II}) \\ \quad = \lambda_1 \lambda_1 a^{II} + 2 \lambda_1 \lambda_2 a^{II} + \lambda_2 \lambda_2 a^{II} \\ \quad = \lambda_1^2 a^{II} + 2 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 a^{II} \end{cases}$$

gegeben, wo

$$(3) \quad \alpha^{II} = (\alpha^I \alpha^I), \quad \alpha^{II} = (\alpha^I \alpha^{II}), \quad \alpha^{II} = (\alpha^{II} \alpha^{II}),$$

λ_i skalare Gröfszen bedeuten. Da $\alpha^I \alpha^{II}$ innen berührt.

Wenn $\alpha^I \alpha^{II}$ auszen berührt, so folgt aus (2)

$$(4) \quad 0 = \lambda_1^2 \alpha^{II} - 2 \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2 \alpha^{II}.$$

Aus (2) oder (4) kann man zwei Werte von $\lambda_1 : \lambda_2$ finden, wo α^I und α^{II} die Kugeln R_n bedeuten.

Wenn sich zwei Kreise ξ und η in R_2 im Punkt ξ auszen berühren, so folgt

$$(5) \quad \xi = \xi - \eta.$$

Berühren sich zwei Kreise ξ und η in R_2 im Punkt $\bar{\xi}$ innen, so folgt daraus

$$(6) \quad \bar{\xi} = \xi + \bar{\eta}.$$

Fallen ξ und $\bar{\xi}$ zusammen, so gilt

$$(7) \quad \xi - \eta = \bar{\xi} + \bar{\eta}$$

oder

$$(8) \quad \{\xi - \xi\} + \{\bar{\eta} + \eta\} = 0,$$

(4) ist unsere Bedingung.

(D) Sind

$$(1) \quad {}_{(i)}\xi \quad [i = 1, 2, 3]$$

drei Punkte, welche die äusseren Berührungspunkte der Kreise und ${}_{(i)}\eta$ in R_2 , d. h.

$$(2) \quad {}_{(i)}\xi = {}_{(i)}\xi - {}_{(i)}\eta$$

darstellen, so bildet ${}_{(i)}\xi$ einen Dreieck.

Wenn ein Kreis η , der die Punkte ${}_{(i)}\xi$ hindurchgeht, fest ist, so muss

$$(3) \quad {}_{(1)}\xi {}_{(2)}\xi = \overline{{}_{(2)}\xi {}_{(3)}\xi}$$

oder

$$(4) \quad \overline{(a)x(a)x} = \overline{(a)x(1)x}$$

oder

$$(5) \quad \overline{(a)x(1)x} = \overline{(1)x(a)x}$$

sein, falls der Inhalt von $\triangle_{(1)x(a)x(a)x}$ maximal oder minimal ist, wo

$$(6) \quad \overline{(1)x(a)x} + \overline{(a)x(a)x} + \overline{(a)x(1)x} = \text{const.}$$

gilt⁽¹⁾.

Nach (2) kann man (3), (4), (5) und (6) mit $_{(1)}\xi$ und $_{(1)}\eta$ bezeichnen.

(E) α und $\bar{\alpha}$ seien zwei Kreise in R_2 , so bezeichnet ξ in

$$(1) \quad \xi = (\alpha \alpha) \bar{\alpha} - (\alpha \bar{\alpha}) \alpha$$

einen Berührungspunkt zweier Kreise α und $\bar{\alpha}$; da bestehen

$$(2) \quad (\xi \alpha) = 0,$$

$$(3) \quad (\xi \bar{\alpha}) = 0$$

und

$$(4) \quad (\xi \xi) = 0,$$

wo man sich denken kann, dasz

$$(5) \quad (\alpha \bar{\alpha})^2 = 1$$

gilt.

(F) Wir betrachten zwei Kreise

$$(1) \quad \mathfrak{A} = \alpha + \varepsilon \bar{\alpha}$$

und

$$(2) \quad \mathfrak{A}^* = \alpha^* + \varepsilon \bar{\alpha}^*$$

(1) NAKAJIMA (MATSUMURA, eingeborener NAKAJIMA), S.: Some Inequalities between the Fundamental Quantities of the Triangles, Tôhoku Math. Journ. 25 (1925), S. 115.

wo α , $\bar{\alpha}$, α^* und $\bar{\alpha}^*$ die Kreise in R_2 bezeichnen. Da gilt

$$(3) \quad \epsilon^2 = 1.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(4) \quad \begin{cases} \Re \Re^* = \alpha \alpha^* + \epsilon (\alpha \bar{\alpha}^* + \alpha^* \bar{\alpha}) \\ \quad = \alpha \alpha^*, \end{cases}$$

wo sich α und $\bar{\alpha}^*$ innen, und α^* und $\bar{\alpha}$ auszen berühren. Da gilt

$$\alpha \bar{\alpha}^* + \alpha^* \bar{\alpha} = 0.$$

Aus (4) folgt

$$\cos \phi_1 = \cos \phi_2,$$

wo ϕ_1 der Winkel zwischen \Re und \Re^* , ϕ_2 der zwischen α und α^* ist.

(G) Wir behandeln

$$(1) \quad \chi = (\alpha_3 \bar{\alpha}_2) \alpha_1 + (\alpha_1 \bar{\alpha}_3) \alpha_2 + (\alpha_2 \bar{\alpha}_1) \alpha_3,$$

Aus (1) folgt.

$$(2) \quad \begin{cases} (\chi \bar{\alpha}_3) = (\alpha_3 \bar{\alpha}_2) (\alpha_1 \bar{\alpha}_3) + (\alpha_1 \bar{\alpha}_3) (\alpha_2 \bar{\alpha}_3) + (\alpha_2 \bar{\alpha}_1) (\alpha_3 \bar{\alpha}_3), \\ (\chi \bar{\alpha}_2) = (\alpha_3 \bar{\alpha}_2) (\alpha_1 \bar{\alpha}_2) + (\alpha_1 \bar{\alpha}_3) (\alpha_2 \bar{\alpha}_2) + (\alpha_2 \bar{\alpha}_1) (\alpha_3 \bar{\alpha}_2), \\ (\chi \bar{\alpha}_1) = (\alpha_3 \bar{\alpha}_2) (\alpha_1 \bar{\alpha}_1) + (\alpha_1 \bar{\alpha}_3) (\alpha_2 \bar{\alpha}_1) + (\alpha_2 \bar{\alpha}_1) (\alpha_3 \bar{\alpha}_1), \end{cases}$$

wo α_1 , α_2 , α_3 , $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$, $\bar{\alpha}_3$ und χ die Kugeln in R_3 bedeuten.

Aus (2) kann man die Winkel zwischen χ , $\bar{\alpha}_3$; χ , $\bar{\alpha}_2$ und χ , $\bar{\alpha}_1$ erkennen.

(H) Berühren sich zwei Kreise $\hat{\epsilon}$ und η auszen im Punkt χ , so folgt daraus

$$(1) \quad \chi = \hat{\epsilon} - \eta.$$

Ist $\bar{\chi}$ der innere Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\epsilon}$ und $\bar{\eta}$ in R_2 , so erhalten wir

$$(2) \quad \bar{\chi} = \bar{\hat{\epsilon}} + \bar{\eta},$$

woraus sich ergibt

$$(3) \quad \begin{cases} l^2 = (\xi \bar{\xi}) = (\xi - \eta, \xi + \bar{\eta}) \\ \quad \quad \quad = (\xi \xi) + (\xi \bar{\eta}) - (\xi \eta) - (\eta \bar{\eta}) \\ \quad \quad \quad = (\xi \xi) + (\xi \bar{\eta}), \end{cases}$$

wenn $\bar{\xi}$ auf η liegt, denn

$$(4) \quad 0 = (\eta \bar{\eta}) = (\xi \eta) + (\bar{\eta} \eta)$$

gilt.

Aus (3) kann man wissen, dass die Länge l zwischen zwei Punkten ξ und $\bar{\xi}$ Null gleich ist, wenn

$$(5) \quad \xi \perp \bar{\xi}, \quad \xi \perp \bar{\eta}$$

sind.

Nehmen wir $\bar{\xi}$ auf ξ in (1), so folgt daraus

$$(6) \quad \begin{cases} l^2 = (\xi \bar{\xi}) = (\xi \xi) + (\xi \bar{\eta}) - (\bar{\xi} \eta) - (\eta \bar{\eta}) \\ \quad \quad \quad = -(\bar{\xi} \eta) - (\eta \bar{\eta}), \end{cases}$$

weil

$$(7) \quad (\xi \bar{\xi}) + (\xi \bar{\eta}) = 0$$

gilt.

Aus (6) kann man wissen, dass η nicht $\bar{\eta}$ und $\bar{\xi}$ innen berühren kann, wenn l reell ist.

(I) Wir betrachten

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta, \quad (\hat{\xi} \eta)^2 = 1,$$

wo $\hat{\xi}$ und η die Kugeln in R_4 , ξ der Berührungspunkt zweier Kugeln $\hat{\xi}$ und η ist.

Sind

$$(2) \quad \eta \perp \hat{\xi}, \quad \eta \perp \eta,$$

so folgt daraus

$$(3) \quad (\xi \eta) = 0,$$

d. h. ξ liegt auf η , wo η eine Kugel in R_4 ist.

So erhalten wir den

Satz: *Wenn*

$$\eta \perp \hat{\xi}, \quad \eta \perp \gamma$$

gelten, so liegt ξ auf η .

Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht richtig, d. h. wenn η durch ξ geht, so gelten aber

$$\eta \perp \hat{\xi}, \quad \eta \perp \gamma$$

im allgemeinen nicht.

(J) Ist χ der innere Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\xi}$ und γ in R_2 , so folgt daraus

$$(1) \quad \chi = \hat{\xi} + \gamma.$$

Geht der Kreis η den Punkt χ hindurch, so gilt

$$(2) \quad 0 = (\chi \eta) = (\hat{\xi} \eta) + (\gamma \eta)$$

oder

$$(3) \quad \cos \phi_1 = -\cos \phi_2,$$

wo ϕ_1 der Winkel zwischen $\hat{\xi}$ und η , ϕ_2 der zwischen γ und η ist.

Ist $\bar{\chi}$ der äußere Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\xi}$, $\bar{\gamma}$ in R_2 , so folgt daraus

$$(4) \quad \bar{\chi} = \hat{\xi} - \bar{\gamma},$$

woraus sich ergibt

$$(5) \quad 0 = (\bar{\chi} \eta) = (\hat{\xi} \eta) - (\bar{\gamma} \eta)$$

oder

$$(6) \quad \cos \varphi_1 = \cos \varphi_2,$$

wo φ_1 der Winkel zwischen $\hat{\xi}$ und η , φ_2 der zwischen $\bar{\gamma}$ und η ist. Da geht η den Punkt $\bar{\chi}$ hindurch.

Aus (3) und (6) folgt

$$(7) \quad \cos \phi_1 : \cos \varphi_1 = -\cos \phi_2 : \cos \varphi_2.$$

(K) Im folgenden möchten wir LIES Geometrie behandeln.

ξ in

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - \eta$$

bezeichnet einen Kreis, wo $\hat{\xi}$ und η zueinander senkrechte Kreise bedeuten.

Von

$$(2) \quad \xi = \hat{\xi} + \eta$$

gilt das Gleiche.

Weiter betrachten wir

$$(3) \quad \xi = \hat{\xi} - \eta$$

und

$$(4) \quad \bar{\xi} = \hat{\xi} + \bar{\eta};$$

es folgt daraus

$$(5) \quad (\xi \bar{\xi}) = 0,$$

d. h. zwei Kreise ξ und $\bar{\xi}$ berühren sich, wo

$$(\hat{\xi} \hat{\xi}) = 0, \quad (\hat{\xi} \eta) = 0, \quad (\hat{\xi} \bar{\eta}) = 0, \quad (\eta \bar{\eta}) = 0$$

gelten. Da $\hat{\xi}$, η , ξ , $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ Kreise bedeuten.

(L) Im folgenden möchten wir Studys Übertragungsprinzip erklären.

Wir führen nun zunächst PLÜCKERS Linienkoordinaten ein.

Eine Gerade \mathfrak{A} sei durch zwei auf ihr liegende Punkte ξ und η bestimmt⁽¹⁾.

Wir setzen

$$(1) \quad \mathfrak{A} = \rho(\eta - \xi), \quad \mathfrak{A} = \rho(\xi \times \eta),$$

wo ρ einen von Null verschiedenen und übrigen beliebigen Faktor bedeutet.

Nun setzen wir in (1)

$$(2) \quad \xi = \hat{\xi} - \eta, \quad \eta = \bar{\xi} - \bar{\eta},$$

(1) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I, Dritte Auflage, S. 264.

wo ξ , η , $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Kugeln in R_N bedeuten.

Weiter kann man untersuchen wie in BLASCHKES Buch.

Anstatt (2) kann man

$$(3) \quad \xi = \xi + \eta, \quad \eta = \bar{\xi} + \bar{\eta},$$

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = \{\xi \mp \eta\} \cdot \{1 \pm (\xi \eta)\}, & \eta = \{\xi \mp \bar{\eta}\} \cdot \{1 \pm (\bar{\xi} \bar{\eta})\}, \\ (\xi \eta)^2 = 1, & (\xi \bar{\eta})^2 = 1, \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = \{\xi \mp \varepsilon \eta\} \sqrt{1 \pm 2\varepsilon(\xi \bar{\eta})}, \\ \eta = \{\xi \mp \varepsilon \eta\} \sqrt{1 \pm 2\varepsilon(\xi \eta)} \end{cases}$$

annehmen⁽¹⁾, wo ξ , η , $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Kugeln in R_N sind. Da ist $\varepsilon^2 = 1$.

(M) Im folgenden erläutern wir RUSES Arbeit⁽²⁾.

Eine Gerade p^{AB} wird von zwei Punkten ξ und η auf ihr bestimmt, wo

$$(1) \quad \xi = \xi - \eta, \quad \eta = \xi - \bar{\eta}$$

sind und ξ , η , $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Kugeln in R_N bedeuten.

Weiter kann man untersuchen wie in RUSES Arbeit⁽²⁾.

Anstatt (1) kann man

$$(2) \quad \xi = \xi + \eta, \quad \eta = \xi + \bar{\eta},$$

$$(3) \quad \begin{cases} \xi = \{\xi \mp \eta\} \cdot \{1 \pm (\xi \eta)\}, \\ \eta = \{\xi \mp \bar{\eta}\} \cdot \{1 \pm (\xi \bar{\eta})\}, & (\xi \eta)^2 = 1, \quad (\xi \bar{\eta})^2 = 1, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \xi = \{\xi \mp \varepsilon \eta\} \sqrt{1 \pm 2\varepsilon(\xi \bar{\eta})}, \\ \eta = \{\xi \mp \varepsilon \bar{\eta}\} \sqrt{1 \pm 2\varepsilon(\xi \eta)} \end{cases}$$

annehmen⁽³⁾, wo ξ , η , $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Kugeln in R_N sind.

Da ist $\varepsilon^2 = 1$.

-
- (1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXX, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, No. 9 (1939), S. 362.
 (2) RUSE, H. S.: The CAYLEY-SPOTTISWOODE coordinates of a conic in 3-space, Compositio Mathematica, Vol. 2 (1935), p. 438.
 (3) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, No. 9 (1939), S. 362.

(N) Wir betrachten

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta, \quad (\hat{\xi} \eta) \neq 0,$$

wo $\hat{\xi}$ und η die Punkte in R_N bedeuten, so kann man ξ als Kugel in R_N denken, da aus (1)

$$(2) \quad (\xi \xi) = -2(\hat{\xi} \eta)^2 \neq 0$$

gilt.

(O) Ist ξ der Berührungspunkt zweier Kreise $\hat{\xi}$ und η in R_2 , so folgt daraus

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta.$$

Wenn ein Kreis η zu $\hat{\xi}$ und η senkrecht ist, so gilt

$$(2) \quad (\hat{\xi} \eta) = 0$$

und

$$(3) \quad (\eta \eta) = 0,$$

somit folgt aus (1), (2) und (3)

$$(4) \quad (\xi \eta) = 0;$$

wir erhalten so den

Satz: Sind

$$\eta \perp \hat{\xi}, \quad \eta \perp \eta,$$

so liegt ξ auf η .

Sind

$$(\hat{\xi} \eta) = 1, \quad (\eta \eta) = 1,$$

so folgt daraus

$$(\xi \eta) = 0;$$

daraus ergibt sich der

Satz: Berührt η $\hat{\xi}$ und η , so geht η den Punkt ξ hindurch.

(P) Wir betrachten

$$(1) \quad \bar{x} = \bar{\xi} - (\bar{\xi} \eta) \eta, \quad (\bar{\xi} \eta)^2 = 1,$$

$$(2) \quad \bar{x} = \bar{\xi} - (\bar{\xi} \bar{\eta}) \bar{\eta}, \quad (\bar{\xi} \bar{\eta})^2 = 1,$$

wo $\bar{\xi}$, η , $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Kugeln, x und \bar{x} die Punkte in R_3 sind.

Aus (2) folgt

$$(3) \quad \bar{x} + (\bar{\xi} \bar{\eta}) \bar{\eta} = \bar{\xi}.$$

Liegt x auf $\bar{\xi}$, so kommt aus (1) und (3)

$$(4) \quad (\bar{\xi} \bar{x}) - (\bar{\xi} \eta) (\bar{x} \eta) + (\bar{\xi} \bar{\eta}) (\bar{\xi} \bar{\eta}) - (\bar{\xi} \eta) (\bar{\xi} \bar{\eta}) (\eta \bar{\eta}) = 0.$$

Ist \bar{x} der Berührungspunkt zweier Kreise $\bar{\xi}$ und η , so folgt aus (4)

$$(5) \quad (\bar{\xi} \bar{\eta}) (\bar{\xi} \bar{\eta}) = (\bar{\xi} \eta) (\bar{\xi} \bar{\eta}) (\eta \bar{\eta})$$

oder

$$(6) \quad (\bar{\xi} \bar{\eta})^2 = (\eta \bar{\eta})^2$$

d. h.

$$(7) \quad \cos \phi = \cos \psi$$

wo ϕ der Winkel zwischen $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$, ψ der zwischen η und $\bar{\eta}$ ist.

Ist x der Berührungspunkt zweier Kreise $\bar{\xi}$ und η in R_2 , so ergibt sich daraus

$$(8) \quad x = \bar{\xi} - (\bar{\xi} \eta) \eta, \quad (\bar{\xi} \eta)^2 = 1.$$

Wir betrachten einen Kreisbüschel ζ , der im Punkt x den Kreis $\bar{\xi}$ berührt; es gilt

$$(9) \quad \zeta = \bar{\xi} + \lambda x.$$

Aus (8) und (9) ergibt sich

$$(10) \quad \begin{cases} \zeta = \bar{\xi} + \lambda x \\ = \bar{\xi} + \lambda \{ \bar{\xi} - (\bar{\xi} \eta) \eta \} \\ = \bar{\xi} + \lambda \bar{\xi} - \lambda (\bar{\xi} \eta) \eta, \end{cases}$$

wo λ der Parameter ist.

(Q) Wir betrachten

$$(1) \quad \begin{cases} \mathfrak{x} = \xi - (\xi \eta) \eta, & (\xi \eta)^2 = 1, \\ \mathfrak{y} = \eta - (\eta \zeta) \zeta, & (\eta \zeta)^2 = 1, \\ \mathfrak{z} = \zeta - (\zeta \mathfrak{w}) \mathfrak{w}, & (\zeta \mathfrak{w})^2 = 1, \end{cases}$$

wo $\xi, \eta, \zeta, \mathfrak{w}$ die Kugeln und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Punkte in R_2 bedeuten.

Geht der Kreis $\bar{\mathfrak{y}}$ die Punkte $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ und \mathfrak{z} hindurch, so folgt daraus

$$(2) \quad (\xi \bar{\mathfrak{y}})^2 = (\bar{\eta} \mathfrak{y})^2, \quad (\eta \bar{\mathfrak{y}})^2 = (\zeta \bar{\mathfrak{y}})^2, \quad (\zeta \bar{\mathfrak{y}})^2 = (\mathfrak{w} \bar{\mathfrak{y}})^2$$

oder

$$(3) \quad (\xi \bar{\mathfrak{y}})^2 = (\eta \bar{\mathfrak{y}})^2 = (\zeta \bar{\mathfrak{y}})^2 = (\mathfrak{w} \bar{\mathfrak{y}})^2$$

oder

$$(4) \quad \cos^2 \phi_1 = \cos^2 \phi_2 = \cos^2 \phi_3 = \cos^2 \phi_4$$

wo ϕ_1 der Winkel zwischen ξ und $\bar{\mathfrak{y}}$, ϕ_2 der zwischen η und $\bar{\mathfrak{y}}$, ϕ_3 der zwischen ζ und $\bar{\mathfrak{y}}$, ϕ_4 der zwischen \mathfrak{w} und $\bar{\mathfrak{y}}$ ist.

(R) Wir betrachten

$${}_{(i)}\mathfrak{x} = {}_{(i)}\xi - ({}_{(i)}\xi {}_{(i)}\eta) {}_{(i)}\eta, \quad ({}_{(i)}\xi {}_{(i)}\eta)^2 = 1,$$

wo ${}_{(i)}\xi, {}_{(i)}\eta$ die Kugeln in R_n und ${}_{(i)}\mathfrak{x}$ die Punkte sind.

So folgt daraus der

Satz: *Fällt das arithmetische Mittel der*

$${}_{(i)}\xi, \quad [i = 1, 2, 3, \dots, n]$$

zum Ursprung des Koordinaten, so ergibt sich daraus

$$\frac{\sum {}_{(i)}\xi}{n} = \sum \frac{({}_{(i)}\xi {}_{(i)}\eta)}{n} {}_{(i)}\eta$$

oder

$$\sum {}_{(i)}\xi = \sum ({}_{(i)}\xi {}_{(i)}\eta) {}_{(i)}\eta.$$

(S) Wir betrachten

$${}_{(1)}\mathfrak{x} = {}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi {}_{(1)}\eta) {}_{(1)}\eta, \quad ({}_{(1)}\xi {}_{(1)}\eta)^2 = 1,$$

$${}_{(2)}\mathfrak{x} = {}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi {}_{(2)}\eta) {}_{(2)}\eta, \quad ({}_{(2)}\xi {}_{(2)}\eta)^2 = 1,$$

so folgt daraus

$$\left\{ \begin{aligned} ({}_{(1)}\xi \, {}_{(2)}\xi) &= ({}_{(1)}\hat{\xi} \, {}_{(2)}\hat{\xi}) - ({}_{(1)}\hat{\xi} \, {}_{(1)}\eta) ({}_{(2)}\hat{\xi} \, {}_{(1)}\eta) - ({}_{(2)}\hat{\xi} \, {}_{(2)}\eta) ({}_{(1)}\hat{\xi} \, {}_{(2)}\eta) \\ &\quad + ({}_{(1)}\hat{\xi} \, {}_{(1)}\eta) ({}_{(2)}\hat{\xi} \, {}_{(2)}\eta) ({}_{(1)}\eta \, {}_{(2)}\eta) \\ &= 1 - ({}_{(1)}\hat{\xi} \, {}_{(1)}\eta) ({}_{(2)}\hat{\xi} \, {}_{(1)}\eta) - ({}_{(2)}\hat{\xi} \, {}_{(2)}\eta) ({}_{(1)}\hat{\xi} \, {}_{(2)}\eta) \\ &\quad + ({}_{(1)}\hat{\xi} \, {}_{(1)}\eta) ({}_{(2)}\hat{\xi} \, {}_{(2)}\eta), \end{aligned} \right.$$

wenn ${}_{(1)}\hat{\xi}$ und ${}_{(2)}\hat{\xi} \, {}_{(1)}\eta$ bzw. ${}_{(2)}\eta$ berühren.

(T) Zwei Kreise $\hat{\xi}$ und η in R_2 berühren sich in dem Punkt ξ , so folgt daraus

$$(1) \quad \xi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} \, \eta) \, \eta, \quad (\hat{\xi} \, \eta)^2 = 1.$$

Ist η der Kreis in R_2 , der den Punkt ξ hindurchgeht, so kommt daraus

$$(2) \quad (\hat{\xi} \, \eta)^2 = (\eta \, \eta)^2.$$

Ist ν der Schnittpunkt zweier Kreise η und η , so haben wir

$$(3) \quad (\nu \, \eta) = 0,$$

$$(4) \quad (\nu \, \eta) = 0.$$

Ist l die Länge zwischen ν und ξ , so bekommen wir

$$(5) \quad l^2 = (\nu \, \hat{\xi})^2.$$

Weiter kann man die Länge zwischen zwei Punkten ξ und $\bar{\nu}$, die der Schnittpunkt zweier Kreise $\hat{\xi}$ und η ist, finden.

(U) Es liegen drei Punkte

$${}_{(i)}\xi \quad [i = 1, 2, 3]$$

auf einer Gerade, wo

$$\left\{ \begin{aligned} {}_{(1)}\xi &= {}_{(1)}\hat{\xi} - ({}_{(1)}\hat{\xi} \, {}_{(1)}\eta) {}_{(1)}\eta, & ({}_{(1)}\hat{\xi} \, {}_{(1)}\eta)^2 &= 1, \\ {}_{(2)}\xi &= {}_{(2)}\hat{\xi} - ({}_{(2)}\hat{\xi} \, {}_{(2)}\eta) {}_{(2)}\eta, & ({}_{(2)}\hat{\xi} \, {}_{(2)}\eta)^2 &= 1, \\ {}_{(3)}\xi &= {}_{(3)}\hat{\xi} - ({}_{(3)}\hat{\xi} \, {}_{(3)}\eta) {}_{(3)}\eta, & ({}_{(3)}\hat{\xi} \, {}_{(3)}\eta)^2 &= 1, \end{aligned} \right.$$

so folgt daraus

$$\lambda \, {}_{(1)}\xi + \mu \, {}_{(2)}\xi = (\lambda + \mu) {}_{(3)}\xi$$

oder

$$\begin{cases} \lambda \{({}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi {}_{(1)}\eta) {}_{(1)}\eta\} + \mu \{({}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi {}_{(2)}\eta) {}_{(2)}\eta\} \\ = (\lambda + \mu) \{({}_{(3)}\xi - ({}_{(3)}\xi {}_{(3)}\eta) {}_{(3)}\eta\} \end{cases}$$

wo λ und μ die skalaren Gröößen sind.

(V) Wir betrachten

$$\begin{cases} ({}_{(1)}\xi = {}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi {}_{(1)}\eta) {}_{(1)}\eta, & ({}_{(1)}\xi {}_{(1)}\eta)^2 = 1, \\ ({}_{(2)}\xi = {}_{(3)}\xi - ({}_{(2)}\xi {}_{(2)}\eta) {}_{(2)}\eta, & ({}_{(2)}\xi {}_{(2)}\eta)^2 = 1, \end{cases}$$

so haben wir

$$({}_{(1)}\xi {}_{(2)}\eta) = -1 + ({}_{(1)}\xi {}_{(1)}\eta) ({}_{(1)}\xi {}_{(2)}\eta) ({}_{(1)}\eta {}_{(2)}\eta).$$

Ist $({}_{(1)}\xi {}_{(1)}\eta) ({}_{(1)}\xi {}_{(2)}\eta) ({}_{(1)}\eta {}_{(2)}\eta)$ maximal, so ist $\sqrt{({}_{(1)}\xi {}_{(2)}\eta)}$ der Diameter des Kreises ${}_{(1)}\xi$, da ${}_{(1)}\xi$, ${}_{(2)}\eta$ die Kreise in R_2 und ${}_{(1)}\xi$ die Punkte sind.

(W) Ist ${}_{(i)}\xi$ der Berührungspunkt zweier Kreise ${}_{(i)}\xi$ und ${}_{(i+1)}\xi$, so haben wir

$$(1) \quad \begin{cases} ({}_{(1)}\xi = {}_{(1)}\xi - ({}_{(1)}\xi {}_{(2)}\xi) {}_{(2)}\xi, & {}_{(2)}\xi = {}_{(2)}\xi - ({}_{(2)}\xi {}_{(3)}\xi) {}_{(3)}\xi, \\ ({}_{(3)}\xi = {}_{(3)}\xi - ({}_{(3)}\xi {}_{(4)}\xi) {}_{(4)}\xi, & {}_{(4)}\xi = {}_{(4)}\xi - ({}_{(4)}\xi {}_{(1)}\xi) {}_{(1)}\xi, \end{cases}$$

wo

$$i = 1, 2, 3, 4, \quad i = 5 = 1;$$

daraus ergibt sich

$$(2) \quad \begin{cases} ({}_{(1)}l^2 = ({}_{(1)}\xi {}_{(3)}\xi) = ({}_{(1)}\xi {}_{(3)}\xi) - ({}_{(1)}\xi {}_{(2)}\xi) ({}_{(2)}\xi {}_{(3)}\xi) \\ \quad - ({}_{(3)}\xi {}_{(4)}\xi) ({}_{(1)}\xi {}_{(4)}\xi), \\ ({}_{(2)}l^2 = ({}_{(2)}\xi {}_{(4)}\xi) = ({}_{(2)}\xi {}_{(4)}\xi) - ({}_{(2)}\xi {}_{(3)}\xi) ({}_{(3)}\xi {}_{(4)}\xi) \\ \quad - ({}_{(4)}\xi {}_{(1)}\xi) ({}_{(1)}\xi {}_{(3)}\xi), \end{cases}$$

wo ${}_{(i)}l$ die Länge zwischen ${}_{(1)}\xi$ und ${}_{(3)}\xi$, ${}_{(2)}l$ die zwischen ${}_{(2)}\xi$ und ${}_{(4)}\xi$ bedeutet.

Wenn ${}_{(1)}l^2 = {}_{(2)}l^2$, so

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & ((1)\hat{\zeta} (3)\hat{\zeta}) - ((1)\hat{\zeta} (2)\hat{\zeta}) ((2)\hat{\zeta} (3)\hat{\zeta}) - ((3)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) ((1)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) \\ & = ((2)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) - ((2)\hat{\zeta} (3)\hat{\zeta}) ((3)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) - ((4)\hat{\zeta} (1)\hat{\zeta}) ((1)\hat{\zeta} (2)\hat{\zeta}). \end{aligned} \right.$$

Wenn

$$(4) \quad ((1)\mathfrak{L} (2)\mathfrak{L}) = ((2)\mathfrak{L} (3)\mathfrak{L}) = ((3)\mathfrak{L} (4)\mathfrak{L}) = ((4)\mathfrak{L} (1)\mathfrak{L}),$$

so

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & ((1)\hat{\zeta} (2)\hat{\zeta}) - ((1)\hat{\zeta} (2)\hat{\zeta}) - ((2)\hat{\zeta} (3)\hat{\zeta}) ((1)\hat{\zeta} (3)\hat{\zeta}) - ((1)\hat{\zeta} (2)\hat{\zeta}) ((2)\hat{\zeta} (3)\hat{\zeta}) ((2)\hat{\zeta} (3)\hat{\zeta}) \\ & = ((2)\hat{\zeta} (3)\hat{\zeta}) - ((2)\hat{\zeta} (3)\hat{\zeta}) - ((3)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) ((2)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) - ((2)\hat{\zeta} (3)\hat{\zeta}) ((3)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) ((3)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) \\ & = ((3)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) - ((3)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) - ((4)\hat{\zeta} (1)\hat{\zeta}) ((3)\hat{\zeta} (1)\hat{\zeta}) - ((3)\hat{\zeta} (4)\hat{\zeta}) ((4)\hat{\zeta} (1)\hat{\zeta}) ((4)\hat{\zeta} (1)\hat{\zeta}) \\ & = ((4)\hat{\zeta} (1)\hat{\zeta}) - ((4)\hat{\zeta} (1)\hat{\zeta}) - ((1)\hat{\zeta} (2)\hat{\zeta}) ((4)\hat{\zeta} (2)\hat{\zeta}) - ((4)\hat{\zeta} (1)\hat{\zeta}) ((1)\hat{\zeta} (2)\hat{\zeta}) ((1)\hat{\zeta} (2)\hat{\zeta}). \end{aligned} \right.$$

(5) ist die Bedingung dafür, dass $\sqrt{\quad} ((1)\mathfrak{L} (2)\mathfrak{L} (3)\mathfrak{L} (4)\mathfrak{L})$ rohnbisch ist.

Gelten (3) und (5) in $\sqrt{\quad} ((1)\mathfrak{L} (2)\mathfrak{L} (3)\mathfrak{L} (4)\mathfrak{L})$, so muss $((1)\mathfrak{L} (2)\mathfrak{L} (3)\mathfrak{L} (4)\mathfrak{L})$ ein Quadrat sein.

Weiter kann man wissen, dass

$$\text{der Inhalt} = \sqrt{((1)\mathfrak{L} (3)\mathfrak{L}) ((2)\mathfrak{L} (4)\mathfrak{L})}$$

gilt.

(X) Der Kreis γ berührt die Kreise $\hat{\zeta}$ und ζ im Punkt

$$_{(i)}\mathfrak{L} \quad [i = 1, 2]:$$

daraus folgen

$$\left\{ \begin{aligned} & ((1)\mathfrak{L} = \hat{\zeta} - (\hat{\zeta} \gamma) \gamma, \quad (\hat{\zeta} \gamma)^2 = 1, \\ & ((2)\mathfrak{L} = \gamma - (\gamma \zeta) \zeta, \quad (\gamma \zeta)^2 = 1. \end{aligned} \right.$$

Ist η der Kreis, der die Punkte $_{(i)}\gamma$ hindurchgeht, so folgt

$$(1) \quad ((1)\mathfrak{L} \eta) = ((2)\mathfrak{L} \eta) = 0,$$

$$(2) \quad (p \eta) = 0,$$

wenn η den Punkt p hindurchgeht.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \quad (\xi \eta)^2 = (\eta \eta)^2,$$

$$(4) \quad (\eta \eta)^2 = (\zeta \eta)^2,$$

$$(5) \quad (p \eta) = 0.$$

Mit (3) kann man η bestimmen.

Wenn η den Kreis ξ berührt, so folgt $(\xi \eta) = 1$ daraus anstatt (5).

(Y) Ist $_{(i)}\xi$ der Berührungspunkt zweier Kreise $_{(i)}\xi$ und $_{(i+1)}\xi$ in R_2 ; so folgen daraus

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} _{(1)}\xi = _{(1)}\xi - (_{(1)}\xi \text{ } _{(2)}\xi) \text{ } _{(2)}\xi, & (_{(1)}\xi \text{ } _{(2)}\xi)^2 = 1, \\ _{(2)}\xi = _{(2)}\xi - (_{(2)}\xi \text{ } _{(3)}\xi) \text{ } _{(3)}\xi, & (_{(2)}\xi \text{ } _{(3)}\xi)^2 = 1, \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \\ _{(n)}\xi = _{(n)}\xi - (_{(n)}\xi \text{ } _{(1)}\xi) \text{ } _{(1)}\xi, & (_{(n)}\xi \text{ } _{(1)}\xi)^2 = 1, \end{array} \right.$$

wo

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad i = (n+1) = 1;$$

daraus ergibt sich

$$(2) \quad (_{(i)}\xi \text{ } _{(i+1)}\xi)^2 = (_{(i+1)}\xi \text{ } _{(i)}\xi)^2, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

wenn die Punkte

$$_{(i)}\xi \quad [i = 1, 2, \dots, n]$$

auf einer Kurve ξ in R_2 liegen.

(Z) Es seien

$$(1) \quad _{(i)}\xi = _{(i)}\xi - (_{(i)}\xi \text{ } _{(i)}\eta) \text{ } _{(i)}\eta, \quad (_{(i)}\xi \text{ } _{(i)}\eta)^2 = 1,$$

wo $_{(i)}\xi$, $_{(i)}\eta$ die Kreise in R_2 und $_{(i)}\xi$ die Punkte in R_2 bedeuten.

Wenn

$$(2) \quad (_{(1)}\xi \text{ } _{(2)}\xi)^2 = (_{(2)}\xi \text{ } _{(1)}\xi)^2,$$

so

$$(3) \quad \begin{cases} ({}_{(1)}\gamma \, {}_{(3)}\hat{\epsilon})^2 + ({}_{(1)}\hat{\epsilon} \, {}_{(3)}\gamma)^2 + 2 ({}_{(1)}\hat{\epsilon} \, {}_{(1)}\gamma)({}_{(3)}\hat{\epsilon} \, {}_{(3)}\gamma)({}_{(1)}\gamma \, {}_{(3)}\hat{\epsilon})({}_{(3)}\gamma \, {}_{(1)}\hat{\epsilon}) \\ = ({}_{(2)}\gamma \, {}_{(3)}\hat{\epsilon})^2 + ({}_{(2)}\hat{\epsilon} \, {}_{(3)}\gamma)^2 + 2 ({}_{(2)}\hat{\epsilon} \, {}_{(2)}\gamma)({}_{(3)}\hat{\epsilon} \, {}_{(3)}\gamma)({}_{(2)}\gamma \, {}_{(3)}\hat{\epsilon})({}_{(3)}\gamma \, {}_{(2)}\hat{\epsilon}) \end{cases}$$

wenn

$$(4) \quad {}_{(1)}\hat{\epsilon} \perp {}_{(3)}\hat{\epsilon}, \quad {}_{(2)}\hat{\epsilon} \perp {}_{(3)}\hat{\epsilon}$$

gelten.

(3) ist die Bedingung dafür, dass der Punkt ${}_{(3)}x$ auf der Geraden liegt, die zu der Geraden $\{{}_{(1)}x, {}_{(2)}x\}$ senkrecht ist, den Mittelpunkt zwischen zwei Punkten ${}_{(1)}x$ und ${}_{(2)}x$ hindurchgeht und die zwei Punkte ${}_{(1)}x$ und ${}_{(2)}x$ hindurchgehende Gerade darstellt.

N. B. Wir betrachten

$$(A) \quad x = \{\hat{\epsilon} - \eta\} \cdot \{1 + (\hat{\epsilon} \eta)\},$$

$$(B) \quad x = \{\hat{\epsilon} + \eta\} \cdot \{1 - (\hat{\epsilon} \eta)\},$$

$$(C) \quad x = \{\hat{\epsilon} + \varepsilon \eta\} \cdot \sqrt[{}_{(+)}]{1 - 2 \varepsilon \overline{(\hat{\epsilon} \eta)}}$$

und

$$(D) \quad x = \{\hat{\epsilon} - \varepsilon \eta\} \cdot \sqrt[{}_{(+)}]{1 + 2 \varepsilon \overline{(\hat{\epsilon} \eta)}},$$

wo $\hat{\epsilon}$ und η die Kreise in R_2 bedeuten⁽¹⁾. Da $(\hat{\epsilon} \eta)^2 = 1$ gilt, wo ε die Einheit von dualen Zahlen ($\varepsilon^2 = 0$) ist.

Wenn man (A), (B), (C) oder (D) anstatt der oben erwähnten

$$x = \hat{\epsilon} - (\hat{\epsilon} \eta) \eta, \quad (\hat{\epsilon} \eta)^2 = 1,$$

nimmt, so kann man ebenso gut wie oben untersuchen.

Sind x und y zwei Berührungspunkte zweier Kreise $\hat{\epsilon}$, η bzw. γ , so kann man nach (A) setzen:

$$(1) \quad x = \{\hat{\epsilon} - \eta\} \cdot \{1 + (\hat{\epsilon} \eta)\},$$

$$(2) \quad y = \{\eta - \zeta\} \cdot \{1 + (\eta \zeta)\}.$$

Geht ein Kreis \mathfrak{R} durch zwei Punkte x und y hindurch, so gelten

$$(3) \quad 0 = (\mathfrak{R} x) = \{(\mathfrak{R} \hat{\epsilon}) - (\mathfrak{R} \eta)\} \cdot \{1 + (\hat{\epsilon} \eta)\}$$

(1) MATUMURA¹, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI, S. 89.

$$(4) \quad 0 = (\Re \eta) = \{(\Re \eta) - (\Re \zeta)\} \cdot \{1 + (\eta \zeta)\}.$$

Weiter geht \Re den Punkt η hindurch, so folgt

$$(5) \quad (\Re \eta) = 0.$$

Aus (3), (4) und (5) kann man \Re bestimmen.

Berühren sich die Kreise ξ , η , ζ und ν in den Punkten ξ , η und δ , so gelten nach (A):

$$(6) \quad \xi = \{\xi - \eta\} \cdot \{1 + (\xi \eta)\},$$

$$(7) \quad \eta = \{\eta - \zeta\} \cdot \{1 + (\eta \zeta)\},$$

$$(8) \quad \delta = \{\zeta - \nu\} \cdot \{1 + (\zeta \nu)\}.$$

Geht ein Kreis \Re drei Punkte ξ , η und δ hindurch, so folgen daraus

$$(9) \quad 0 = (\Re \xi) = \{(\Re \xi) - (\Re \eta)\} \cdot \{1 + (\xi \eta)\},$$

$$(10) \quad 0 = (\Re \eta) = \{(\Re \eta) - (\Re \zeta)\} \cdot \{1 + (\eta \zeta)\},$$

$$(11) \quad 0 = (\Re \delta) = \{(\Re \zeta) - (\Re \nu)\} \cdot \{1 + (\zeta \nu)\}.$$

Aus (9), (10) und (11) kann man \Re finden.

Von (B), (C) und (D) gilt das Gleiche.

(2)

Im folgenden möchten wir die verschiedenen Sätze über Kreise und Kugeln erklären.

(A) Eine lineare homogene Transformation der n homogenen Kugeln ξ_i in R_N sei gegeben durch die n Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} \xi_1 = e_1^1 \bar{\xi}_1 + e_1^2 \bar{\xi}_2 + \dots + e_1^n \bar{\xi}_n, \\ \xi_2 = e_2^1 \bar{\xi}_1 + e_2^2 \bar{\xi}_2 + \dots + e_2^n \bar{\xi}_n, \\ \dots \dots \dots \\ \xi_n = e_n^1 \bar{\xi}_1 + e_n^2 \bar{\xi}_2 + \dots + e_n^n \bar{\xi}_n, \end{cases}$$

die wir zusammenfassend wie folgt schreiben :

$$(2) \quad x_i = \sum_k e_i^k \bar{x}_k.$$

Wir sprechen kurz von der Transformation

$$x \rightarrow \bar{x}.$$

Die n^2 Größen e_i^k sind die Transformations-Koeffizienten, die Matrix $||e_i^k||$ ist die Transformationsmatrix und ihre Determinante

$$(3) \quad \Delta = |e_i^k|$$

ist die Transformationsdeterminante; wir setzen stets

$$\Delta \neq 0$$

voraus.

Ist

$$\Delta = 1,$$

so heisst die Transformation „*unimodular*“.

Ist

$$(4) \quad e_i^k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k, \end{cases}$$

so erhalten wir die „*identische*“ Transformation

$$x_i = \bar{x}_i.$$

Etwa allgemeiner können wir dann statt (2) schreiben

$$(5) \quad \rho x_i = \sum_k e_i^k \bar{x}_k,$$

wo $\rho \neq 0$ eine beliebige Zahl ist.

Wenn ξ und $\bar{\xi}$ zwei Kugeln analog (1) sind und die Beziehungen

$$\xi_i = \sum_k e_i^k \bar{\xi}_k$$

bestehen, so sagt man, die ξ_i werden zu den $\bar{\xi}_i$ kogredient transformiert oder die beiden Transformationen

$$x \rightarrow \bar{x} \quad \text{und} \quad \xi \rightarrow \bar{\xi}$$

seien zueinander kogredient.

Da $\Delta \neq 0$ ist, können wir (2) nach \bar{x}_i auflösen.

Wenn E_i^k der Minor von e_i^k in Δ ist, so gibt (2), wenn wir mit E_i^k multiplizieren und über i summieren:

$$\sum_i E_i^k \bar{x}_i = \sum_k \sum_i e_i^k E_i^k \bar{x}_k = \sum_k \delta_{kk} \Delta \bar{x}_k = \Delta \bar{x}_k,$$

also

$$(6) \quad \bar{x}_k = \sum_i \frac{E_i^k}{\Delta} \bar{x}_i.$$

Diese Transformation $\bar{x} \rightarrow x$ ist die „inverse“ von (1).

Ihre Determinante wird

$$\left| \frac{E_i^k}{\Delta} \right| = \frac{1}{\Delta^n} |E_i^k| = \frac{\Delta^{n-1}}{\Delta^n} = \frac{1}{\Delta} \neq 0.$$

Sind

$$(7) \quad T_e \dots \bar{x}_i = \sum e_i^k \bar{x}_k \quad \text{und} \quad T_f \dots \bar{x}_k = \sum_j f_k^j \bar{x}_j$$

zwei Transformationen $\bar{x} \rightarrow x$ und $\bar{x} \rightarrow \bar{x}$, so können wir daraus $\bar{x} \rightarrow \bar{x}$ bilden:

$$(8) \quad T_e T_f \dots \bar{x}_i = \sum_k \sum_j e_i^k f_k^j \bar{x}_j.$$

Diese Transformation

$$(9) \quad T_g = T_e T_f$$

heißt „aus T_e und T_f zusammengesetzt“ und zwar in dieser Reihenfolge geschrieben.

T_g wird auch als „Produkt“ von T_e und T_f bezeichnet; ihre Transformationskoeffizienten g_i^j entnehmen wir (8):

$$(10) \quad g_i^j = \sum_k e_i^k f_k^j.$$

$T_f T_e$ ist im allgemeinen von $T_e T_f$ verschieden.

Die Transformationsdeterminante Δ_g von T_g ist das Produkt $\Delta_e \Delta_f$.

Nehmen wir für T_f die durch (6) gegebene Inverse von T_e , so gibt diese $T_e T_f = T_g =$ der identischen Transformation.

Demgemäß schreibt man T_e^{-1} für die Inverse von T_e .

Alle ∞^{n^2-1} linear-homogenen Transformationen (5) bilden die (n^2-1) -gliedrige „allgemeine projektive Gruppe“ des Gebietes n^{tr} Stufen. Das ist ein System von Operationen mit folgenden 4 Eigenschaften: 1. $T_e T_f = T_g$; 2. $T_e (T_f T_g) = (T_e T_f) T_g$, assoziatives Gesetz, folgt aus (10); 3. $T_e T_0 = T_0 T_e = T_e$, Existenz der identischen Transformation; 4. $T_e T_e^{-1} = T_e^{-1} T_e = T_0$, d. h. zu jeder T_e gibt es eine einzige Inverse⁽¹⁾.

(B) Geben wir durch eine Gerade \mathfrak{z} drei Ebenen

$$(1) \quad \mathfrak{x}^\alpha \quad [\alpha = I, II, III]$$

und auf einer weiteren Gerade \mathfrak{z}^* ebenfalls drei Ebenen $\mathfrak{x}^{\alpha*}$ vor, so gibt es genau vier Möbiustransformationen des Raumes, die die Figur $\{\mathfrak{z} \mathfrak{x}^\alpha\}$ überführen in die Figur $\{\mathfrak{z}^* \mathfrak{x}^{\alpha*}\}$.

Wir können im folgenden durch eine Ähnlichkeit \mathfrak{z} in \mathfrak{z}^* überführen, dann gehen die \mathfrak{x}^α dabei in drei Ebenen $\bar{\mathfrak{x}}^\alpha$ durch \mathfrak{z} über.

Dann kann man auf zwei verschiedene Weisen durch eine Kreisverwandtschaft auf \mathfrak{z} die $\bar{\mathfrak{x}}^\alpha$ in die $\mathfrak{x}^{\alpha*}$ überführen.

Zu jeder solchen Kreisverwandtschaft haben wir dann nach dem eben Ausgeführten noch zwei zugehörigen Transformationen des Raumes.

Diese vier Abbildungen sind nun auch die einzig möglichen.

Denn die Figur

$$\{\mathfrak{z}^* \mathfrak{x}^{\alpha*}\}$$

kann, wenn man die Identität mitrechnet, nur durch vier Transformationen in sich übergeführt werden.

Zunächst gibt es zu der Identität durch die Gerade \mathfrak{x}^* zwei Kreisverwandtschaften, einmal die Identität des Raumes, dann die Inversion an \mathfrak{z}^* , die alle Punkte von \mathfrak{z}^* in Ruhe läßt.

Dann gibt es die Inversion auf \mathfrak{z}^* , die die Gerade durch die Ebene \mathfrak{x}^* durch \mathfrak{z} punktweise in Ruhe läßt, und zu dieser gibt es zwei Transformationen im Raum, von denen man wieder die eine aus der andern erhält, indem man noch die Inversion an \mathfrak{z}^* ausführt.

(1) WEIZENBÖCK, R.: Invariantentheorie, 1923, S. 6.

Da die Figur

$$\{\xi^{**}\},$$

von 10 Bestimmungsstücken abhängt, ist unsere Gruppe der Abbildungen von Möbius im Raum $10 = \text{Glieder}$.

(C) Die Mittelfläche zweier Kugeln $p(u, v)$ und $q(u, v)$ ist durch

$$(1) \quad \mathfrak{X}(u, v) = \frac{1}{2} [p(u, v) + q(u, v)]$$

erklärt.

Setzen wir

$$(2) \quad \mathfrak{X} = \hat{\xi} + (\hat{\xi} \eta) \gamma, \quad (\hat{\xi} \eta)^2 = 1$$

in (1) ein, so folgt aus (1) und (2)

$$(3) \quad \hat{\xi} + (\hat{\xi} \eta) \gamma = \frac{1}{2} [p + q],$$

wo $\hat{\xi}$ und γ zwei Berührungskugeln bedeuten.

Da u und v zwei Parameter sind.

Wenn \mathfrak{X} regulär ist, solange die Vektoren \mathfrak{X}_u , \mathfrak{X}_v linear unabhängig sind und

$$(4) \quad a \mathfrak{X}_u + b \mathfrak{X}_v = 0$$

bedeutet, so gelten

$$(5) \quad a p_u + b p_v = -(a q_u + b q_v)$$

oder

$$(6) \quad a \xi_u + b \eta_v = -\{a(\hat{\xi} \eta) \gamma_u + b(\hat{\xi} \eta) \gamma_v\};$$

dies ist bei allgemeiner Lage von p und q oder $\hat{\xi}$ und γ nur möglich, wenn $a=b=0$ ist.

(D) Wir betrachten

$$(1) \quad \eta_u = \alpha \xi + \gamma \xi_u$$

und

$$(2) \quad \eta_v = \bar{\alpha} \xi + \bar{\gamma} \xi_v,$$

so folgt daraus

$$(3) \quad (\eta_u, \eta_v) = a \bar{a} = \text{const.},$$

wo χ und η die Kugeln in R_N bedeuten und $a, \bar{a}, \gamma, \bar{\gamma}$ die Konstanten sind. Da u und v die Konstanten bedeuten.

Aus (3) kann man wissen, dass

$$(4) \quad \cos \phi = \text{const.}$$

gilt, wo ϕ der Winkel zwischen η_u und η_v ist.

(E) Wie in KÖNIGS Arbeit⁽¹⁾ sei durch den Vektor

$$(1) \quad \chi_i(u^1, u^2, \dots, u^m)$$

eine m -parametrische Schar gerichteter Kugeln mit den Mittelpunkten

$$(2) \quad x_i(u^1, u^2, \dots, u^m), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

und dem Halbmesser

$$(3) \quad x_{m+1}(u^1, u^2, \dots, u^m)$$

gegeben.

In einem R_{m+1} entspricht diesem Kugelsystem durch isotrope Projektion eine Fläche, als deren Maszbestimmung $d\chi^2$ wir das als positiv vorausgesetzte Quadrat der Tangentenentfernung vor zwei benachbarten Kugeln wählen:

$$(4) \quad \begin{cases} d\chi^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_m^2 - dx_{m+1}^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^m g_{\mu\nu} du_\mu du_\nu, \\ g_{\mu\nu} = \frac{\partial \chi}{\partial u_\mu} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu}. \end{cases}$$

Mithin ist

$$(5) \quad G = |g_{\mu\nu}| > 0.$$

Den Flächeninhalt von \mathcal{Q} gibt

$$d\mathcal{Q} = \sqrt{G} du^1 du^2 \dots du^m.$$

Wir betrachten (1) als eine Mannigfaltigkeit V_m im euklidischen R_n der Dimension m , in der Umgebung einer Stelle, wo χ eine analytische Funktion ist.

(1) KÖNIG, K.: L-Minimalflächen, Mitteilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg. Bd. VI, Heft 1-9, 1921-1930, S. 190.

tische Funktion der komplexen Veränderlichen

$$u^1, u^2, \dots, u^m$$

ist.

Der Voraussetzung nach ist m der bewegungs- und parameter-invariante Rang der Matrix

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial u^1}, \frac{\partial x}{\partial u^2}, \dots, \frac{\partial x}{\partial u^m} \right\|$$

r sei der ebenfalls bewegungs- und parameterinvariante Rang der Matrix $\|g_{\mu\nu}\|$.

Mannigfaltigkeiten mit $r < m$ pflegt man als isotrop zu bezeichnen.

Insbesondere haben wir V_m mit $r = 0$ wegen $dx^2 = 0$ ametrisch genannt.

Weiter kann man untersuchen wie in LENSES Arbeit⁽¹⁾.

(F) Es seien zwei Paare von n Kugeln

$$1) \quad {}_{(i)}x, {}_{(i)}y \quad [i = 1, 2, \dots, n]$$

in R_N gegeben, so bezeichnet

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{x} = \{{}_{(1)}x + {}_{(2)}x + \dots + {}_{(n)}x\}/n, \\ \bar{y} = \{{}_{(1)}y + {}_{(2)}y + \dots + {}_{(n)}y\}/n \end{cases}$$

zwei Kugeln in R_N und

$$(3) \quad {}_{(i)}x - \bar{x}$$

die Länge der gemeinsame Tangente zwischen zwei Kugeln ${}_{(i)}x$ und \bar{x} .

Nun setzen wir

$$(4) \quad r = \frac{\sum {}_{(i)}x {}_{(i)}y}{n \sigma_x \sigma_y}$$

wo

(1) LENSE, J.: Über isotrope Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. Bd. 116, S. 297.

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma_{\xi} = \sqrt{\frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n (\zeta_i \xi - \bar{\xi})^2 \right\}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum \zeta_i \xi}, \\ \sigma_{\eta} = \sqrt{\frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n (\zeta_i \eta - \bar{\eta})^2 \right\}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum \zeta_i \eta}, \end{cases}$$

so haben wir⁽¹⁾

$$(6) \quad -1 \leq r \leq 1.$$

Aus (2) folgt

$$(7) \quad 0 = 1/n \cdot \{ |\zeta_1 \bar{\xi} - \xi| + |\zeta_2 \bar{\xi} - \xi| + \dots + |\zeta_n \bar{\xi} - \xi| \};$$

daraus ersieht man, dass die Summe des absoluten Wertes von Länge der gemeinsamen Tangente zwischen zwei Kugeln $\zeta_i \bar{\xi}$ und $\bar{\xi}$ Null gleich ist.

(G) Wir betrachten zwei Paare der Kreise ξ und η , $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ in R_2 , wo ξ , η , $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Kreise in R_2 bedeuten.

Gelten

$$(1) \quad (\eta \bar{\eta}) = 0, \quad (\bar{\xi} - \xi, \eta) = 0, \quad (\bar{\eta} - \eta, \xi) = 0,$$

so erhält man

$$(2) \quad (\eta \bar{\xi}) = (\eta \xi)$$

oder

$$(3) \quad \cos \theta_1 = \cos \theta_2$$

wo θ_1 der Winkel zwischen η und $\bar{\xi}$, θ_2 der zwischen η und ξ ist.

(H) Wenn μ ein Kreis in meiner Arbeit⁽²⁾ ist, so ist E auch ein Kreis.

Es ist klar, dass, wenn E ein Kreis ist, so μ ein Kreis ist.

(I) Bezeichnet man nämlich die natürliche Gleichung der Ebenenkurve (K) mit

$$(1) \quad r = r(s),$$

(1) Vgl. z. B. MATUMURA, S.: The mathematical theory of statistics, Tokyo, 1937, S. 7.

(2) NAKAJIMA, S.: Lösung der Aufgabe 42, Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung, XXXVII. 2. Abt. Heft I, 4, S. 33.

wo r den Krümmungsradius und s die Kurvenlänge bedeutet, dann gilt

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = \cos \tau, & \frac{dy}{ds} = \sin \tau, & \tau = \int \frac{ds}{r(s)}, \\ \sigma = x + iy = \int e^{i\int \frac{ds}{r}} ds, \end{cases}$$

da x und y die rechtwinkligen Koordinaten des beliebigen Punktes P auf (K) , τ den Winkel zwischen der Tangente an P zu (K) und der x -Achse bedeutet⁽¹⁾.

Wenn p , θ die polaren Koordinaten von P sind, so folgt aus (2)

$$(3) \quad \begin{cases} p = e^{-i\theta} \int e^{i\frac{ds}{r}} ds, \\ \theta = \frac{1}{i} \exp. \left[\frac{1}{p} \int e^{i\frac{ds}{r}} ds \right], \end{cases}$$

wobei θ den Winkel zwischen p und der x -Achse bedeutet.

Aus (3) ergibt sich

$$(4) \quad p = \exp. \left\{ - \exp. \left[\frac{1}{p} \int e^{i\frac{ds}{r}} ds \right] \int e^{i\frac{ds}{r}} ds \right\}.$$

Aus (4) kann man p finden.

Wenn p ein konstanter ist, so muss (K) ein Kreis sein.

Setzen wir p in (4) in (3) ein, so kann man θ finden.

(J) Wir betrachten die MÖBIUSSCHE Kugelgeometrie, die sich aus der Übertragung der stereographischen Projektion auf den vierdimensionalen Raum ergibt.

Wir projizieren eine „Überkugel“ desselben, die in den fünf homogenen Koordinaten

$$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$$

die Gleichung hat :

$$(1) \quad (x|x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Den Punkten x [($x|x$) = 0] der Überkugel (1) entsprechen dann die

(1) KUBOTA, T.: Beiträge zur Inversionsgeometrie und LAGUERRE-Geometrie. Jap. Journ. of Math. I (1924), S. 41.

Punkte der Überebene oder, wie wir auch sagen wollen, die Punkte des dreidimensionalen Raumes der Projektion $x_4 = 0$.

Hier gelten für die stereographische Projektion die Formeln:

$$(2) \quad \begin{cases} x_0 = \rho \frac{1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2}, \\ x_1 = \rho \xi, \quad x_2 = \rho \eta, \quad x_3 = \rho \zeta, \\ x_4 = \rho \frac{1 - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{2} \end{cases}$$

die erlauben, aus den kartesischen Koordinaten

$$\xi, \eta, \zeta$$

des Punktes des Projektionsraumes die homogenen Koordinaten x_i des entsprechenden Punktes der Überkugel (1) zu ermitteln, wo ρ den Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Dehnen wir unsere Geometrie auf das komplexe Gebiet aus, so wird die Gleichung

$$(3) \quad (x^I x^{II}) = 0$$

für zwei Punkte x^I, x^{II} von Wichtigkeit.

Sie besagt, dass die Punkte u und v auf ein und derselben isotropen Gerade liegen, denn durch Rückgang auf kartesische Koordinaten

$$\xi^I, \eta^I, \zeta^I; \xi^{II}, \eta^{II}, \zeta^{II}$$

erhalten wir aus (2):

$$(4) \quad (\xi^I - \xi^{II})^2 + (\eta^I - \eta^{II})^2 + (\zeta^I - \zeta^{II})^2 = 0.$$

Wenn

$$\xi^{II} = \xi^I + d \xi^I, \quad \eta^{II} = \eta^I + d \eta^I, \quad \zeta^{II} = \zeta^I + d \zeta^I$$

gilt, so folgt aus (4)

$$(d \xi^I)^2 + (d \eta^I)^2 + (d \zeta^I)^2 = 0$$

oder

$$g_{ik} du^i du^k = 0$$

wo

$$(5) \quad (d\xi^1)^2 + (d\eta^1)^2 + (d\zeta^1)^2 \equiv g_{ik} du^i du^k$$

gesetzt wird, wo du^i, du^k die Parameter sind.

Die Bogenlänge einer Kurve $u^i(t)$ ist dann

$$(6) \quad s = \int W dt = 0, \quad W = \sqrt{g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k}, \quad \dot{u}^i = du^i/dt,$$

wo t ein neuer Parameter ist.

(K) Gilt

$$(1) \quad \begin{cases} (\bar{x}, x + y) = 0, & (x, \bar{x} + \bar{y}) = 0, \\ (\bar{y}, x - y) = 0, & (y, \bar{x} - \bar{y}) = 0, \end{cases}$$

wo x, y, \bar{x}, \bar{y} zwei Paare der Kreise in R_2 sind, so folgt

$$(2) \quad \begin{cases} (x\bar{x}) + (\bar{x}y) = 0, & (x\bar{x}) + (x\bar{y}) = 0, \\ (x\bar{y}) - (y\bar{y}) = 0, & (\bar{x}y) - (y\bar{y}) = 0 \end{cases}$$

oder

$$(3) \quad (x\bar{y}) = (\bar{x}y),$$

oder

$$(4) \quad (\bar{x}y) = (x\bar{y});$$

so ergibt sich aus (4)

$$(5) \quad (x\bar{y}) = 0,$$

so folgt der

Satz: Wenn (1) gültig ist, so muss x zu \bar{y} senkrecht oder \bar{x} zu y senkrecht sein.

(L)

$$(1) \quad x^a(t) \quad [a = I, II]$$

Bedeutet eine Kresfläche (K) in R_3 , wo x^a die Kugeln in R_3 sind.

$$(2) \quad x^a(t) \quad [a = I, II, III]$$

bedeutet zwei Kurven C_1, C_2 auf (K).

Wenn

$$(3) \quad x^A(t_0) \dot{x}^A(t_0) = 0, \quad A=1 \text{ oder } A=2 \text{ oder } A=3$$

gültig ist, so treffen C_1 und C_2 einander in $t = t_0$, wo t den Parameter bedeutet.

Wenn ein Punkt p auf C_1 oder C_2 liegt, so bekommt man

$$(4) \quad (p \dot{x}^a) = 0.$$

(M) Im folgenden möchten wir die Kugeln in des Verfassers Arbeit⁽¹⁾ im n dimensionalen Raum verallgemeinern.

Betrachten wir die Kugelscharen im R_N

$$(1) \quad \zeta^a = p^a \xi^a + q^a \eta^a + \dots + r^a \zeta^a \quad [a = I, II, \dots, n]$$

wo p^a, q^a, \dots, r^a die n skalaren Größen bedeuten.

Alle Kugeln ζ^a , die sich linear aus den $\xi^a, \eta^a, \dots, \zeta^a$ kombinieren lassen, gehen durch dieselben Schnittpunkte $\{\xi^a, \eta^a, \dots, \zeta^a\}$.

$$(2) \quad \begin{cases} \lambda_1 \xi^I + \lambda_2 \xi^{II} + \dots + \lambda_n \xi^n + \lambda_{n+1} \eta^I + \lambda_{n+2} \eta^{II} + \dots \\ + \lambda_{2n} \eta^n + \dots + \lambda_{n^2} \zeta^n \end{cases}$$

ist die Bedingung dafür, dass die n Punktepaare

$$\{\xi^I, \eta^I, \dots, \xi^I\}, \quad \{\xi^{II}, \eta^{II}, \dots, \xi^{II}\}, \quad \dots \quad \{\xi^n, \eta^n, \dots, \xi^n\}$$

auf einer Kugel im R_N liegen, oder (2) ist die Bedingung dafür, dass die n Punktepaare

$$\{\xi^I, \xi^{II}, \dots, \xi^p\}, \quad \{\eta^I, \eta^{II}, \dots, \eta^n\}, \quad \{\xi^I, \xi^{II}, \dots, \xi^n\}$$

auf einer Kugel in R_N liegen, wobei

$$\lambda_i \quad [i = 1, 2, \dots, \lambda_{n^2}]$$

irgendwelche skalare Zahlen sind.

Also folgt daraus der

Satz: Wenn die Punktepaare

$$\{\xi^I, \eta^I, \dots, \xi^I\}, \quad \{\xi^{II}, \eta^{II}, \dots, \xi^{II}\}, \quad \dots, \quad \{\xi^n, \eta^n, \dots, \xi^n\}$$

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 193.

auf einer Kugel in R_N liegen, dann liegen die Punktepaare

$$\{\xi^I, \xi^{\Pi}, \dots, \xi^n\}, \quad \{\eta^I, \eta^{\Pi}, \dots, \eta^n\}, \quad \dots, \quad \{\zeta^I, \zeta^{\Pi}, \dots, \zeta^n\}$$

auch auf einer Kugel in R_N .

Weiter kann man den Satz 5 in des Verfassers Arbeit⁽¹⁾ im R_N verallgemeinern.

(N) Nehmen wir einen Punkt u in R_n als Linearkombination von ξ^a und $\dot{\xi}^a$, so folgt

$$(1) \quad u = \rho_a \xi^a + \rho_{\dot{a}} \dot{\xi}^{\dot{a}}$$

wo $\rho_a, \rho_{\dot{a}}$ gewisse skalare Zahlen bedeuten, so muss gelten⁽²⁾

$$(2) \quad uu = \rho_a \rho_a A^{a\dot{a}} + \rho_a \rho_{\dot{b}} B^{a\dot{b}} + \rho_a \rho_{\dot{b}} T^{a\dot{b}},$$

wo

$$(3) \quad A^{a\dot{b}} = (\xi^a \dot{\xi}^{\dot{b}}), \quad B^{a\dot{b}} = (\xi^a \dot{\xi}^{\dot{b}}), \quad T^{a\dot{b}} = (\dot{\xi}^a \xi^{\dot{b}})$$

und $1 < a$ und $\dot{b} > n$ ist. Hier sind a und \dot{b} gewisse ganze Zahlen.

Diese quadratische Gleichung (2) in den homogenen Grössen ρ_a hat zwei Lösungen, die wegen

$$(4) \quad |A^{a\dot{b}}| > 0, \quad |B^{a\dot{b}}| > 0, \quad |T^{a\dot{b}}| > 0,$$

konjugiert komplex sind.

Sind u und v die Scheiteln, so gilt

$$(5) \quad u \xi^a = u \dot{\xi}^a = v \xi^a = v \dot{\xi}^a = 0.$$

(3)

Im folgenden möchten wir uns mit unseren Fundamentalgrössen

$$(\theta_i \theta_i), \quad (\theta_i \theta_{\tau}), \quad (\theta_{\tau} \theta_{\tau})$$

beschäftigen.

(A) Wir betrachten eine Kreisfläche

(1) NAKAJIMA, a. a. O., S. 195.

(2) Vgl. NAKAJIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 201.

$$(1) \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t, \tau),$$

deren mittlere Krümmung Null gleich ist und

$$(2) \quad (\theta_t \theta_t) = 0, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 0$$

gilt; man erhält⁽¹⁾

$$(3) \quad 2\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(t) + \mathfrak{z}(\tau),$$

d. h. unsere Kreisfläche muss eine Translationsfläche sein.

Weiter kann man untersuchen wie in BLASCHKES Buch⁽²⁾.

(B) Betrachten wir eine Tangentenkreisfläche (T), so bekommen wir

$$(\theta_t \theta_t) = (1 + \tau^2/\rho^2), \quad (\theta_t \theta_\tau) = 1, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1,$$

wo ρ in BLASCHKES Buch⁽³⁾ steht.

Aus (1) erhalten wir die folgenden Sätze.

(1) Die Gleichung unserer Minimallinien auf (T) ist

$$(1 + \tau^2/\rho^2) dt^2 + 2 dt d\tau + d\tau^2 = 0.$$

(2) Ein Kurvennetz

$$A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf (T) ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$\{1 + \tau^2/\rho^2\} C - 2 B + A = 0$$

ist.

(3) Definiert die Differentialgleichung

$$d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf (T) keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

(1) Vgl. BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I, Dritte Auflage, S. 237.

(2) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, II, (1923), S. 230.

(3) BLASCHKE, a. a. O., S. 147.

$$\frac{d\tau}{dt} = - \frac{\{1 + \tau^2/\rho^2\} + \lambda}{1 + \lambda}$$

(4) Ist

$$A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

die Minimallinie auf (T) , so bekommen wir

$$A : B : C = \{1 + \tau^2/\rho^2\} : 1 : 1.$$

(5) $t = \text{const.}$ und $\tau = \text{const.}$

können zu einander nicht senkrecht sein. u. s. w..

(C) Im folgenden möchten wir die Loxodromen im allgemeinen Sinne, nämlich diejenigen Kurven auf beliebigen Kreisflächen, welche eine Kurvenschar unter konstantem Winkel schneiden, erwähnen.

Sind die Loxodromen der Kurven

$$(1) \quad t = \text{const.},$$

so ist die Gleichung der Loxodromen⁽¹⁾

$$(2) \quad [\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau)} - (\theta_i \theta_\tau)^2 - a(\theta_i \theta_\tau)] d\tau = a(\theta_i \theta_i) dt$$

wo a in DINAS Arbeit steht.

Wenn

$$(3) \quad \partial/\partial\tau \cdot a(\theta_i \theta_i) = \partial/\partial t \cdot [\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau)} - (\theta_i \theta_\tau)^2 - a(\theta_i \theta_\tau)]$$

gilt, — solche Differentialgleichungen (2) heißen exakt —, so gibt es nach den bekanntenn Sätzen der Integralrechnung eine eindeutige und stetige Funktion $\varphi(t, \tau)$, deren Ableitungen

$$(4) \quad \sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau)} - (\theta_i \theta_\tau)^2 - a(\theta_i \theta_\tau)$$

und

$$(5) \quad a(\theta_i \theta_i)$$

sind.

(1) DINA, C.: Sopra una curva particolare giacente sopra una superficie in generale, *Giornale matematico ad uso degli studenti delle università italiane* pubblicato per cura del Prof. G. BATTAGLINI, Napoli, XIX, S. 298.

Dann ist

$$(6) \quad \varphi(t, \tau) = \text{const.}$$

die Schar der Integralkurven.

Gilt

$$(7) \quad \sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2} - a(\theta_i \theta_\tau) = f(\tau), \quad a(\theta_i \theta_i) = \varphi(t)$$

in (2), so kann man das Integral von (2) finden⁽¹⁾.

Wir setzen (2) in der Form

$$(8) \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2} - a(\theta_i \theta_\tau)}{a(\theta_i \theta_i)}.$$

Wenn die linearen Differentialgleichungen (8) die Gestalt

$$(9) \quad dt/d\tau = f(\tau)t + \varphi(\tau)$$

haben, wo die Koeffizienten $f(\tau)$ und $\varphi(\tau)$ in einem Intervall stetig erklärt sein mögen, so kann man (9) lösen, u. s. w. .

Hier kann man die Theorie der Differentialgleichungen auf (2) anwenden.

Wenn

$$(10) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(11) \quad \tau = \text{const.}$$

zueinander senkrecht sind, so folgt aus (2)

$$(12) \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{(\theta_\tau \theta_\tau)}}{a \sqrt{(\theta_i \theta_i)}}.$$

Auf der anderen Seite ist gültig⁽²⁾

$$(13) \quad \frac{d_\tau s}{d_\tau s} = \frac{k \sqrt{(\theta_\tau \theta_\tau)}}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)}},$$

so folgt aus (12) und (13)

(1) Vgl. z. B. BIEBERBACH, L.: Theorie der Differentialgleichungen, Berlin, (1926).

(2) Vgl. SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Dritte Verbesserte Auflage, 1922, S. 37.

$$(14) \quad a k \frac{dt}{d\tau} = \frac{d_\tau s}{d_\tau t}.$$

Wenn unsere Kurven Minimalkurven sind, so erhalten wir⁽¹⁾

$$(15) \quad \begin{cases} [(\theta_i, \theta_i) p t + \{(\theta_i, \theta_\tau) + i \sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_i, \theta_\tau)^2}\} d\tau] \\ \times [(\theta_i, \theta_i) dt + \{(\theta_i, \theta_\tau) - i \sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_i, \theta_\tau)^2}\} d\tau] = 0; \end{cases}$$

somit ergibt sich aus (2) und (15)

$$(16) \quad (\theta_i, \theta_\tau) d\tau + (\theta_i, \theta_i) dt = 0,$$

oder

$$(17) \quad t = \text{const.},$$

wenn

$$t = \text{const.} \quad \text{und} \quad \tau = \text{const.}$$

zueinander senkrecht sind.

Wenn unsere Kurven die Haupttangentialkurven sind, so gilt⁽²⁾

$$(18) \quad L d\theta^2 + N d\tau^2 = 0;$$

somit ergibt sich aus (2) und (18)

$$(19) \quad \left\{ \frac{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_i, \theta_\tau)^2}}{a(\theta_i, \theta_i)} - a(\theta_i, \theta_\tau) \right\}^2 = -\frac{N}{L}.$$

Auf der Kreisfläche gilt⁽³⁾

$$(20) \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_\tau, \theta_\tau) - (\theta_i, \theta_\tau)^2}}{\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_\tau, \theta_\tau)}};$$

somit folgt aus (2) und (20)

$$(21) \quad [\sqrt{(\theta_i, \theta_i)(\theta_\tau, \theta_\tau)} \sin \omega - a(\theta_i, \theta_\tau)] d\tau = a(\theta_i, \theta_i) dt$$

oder

$$(22) \quad \sqrt{(\theta_\tau, \theta_\tau)} \sin \omega d\tau = a \sqrt{(\theta_i, \theta_i)} dt,$$

wenn die Parameterlinien auf einander senkrecht stehen.

(1) SCHEFFERS, a. a. O., S. 556.

(2) SCHEFFERS, a. a. O., S. 565.

(3) LUKAT, M.: BIANCHI'S Vorlesungen über Differentialgeometrie Leipzig und Berlin, 1910, S. 62.

Aus (13) und (22) kommt

$$(23) \quad \frac{d_\tau s}{d_\tau s} = \frac{ak}{\sin \omega} \frac{dt}{d\tau}.$$

(23) ist unsere Bedingung.

Die Parameterlinien einer Kreisfläche bilden dann und nur dann ein Kurvennetz ohne Umwege, wenn

$$(24) \quad \partial/\partial\tau \sqrt{(\theta_i\theta_i)} = \partial/\partial t \sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}$$

genügen und nicht verschwinden⁽¹⁾. Da ist $\lambda = \text{constant.}$, wo λ in NAKAJIMAS Arbeit⁽²⁾ steht.

Aus (2) und (24) kommt

$$(25) \quad \begin{cases} [\sqrt{\{ \int (\theta_i\theta_i)_i d\tau + f(t) \}^2 (\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_i\theta_i)^2 - a(\theta_i\theta_i)}] d\tau \\ = a \{ \int (\theta_\tau\theta_\tau)_i d\tau + f(t) \}^2 dt, \end{cases}$$

daraus folgt

$$(26) \quad [\sqrt{F(t) (\theta_\tau\theta_\tau) - (\theta_i\theta_i)^2 - a(\theta_i\theta_i)}] d\tau = a F(t) dt$$

denn

$$(27) \quad (\theta_i\theta_i) = 1$$

gilt, wo $f(t)$ und $F(t)$ zwei Funktionen von t bedeuten.

(27) ist die Gleichung der Loxodromen.

Ist

$$(28) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

die Gleichung der Minimallinien auf unserer Kreisfläche, so folgt

$$(29) \quad A : B : C = (\theta_i\theta_i) : (\theta_i\theta_\tau) : (\theta_\tau\theta_\tau);$$

somit ergibt sich aus (25) und (26)

$$(30) \quad [\sqrt{AC - B^2} - aB] d\tau = a A dt.$$

(30) ist die Gleichung der Loxodrome.

(1) SCHEFFERS, a. a. O., S. 52.

(2) NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von MOBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2. S. 36.

Weiter betrachten wir eine Kreisfläche, deren Bogenlänge ds mit⁽¹⁾

$$(31) \quad ds^2 = (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2 (\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2$$

gegeben ist, so ist die Gleichung der Loxodrome

$$(32) \quad [\sqrt{(\theta_i \theta_i)} - (\theta_i \theta_\tau)] d\tau = a (\theta_i \theta_i) dt,$$

wie man an (31) und (2) erkennt.

(D) Betrachten wir eine Kugel als unsere Kreisfläche, so nehmen unsere Fundamentalgrößen den Wert⁽²⁾

$$(\theta_i \theta_i) = \cos^2 \tau, \quad (\theta_i \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1$$

an, woraus wir die folgenden Sätze erhalten:

(1) *Die Gleichung der Minimallinien auf unserer Kugel ist*

$$\cos^2 \tau dt^2 + d\tau^2 = 0.$$

(2) *Wenn*

$$A dt^2 + B dt d\tau + C d\tau^2 = 0$$

die Gleichung der Minimallinien ist, so entsteht

$$A : B : C = \cos^2 \tau : 0 : 1.$$

(3) *Ein Kurvennetz*

$$A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf unserer Kugel ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$\cos^2 \tau \cdot C + A = 0$$

gültig ist.

(4) *Definiert die Differentialgleichung*

$$d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf unserer Kugel keine Schar der Minimalkurven, so lautet die

(1) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von MOBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ.; Vol. 2, S. 36.

(2) Vgl. SALKOWSKI, E.: Affine Differentialgeometrie, 1934, Berlin und Leipzig, S. 104.

Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$\frac{d\tau}{dt} = - \frac{\cos^2 \tau}{\lambda}, \quad \text{u. a. w..}$$

(E) Wir betrachten eine Minimalfläche (K). Die Bedingung dafür, dass (K) eine Minimalfläche ist, ist die

$$D(\theta_\tau \theta_\tau) + D''(\theta_t \theta_t) - 2D'(\theta_t \theta_\tau) = 0,$$

wo D, D', D'' die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung im Sinne in der gewöhnlichen Differentialgeometrie bedeuten⁽¹⁾.

Weiter kann man untersuchen wie in der gewöhnlichen Differentialgeometrie.

(F) Wir betrachten die Tangentenfläche der Raumkurve als Kreisfläche⁽²⁾. Wir haben

$$(1) \quad (\theta_t \theta_t) = k'(t)^2, \quad (\theta_t \theta_\tau) = \mathfrak{E} k'(t), \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1,$$

woraus die folgenden Sätze zu erhalten sind:

(1) Die Gleichung der Minimallinien ist

$$(2) \quad k^2(t) d\tau^2 + 2\mathfrak{E} k'(t) dt d\tau + d\tau^2 = 0.$$

(2) Wenn

$$(3) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(4) \quad \tau = \text{const.}$$

zueinander senkrecht sind, so folgt daraus

$$(5) \quad \mathfrak{E} k'(t) = 0, \quad \text{u. s. w..}$$

(G) Wir betrachten den Zylinder als Kreisfläche⁽³⁾. Es gibt

$$(1) \quad (\theta_t \theta_t) = 1 + \tau^2 k''(t)^2, \quad (\theta_t \theta_\tau) = 1, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1,$$

(1) KUBOTA, T.: Elementary Differentialgeometry, 1934, IWANAMI, Tokyo, p. 218.

(2) ROTHE, R.: Differentialgeometrie, I, Sammlung Göschel 1113, S. 130.

(3) ROTHE, a. a. O., S. 129.

woraus die folgenden Sätze abzuleiten sind :

(1) *Die Gleichung der Minimallinien ist*

$$(2) \quad \{1 + \tau^2 k''(t)^2\} dt^2 + 2 dt d\tau + d\tau^2 = 0.$$

(2) *Die Kurvenscharen*

$$(3) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(4) \quad \tau = \text{const.}$$

können nicht zueinander senkrecht sein, u. s. w. .

(H) τ sei irgendein Parameter und

$$(1) \quad T = \frac{1}{2} \cdot ds^2/d\tau^2 = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta,$$

gesetzt, wo

$$(2) \quad \begin{cases} ds^2 = (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2 (\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2 \\ \quad \equiv g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \end{cases}$$

gegeben ist. Da ds das Bogenelement unserer Kreisfläche bedeutet.

Wir betrachten nun die Bewegungsgleichungen eines materiellen Systems, die im Variationsprinzip

$$(3) \quad \delta \int 2 T d\tau = 0$$

kurz zusammengefasst sind, wo der Punkt über dem x^α die Ableitung nach τ anzeigt.

Aus der Mechanik wissen wir, dass die in (3) enthaltene Lagrange-Gleichung

$$(4) \quad \frac{d}{d\tau} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = 0,$$

wenn τ die Zeit und T die lebendige Kraft bedeutet, die Bewegung des Systems definiert und das Zwischenintegral

$$(5) \quad T = E = \text{konst.}$$

besitzt.

Solange der Wert der Konstanten E von Null verschieden ist, lässt sich leicht auf Grund der Gleichung $T = E$ der Parameter aus (3) eliminieren und eine Variationsgleichung ableiten, die zur Definition der Bahnkurve geeignet ist. Wegen

$$(6) \quad \sqrt{2} T d\tau = ds$$

kann man den Ausdruck für die Wirkung, d. i. das Integral

$$(7) \quad \int 2 T d\tau$$

von (3), auch in der Form

$$(8) \quad \int \sqrt{2} E \sqrt{2} T d\tau = \sqrt{2} E \int \sqrt{2} T d\tau = \sqrt{2} E \int ds$$

schreiben.

(I) Wenn die Koordinaten einer Kreisfläche $x(t, \tau)$ der Differentialgleichung

$$(1) \quad -\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} = 0 \quad (a = \text{const.})$$

genügen, nimmt die Differentialgleichung der Asymptotenlinien die Gestalt an⁽¹⁾:

$$(2) \quad \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + 2 \frac{(\theta_t, \theta_\tau)}{(\theta_t, \theta_t)} \frac{dt}{d\tau} + a^2 = 0,$$

wenn unser Flächenpunkt ein Nabelpunkt ist, denn in dem Punkt gilt

$$(3) \quad (\theta_t, \theta_t) : (\theta_t, \theta_\tau) : (\theta_\tau, \theta_\tau) = D : D' : D'',$$

wo D , D' , D'' die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung bedeuten.

(J) Ist eine Kreisfläche (K) konstanter negativer Krümmung auf ihre Haupttangentenkurven bezogen, so ist das Längenelement durch den Ausdruck

$$(1) \quad ds^2 = dt^2 + 2 \cos z dt d\tau + d\tau^2$$

(1) MITRINOVITCH, D. S.: Equation différentielle des asymptotiques et équation des cordes vibrants qui s'y rattache, Rev. math. Un. interbalkanique I, S. 135-137.

gegeben⁽¹⁾, wo

$$(2) \quad (\theta_t \theta_t) = 1, \quad (\theta_t \theta_\tau) = \cos z, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1$$

entstehen, wonach für die Krümmungen der Normalschnitte in einem Kreisflächenpunkt die Gleichung

$$(3) \quad \frac{1}{R} = \frac{L dt^2 + 2 M dt d\tau + N d\tau^2}{dt^2 + 2 \cos z dt d\tau + d\tau^2}$$

gilt, wo L, M und N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung des (K) bedeuten.

Die Gleichung der Minimallinien auf (K) ist

$$(4) \quad dt^2 + 2 \cos z dt d\tau + d\tau^2 = 0.$$

Ein Kurvennetz

$$(5) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2 B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf (K) ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$(6) \quad C - 2 \cos z \cdot B + A = 0$$

gilt.

Definiert die Differentialgleichung

$$(7) \quad d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf (K) keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$(8) \quad \frac{d\tau}{dt} = - \frac{1 + \cos z \cdot \lambda}{\cos z + \lambda}.$$

Die Schar der Parameterkurven, welche auf der zweiten Schar gleiche Stücke abschneidet, soll kurz als die Schar der „Teilerkurven“ oder „Teiler“ und diejenige, auf der gleiche Stücke abgeschnitten werden, als „geteilte Kurven“ oder „Geteilte“ bezeichnet werden.

Die Kurven $t = C$ sind die Teiler der Kurven $\tau = C$.

(1) Vgl. VOSS, A.: Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Math. Ann. XXXIX Bd., S. 252.

Weiter sind $\tau = C$ die Teiler von $t = C$.

Man führt durch die Substitutionen

$$(9) \quad \begin{cases} t = t(t_1, \tau_1), & \tau = \tau(t_1, \tau_1) \quad \text{und} \\ dt = \frac{\partial t}{\partial t_1} \cdot dt_1 + \frac{\partial t}{\partial \tau_1} \cdot d\tau_1, & d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \cdot dt_1 + \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \cdot d\tau_1, \end{cases}$$

ein neues Koordinatensystem t_1, τ_1 ein, und setzt den Koeffizienten des dt_1^2 dieses Koordinatensystems gleich eins.

Das Langenelementquadrat im Systeme ist

$$(10) \quad \begin{cases} ds^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial t}{\partial \tau_1} d\tau_1 \right)^2 + 2 \cos z \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial t}{\partial \tau_1} d\tau_1 \right) \\ \quad \times \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} d\tau_1 \right) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} d\tau_1 \right)^2 \end{cases}$$

oder nach $dt_1^2, dt_1 d\tau_1, d\tau_1^2$ geordnet:

$$(11) \quad \begin{cases} ds^2 = \left\{ \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} \right)^2 + \cos z \frac{\partial t}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t_1} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \right)^2 \right\} dt_1^2 \\ \quad + 2 \left\{ \frac{\partial t}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau_1} + \cos z \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} + \frac{\partial t}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \right\} \cdot dt_1 d\tau_1 + \left\{ \left(\frac{\partial t}{\partial \tau_1} \right)^2 + 2 \cos z \frac{\partial t}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \right. \\ \quad \left. + \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \right)^2 \right\} d\tau_1^2 \end{cases}$$

und muss nun

$$\left(\frac{\partial t}{\partial t_1} \right)^2 + 2 \cos z \frac{\partial t}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t_1} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \right)^2 = 1 \quad \text{sein.}$$

Sollen die beiden Scharen des Koordinatensystems sich gegenseitig teilen, oder wie man auch sagt, ein „rhombisches Netz“ bilden, so folgt

$$(12) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial t}{\partial t_1} \right)^2 + 2 \cos z \frac{\partial t}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t_1} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial t_1} \right)^2 = 1, \\ \left(\frac{\partial t}{\partial \tau_1} \right)^2 + 2 \cos z \frac{\partial t}{\partial \tau_1} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_1} \right)^2 = 1. \end{cases}$$

Nun setzen wir (1) die Form

$$(13) \quad ds^2 = G_{ik} du^i du^k.$$

Ist V^i ein beliebiger Tensor, so wollen wir sagen,

$$(14) \quad V_i = G_{ik} V^k$$

seien die kovarianten Koordinaten „derselben“ Tensors. Hieraus folgt

$$(15) \quad V^i = G^{ik} V_k,$$

wo

$$(16) \quad G^{ik} = G^{ki}, \quad G_{ik} G^{ki} = G^i_i$$

gelten.

Weiter kann man untersuchen wie in BLASCHKES Buch⁽¹⁾.

Erleidet der Fundamentaltensor eine infinitesimale Transformation:

$$(17) \quad 'G_{\lambda\mu} = G_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu} dt,$$

so ist

$$(18) \quad 'G^{\lambda\mu} = G^{\lambda\mu} - h^{\lambda\mu} dt;$$

daraus ergibt sich⁽²⁾

$$(19) \quad \begin{cases} 0 = ' \nabla_\nu 'G_{\alpha\beta} = \nabla_\nu 'G_{\alpha\beta} - A_{\nu\alpha}^{\gamma} 'G_{\gamma\beta} - A_{\nu\beta}^{\gamma} 'G_{\alpha\gamma}, \\ dt \nabla_\mu h_{\alpha\beta} + A_{\mu\alpha}^{\gamma} G_{\gamma\beta} + A_{\mu\beta}^{\gamma} G_{\alpha\gamma}, \\ \frac{1}{2} dt (\nabla_\mu h_{\lambda\alpha} + \nabla_\lambda h_{\alpha\mu} - \nabla_\alpha h_{\mu\lambda}) G^{\alpha\nu} = A_{\mu\lambda}^{\nu}. \end{cases}$$

(4)

(A) Im folgenden möchten wir das Punktepaar im R_2 erklären.

$$(1) \quad \xi^\alpha \quad [\alpha = I, II]$$

bezeichnet das Punktepaar auf R_2 als Schnitt zweier Kreise ξ^α in R_2 ,
wo ξ^I, ξ^{II} die Kreise in R_2 bezeichnen.

(1) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, II (1923), S. 145.

(2) SCHOUTEN, J. A.: Der Riccikalkül, Berlin, (1924), S. 208.

Wir können zwei neue Punkte

$$(2) \quad \mathfrak{x}^a = \sum_{\beta=1}^{\Pi} c_{\beta}^a \mathfrak{x}^{\beta} \quad [a = I, II]$$

als Linearkombinationen der \mathfrak{x}^a einführen mit Koeffizienten c_{β}^a , deren Determinante

$$(3) \quad |c_{\beta}^a| \neq 0$$

sein muss, wenn \mathfrak{x}^I und \mathfrak{x}^{II} nicht proportional werden sollen, und können dann ebensogut durch die \mathfrak{x}^a unser Punktepaar darstellen.

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kreise

$$(4) \quad \mathfrak{x}^a, \mathfrak{y}^a, \mathfrak{z}^a, \dots \quad [a = I, II]$$

mit deren Hilfe wir eine Anzahl von Punktepaaren festlegen, nur von der geometrischen Figur der Punktepaare abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kreisen, so muss er unverändert bleiben bei Substitution von der Art (2).

Wir wollen (2) auch die Büscheltransformationen des Punktepaars \mathfrak{p} nennen.

Betrachten wir im folgenden ein Punktepaar \mathfrak{x}^a .

Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(5) \quad (\mathfrak{x}^a \mathfrak{x}^{\beta}) = A^{a\beta},$$

so haben wir in $A^{a\beta}$ ein Größensystem, das sich nach (2) in folgender Weise substituiert:

$$(6) \quad \overset{*}{A}^{a\beta} = c_{\gamma}^a c_{\delta}^{\beta} A^{\gamma\delta} \quad [\overset{*}{A}^{a\beta} = (\mathfrak{x}^a \mathfrak{x}^{\beta})].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis II.

Für $A^{a\beta}$ gelten

$$(7) \quad A^{a\beta} = A^{\beta a}, \quad A^* = |c_{\beta}^a|^2 \cdot A.$$

wo

$$(8) \quad A = |A^{a\beta}|$$

ist.

Wollen wir nun ein eigentliches Punktepaar haben, so müssen wir die Determinante

$$(9) \quad A \succ 0$$

voraussetzen.

Für

$$(10) \quad A \prec 0$$

ist es imaginär, für

$$(11) \quad A = 0$$

schrumpft das Punktepaar auf einen Punkt zusammen, da sich dann die \mathfrak{x}^* berühren.

Ist

$$(12) \quad A^{**} \equiv 0,$$

so erhalten wir im komplexen Gebiet eine Minimalgerade als Ausartung.

Setzen wir

$$(13) \quad A > 0$$

voraus, so gelten in dem Büschel der Kreise \mathfrak{x}^* zwei allerdings nicht reelle, die in die Punkte ausarten, die sogenannten Scheitel des Punktepaars.

Kombiniert sich ein Scheitel u aus den \mathfrak{x}^* mit Koeffizienten ρ_α :

$$(14) \quad u = \rho_\alpha \mathfrak{x}_i^\alpha,$$

so muss gelten:

$$(15) \quad (u u) = \rho_\alpha \rho_\beta A^{*\alpha\beta} = 0$$

und diese quadratische Gleichung in den homogenen Größen ρ_α hat zwei Lösungen, die wegen

$$(16) \quad A > 0$$

konjugiert komplex sind.

Sind u und v die Scheitel, so gilt für einen Punkt \bar{p} des Punktepaares

$$(17) \quad (u \bar{p}) = (v \bar{p}) = 0.$$

Im folgenden werden wir neben dem Größensystem $A^{\alpha\beta}$ ein anderes, gleichfalls symmetrisches $A_{\alpha\beta}$, verwenden, das wir mit unteren Indizes schreiben und das sich nach

$$(18) \quad A_{11} = A^{22}/A, \quad A_{22} = -A^{11}/A, \quad A_{12} = A^{12}/A$$

aus den $A^{\alpha\beta}$ bestimmt.

Es gilt dann

$$(19) \quad A^{\alpha\beta} A_{\beta\tau} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \tau \\ 0 & \text{,, } \alpha \neq \tau \end{cases}$$

und ferner

$$(20) \quad \frac{1}{2} A^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = 1.$$

Wir betrachten zwei Punktepaare p und \tilde{p} , die durch die beiden Kreispaaire

$$(21) \quad \xi^{\alpha} \quad \text{und} \quad \tilde{\xi}^{\lambda} \quad [\alpha, \lambda = I, II]$$

dargestellt sind.

Wir definieren analog (5)

$$(22) \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = (\tilde{\xi}^{\lambda} \tilde{\xi}^{\mu}) \quad \text{mit} \quad \tilde{A}^{\lambda\mu} = \tilde{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(23) \quad A = |\tilde{A}^{\lambda\mu}| > 0$$

voraus.

Dann haben wir für \tilde{p} die Büscheltransformationen

$$(24) \quad \tilde{\xi}^{\lambda} = \tilde{c}_{\alpha}^{\lambda} \tilde{\xi}^{\alpha}$$

zu berücksichtigen.

Die $\tilde{c}_{\alpha}^{\lambda}$ in (24) sind aber die von den c_{β}^{α} in (2) völlig unabhängigen, neuen Größen.

Daher haben wir zwischen den Vektoren und den Tensoren bezüglich der Büscheltransformationen von p einerseits und von \tilde{p} andererseits zu unterscheiden.

In

$$(25) \quad S^{\alpha\lambda} = (\tilde{x}^\alpha \tilde{x}^\lambda)$$

haben wir ein Gröszensystem, bei dem beide Arten von Indizes vorkommen, einen „gemischten“ Tensor, der sich nach

$$(26) \quad \tilde{S}^{\alpha\lambda} = c_\beta^\alpha \tilde{c}_\mu^\lambda S^{\beta\mu}$$

transformiert.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(27) \quad \|\tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}, \tilde{x}^I, \tilde{x}^{II}\| \equiv 0$$

ist, wo eine lineare Beziehung der Form

$$(28) \quad \sigma_\alpha \tilde{x}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{x}^\lambda$$

gilt.

Die Bedeutung von (28) ist aber die, dass es einen Kreis

$$(29) \quad \mathfrak{g} = \sigma_\alpha \tilde{x}^\alpha = \tilde{\sigma}_\lambda \tilde{x}^\lambda$$

gibt, auf dem beide Punktepaaire liegen.

Gilt (27) nicht, so sind die vier Hilfskreise linear unabhängig, sodass sich ihre Invarianten gegenüber MÖBIUSTransformationen alle sicher aus den skalaren Produkten bilden lassen.

Diese werden aber alle durch die drei Tensoren

$$(30) \quad A^{\alpha\beta}, \tilde{A}^{\lambda\mu}, S^{\alpha\lambda}$$

gegeben, von denen die ersten beiden wegen der Symmetrie (7) und (22) aus je drei, der letztere aus vier Skalarprodukten besteht.

Weiter kann man untersuchen wie in NAKAJIMAS Arbeit⁽¹⁾.

(B) Im folgenden möchten wir die Kurve K in R_3 klar legen, die mit $2n$ Punkten in R_3 bestimmt wird, wo n eine ganze Zahl bedeutet.

Wir können daher auch $2n$ neue Punkte in

$$(1) \quad \tilde{x}^\alpha = \sum_{\beta=1}^{3n} c_\beta^\alpha \tilde{x}^\beta \quad [\alpha = I, II, III, \dots, 3n]$$

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ. 34 (1931), S. 197.

als Linearkombinationen der \mathfrak{x}^{α} einführen mit Koeffizienten c_{β}^{α} , deren Determinante

$$(2) \quad |c_{\beta}^{\alpha}| \neq 0$$

sein muss, wenn

$$\mathfrak{x}^I, \mathfrak{x}^{II}, \dots$$

nicht proportional werden sollen, und dann ebensogut mit der \mathfrak{x}^{α} unsere Kurve K darstellen, wo

$$\alpha = 3n.$$

Soll ein Ausdruck in den Koordinaten der Kugeln

$$(3) \quad \mathfrak{x}^{\alpha}, \mathfrak{y}^{\alpha}, \mathfrak{z}^{\alpha}, \dots \quad [\alpha = I, II, \dots, 3n]$$

mit deren Hilfe eine Anzahl von K festlegen, nur von der geometrischen Figur der K abhängen, nicht aber von den sie festlegenden Kugeln, so muss er unverändert bleiben bei Substitutionen von der Art (1).

Wir wollen (1) auch die Büscheltransformationen des K nennen. Wir wollen nun einen K , \mathfrak{x}^{α} betrachten. Bilden wir das System der Skalarprodukte

$$(4) \quad (\mathfrak{x}^{\alpha} \mathfrak{x}^{\beta}) = A^{\alpha\beta},$$

so haben wir in $A^{\alpha\beta}$ ein Grörsensystem, das sich nach (1) in folgender Weise substituiert:

$$(5) \quad \mathring{A}^{\alpha\beta} = c_{\beta}^{\alpha} c_{\delta}^{\beta} A^{\tau\delta} \quad [A^{\alpha\beta} = (\mathfrak{x}^{\alpha} \mathfrak{x}^{\beta})].$$

Hier laufen alle Indizes von I bis $3n$.

Da gelten

$$(6) \quad A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha}$$

und

$$(7) \quad \mathring{A} = |c_{\beta}^{\alpha}|^2 \cdot A$$

wo

$$(8) \quad A = |A^{\alpha\beta}|$$

gültig ist.

Wir betrachten zwei Kurven K und \bar{K} , die durch die beiden Kugelpaare

$$(9) \quad x^a \quad \text{und} \quad \bar{x}^\lambda \quad [a, \lambda = I, II, \dots, 3n]$$

dargestellt sind.

Wir definieren analog (4)

$$(10) \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = (\bar{x}^\lambda \bar{x}^\mu) \quad \text{mit Hilfe von} \quad \bar{A}^{\lambda\mu} = \bar{A}^{\mu\lambda}$$

und setzen

$$(11) \quad A = |\bar{A}^{\lambda\mu}| > 0$$

voraus,

Dann haben wir für \bar{K} die Büscheltransformationen

$$(12) \quad \bar{x}^\lambda = \bar{c}_\mu^\lambda \bar{x}^\mu$$

zu berücksichtigen.

Die \bar{c}_μ^λ in (12) sind aber die von den c_μ^a in (1) völlig unabhängigen neuen Größen.

Wir schliessen nun den Fall aus, dass die Matrix

$$(13) \quad ||\bar{x}^I, \bar{x}^{II}, \dots, \bar{x}^{3n}, \bar{x}^I, \bar{x}^{II}, \dots, \bar{x}^{3n}|| \equiv 0$$

ist, wo eine lineare Beziehung der Form

$$(14) \quad \sigma_a x^a = \bar{\sigma}_\lambda \bar{x}^\lambda$$

gilt.

Die Bedeutung von (14) ist aber die, dass es eine Kugel

$$(15) \quad z = \sigma_a x^a = \bar{\sigma}_\lambda \bar{x}^\lambda$$

gibt, von der die beiden Kurven K bestimmt werden.

Weiter kann man untersuchen wie in des Verfassers Arbeit⁽¹⁾.

(5)

Ist $\hat{\varepsilon}$ ein Kreis und x ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., 34 (1931), S. 187.

$$(a) \quad \mathfrak{z} = 2(\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}}) \hat{\mathfrak{x}} - \mathfrak{x}$$

der zu \mathfrak{x} in bezug auf den Kreis $\hat{\mathfrak{x}}$ inverse Punkt.

(A) Aus (a) folgt

$$(1) \quad \{\mathfrak{z} + \mathfrak{x}\} : 2 = (\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}}) \hat{\mathfrak{x}}$$

oder

$$(2) \quad 1 + (\mathfrak{z} \mathfrak{x}) = 2(\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}})^2,$$

wenn \mathfrak{z} und \mathfrak{x} die Kreise in R_2 sind.

Wenn

$$(3) \quad (\mathfrak{z} \mathfrak{x}) = \text{const.},$$

so

$$(4) \quad (\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}}) = \text{const.}$$

Wenn

$$(5) \quad (\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}}) = \text{const.},$$

so

$$(6) \quad (\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}}) = \text{const.}$$

Wenn \mathfrak{z} und \mathfrak{x} die Punkte in R_2 sind, so folgt aus (1)

$$(7) \quad (\mathfrak{z} \mathfrak{x}) = 2(\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}})^2;$$

daraus ersieht man, dasz

$$(8) \quad (\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}}) = \text{const.}$$

gilt, wenn die Länge zwischen zwei Punkten \mathfrak{z} und \mathfrak{x} konstant ist.

Weiter gilt

$$(9) \quad l = \text{const.},$$

wenn

$$(10) \quad (\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}}) = \text{const.}$$

ist, wo l die Länge zwischen zwei Punkten \mathfrak{z} und $\hat{\mathfrak{x}}$ darstellt.

(B) Aus (a) folgt

$$(1) \quad {}_{(1)}\mathfrak{J} = 2(\xi_u \xi) \xi - \xi_u, \quad {}_{(2)}\mathfrak{J} = 2(\xi_v \xi) \xi - \xi_v$$

oder

$$(2) \quad {}_{(1)}\mathfrak{J} = -\xi_u, \quad {}_{(2)}\mathfrak{J} = -\xi_v,$$

wenn u und v die Parameter bedeuten.

(6)

Ist

$$(1) \quad \hat{\mathfrak{y}} = \hat{\rho}_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$$

eine normierte Kugel in R_3 durch \mathfrak{R} mit

$$(2) \quad \hat{\mathfrak{y}} \hat{\mathfrak{y}} = \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta A^{\alpha\beta} = 1,$$

so muss

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

gelten⁽¹⁾, wo φ den Winkel zwischen \mathfrak{R} und $\hat{\mathfrak{R}}$ bedeutet.

Da \mathfrak{R} und $\hat{\mathfrak{R}}$ zwei Kreise in R_3 sind.

Wenn

$$(4) \quad \cos^2 \varphi = 1$$

immer gilt, so entsteht

$$(5) \quad A^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}.$$

Umgekehrt gilt (5), so bekommen wir

$$\cos^2 \varphi = 1;$$

daraus folgt der

Satz: *Wenn*

$$\cos^2 \varphi = 1$$

in (3) immer gilt, so erhält man (5). Wenn (5) umgekehrt gültig ist,

(1) Vgl. NAKAIJMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 196.

so erhält man (5), so folgt

$$\cos^2 \varphi = 1.$$

Weiter ergibt sich der

Satz: Wenn $T^{\alpha\beta} \equiv 0$, so folgt $\cos^2 \varphi = 0$ daraus. Umgekehrt gilt

$$\cos^2 \varphi = 0,$$

wenn

$$T^{\alpha\beta} \equiv 0.$$

Ist

$$(6) \quad \cos^2 \varphi = k^2,$$

so folgt daraus

$$k^2 = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

oder

$$(7) \quad k^2 A^{\alpha\beta} \equiv T^{\alpha\beta}.$$

Umgekehrt gilt (7), so folgt (6) daraus und ist somit zu erhalten der

Satz: Wenn (6) gilt, so entsteht (7). Umgekehrt gilt (6), wenn (7) gültig ist.

Betrachten wir

$$(8) \quad \cos^2 \bar{\varphi} = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

wo $\bar{\varphi}$ den Winkel zwischen \mathfrak{y} und $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{R}}$ die Kreise in R_s bedeutet, so folgt daraus

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\varphi - \bar{\varphi}) = \cos \varphi \cos \bar{\varphi} - \sin \varphi \sin \bar{\varphi} = \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} \\ \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} - \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta} \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta}. \end{array} \right.$$

Wenn

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} - \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta} \\ \sqrt{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta} = 0, \end{array} \right.$$

so kommt daraus

$$(10) \quad \cos(\varphi - \bar{\varphi}) = 0.$$

Umgekehrt gilt (9), wenn (10) besteht.

Wir betrachten zwei Winkel φ und $\hat{\varphi}$, wo

$$(11) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

$$(12) \quad \cos^2 \hat{\varphi} = \hat{T}^{\alpha\beta} \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta$$

gültig sind, so folgt aus (11) und (12)

$$(13) \quad T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = \hat{T}^{\alpha\beta} \hat{\rho}_\alpha \hat{\rho}_\beta,$$

wenn $\varphi = \hat{\varphi}$ gilt, so ergibt sich daraus

$$(14) \quad \begin{cases} \rho_\lambda = \rho_\mu p_\lambda^\mu, & \hat{T}^{\alpha\beta} = T^{ij} p_i^\alpha p_j^\beta, & T^{\alpha\lambda} = T^{\alpha\beta} p_\beta^\lambda, \\ T_\alpha = T_\alpha = T_\alpha p_\alpha^\lambda, & \hat{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} p_\alpha^\lambda p_\beta^\mu. \end{cases}$$

(7)

Sind zwei Kreisscharen im konformen Raum vorgelegt, so gibt es zwei Paare Örter der Brennpunkte der Kreise.

Diese Örter sind jeder zwei Flächen der zweiparametrischen.

Wenn die Gleichungen zweier Paare von den Örtern

$$(1) \quad (x \ x) \equiv x_0^2(u, v) + x_1^2(u, v) + x_2^2(u, v) + x_3^2(u, v) = 0,$$

$$(2) \quad (y \ y) \equiv y_0^2(u, v) + y_1^2(u, v) + y_2^2(u, v) + y_3^2(u, v) = 0,$$

$$(3) \quad (x \ x) \equiv x_0^2(u, v) + x_1^2(u, v) + x_2^2(u, v) + x_3^2(u, v) = 0,$$

$$(4) \quad (z \ z) \equiv z_0^2(u, v) + z_1^2(u, v) + z_2^2(u, v) + z_3^2(u, v) = 0$$

sind, so kann man die Gleichung der Kreisscharen als

$$(5) \quad (x \ y) \equiv x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 1,$$

$$(6) \quad (x \ z) \equiv x_0 z_0 + x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 1$$

setzen, wobei u, v die Parameteter bedeuten.

Nun kann man⁽¹⁾

$$(7) \quad \begin{cases} \sum dx_i \cdot dy_i = G_{ij} du^i du^j, \\ \sum (dx_i)^2 = g_{ij} du^i du^j, \\ \sum (dy_i)^2 = \bar{g}_{ij} du^i du^j, \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \sum dx_i dz_i = H_{ij} du^i du^j, \\ \sum (dx_i)^2 = g^{ij} du^i du^j, \\ \sum (dz_i)^2 = h_{ij} du^i du^j \end{cases}$$

betrachten.

Da dx_i , dy_i , dz_i gegebene Fortschreitungen sind.

Wenn

$$(9) \quad \cos^2 \theta = \frac{(G_{ij} du^i du^j)^2}{(g_{ij} du^i du^j)(\bar{g}_{ij} du^i du^j)} = \frac{(H_{ij} du^i du^j)^2}{(g_{ij} du^i du^j)(h_{ij} du^i du^j)}$$

gilt, so folgt daraus

$$(10) \quad \frac{(G_{ij} du^i du^j)^2}{(g_{ij} du^i du^j)(\bar{g}_{ij} du^i du^j)} = \frac{(H_{ij} du^i du^j)^2}{(g_{ij} du^i du^j)(h_{ij} du^i du^j)}$$

oder

$$(11) \quad \frac{G_{ij} du^i du^j}{\sqrt{g_{ij} du^i du^j} \sqrt{\bar{g}_{ij} du^i du^j}} = \pm \frac{H_{ij} du^i du^j}{\sqrt{g_{ij} du^i du^j} \sqrt{h_{ij} du^i du^j}},$$

wo θ der Winkel zwischen dx_i und dy_i oder zwischen dx_i und dz_i ist.

Man kann (11) in

$$(12) \quad \frac{(y \xi)}{\sqrt{y y}} \pm \frac{(z \xi)}{\sqrt{z z}} = 0$$

setzen, wo (11) die lineare Gleichung von ξ ist.

1) NAKAJIMA, S. · Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 191.

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXXV)

Sôzi MATUMURA

Accepted for publication, October, 24, 1939.)

Im folgenden möchten wir einige Bemerkungen über die Theorie der Kreise und Kugeln machen.

(1)

Ist χ der Berührungspunkt zweier Kreise (Kugeln) $\hat{\xi}$ und η , so gibt es⁽¹⁾

$$\chi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta, \quad (\hat{\xi} \eta)^2 = 1.$$

(A) Gelten

$$(1) \quad \chi = \hat{\xi} - (\hat{\xi} \eta) \eta, \quad (\hat{\xi} \eta)^2 = 1$$

und

$$(2) \quad \chi = \eta - (\eta \hat{\xi}) \hat{\xi}, \quad (\eta \hat{\xi})^2 = 1$$

zugleich, so bekommen wir

$$(3) \quad 0 = \{\hat{\xi} - \eta\} + (\hat{\xi} \eta) \{\hat{\xi} - \eta\},$$

wo $\hat{\xi}$ und η zwei Kreise in R_2 und χ der Berührungspunkt von $\hat{\xi}$ und η ist; daraus ergibt sich

$$(4) \quad \{\hat{\xi} - \eta\} = 0$$

oder

$$(5) \quad 0 = 1 + (\hat{\xi} \eta),$$

so kann man wissen, dasz

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXVI, No. 6, November, 1939.]

1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd. (1925), S. 122.

$$(6) \quad \xi = \eta$$

gilt, wenn

$$(7) \quad (\xi \eta) = 1$$

ist; daraus folgt der

Satz: Berühren sich zwei Kreise ξ und η in R_2 innen und gelten

(1) und (2), so muss

$$\xi = \eta$$

sein.

(B) Berühren sich zwei Kreise $_{(1)}\eta$ und $_{(2)}\eta$ in R_2 im Punkt ξ , so erhalten wir

$$(1) \quad \xi = {}_{(0)}\xi - ({}_{(0)}\xi {}_{(1)}\eta) {}_{(1)}\eta$$

und

$$(2) \quad \xi = {}_{(0)}\xi - ({}_{(0)}\xi {}_{(2)}\eta) {}_{(2)}\eta;$$

daraus ergibt sich

$$(3) \quad ({}_{(0)}\xi {}_{(2)}\eta) {}_{(2)}\eta = ({}_{(0)}\xi {}_{(1)}\eta) {}_{(1)}\eta,$$

so folgt

$$(4) \quad ({}_{(0)}\xi {}_{(2)}\eta) ({}_{(2)}\eta \xi) = ({}_{(0)}\xi {}_{(1)}\eta) ({}_{(1)}\eta \xi),$$

wo ξ ein Kreis in R_2 und $_{(0)}\xi$ ein fester Kreis in R_2 ist.

Aus (4) kommt

$$(5) \quad ({}_{(0)}\xi {}_{(2)}\eta) \cos \phi = ({}_{(0)}\xi {}_{(1)}\eta) \cos \varphi$$

wo ϕ der Winkel zwischen $_{(2)}\eta$ und ξ und φ der zwischen $_{(1)}\eta$ und ξ ist.

(C) Es sei ein fester Kreis $_{(0)}\xi$ auf R_2 vorgegeben.

Nehmen wir n Punkte $_{(1)}\xi$, $_{(2)}\xi$, ..., $_{(n)}\xi$ auf $_{(0)}\xi$ so wie

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}_{(1)}\xi = {}_{(0)}\xi - ({}_{(0)}\xi {}_{(1)}\eta) {}_{(1)}\eta, \\ {}_{(2)}\xi = {}_{(0)}\xi - ({}_{(0)}\xi {}_{(2)}\eta) {}_{(2)}\eta, \\ \dots\dots\dots \\ {}_{(n)}\xi = {}_{(0)}\xi - ({}_{(0)}\xi {}_{(n)}\eta) {}_{(n)}\eta, \end{array} \right.$$

wo $_{(i)}\eta$ die Kreise in R_2 , die $_{(0)}\xi$ in dem Punkte $_{(i)}\xi$ berühren.

Dann gilt nach KUBOTA⁽¹⁾

$$(2) \quad 2\sqrt{n} r \tan \pi/n \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

wo man den Radius des grössten Kreises, welcher im konvexen Polygon enthalten ist, mit r bezeichnet und die Seiten des Polygons mit a_1, a_2, \dots, a_n .

Nach (1) kann man (2) mit ${}_{(0)}\hat{\epsilon}, {}_{(1)}\gamma, \dots, {}_{(n)}\gamma$ bezeichnen.

Weiter kann man die ähnlichen Beziehungen wie oben erhalten.

(D) Es sei ein fester Kreis ${}_{(0)}\hat{\epsilon}$ in R_2 gegeben.

Nehmen wir 3 Punkte

$$(1) \quad {}_{(1)}\mathfrak{L}, {}_{(2)}\mathfrak{L}, \dots, {}_{(n)}\mathfrak{L}$$

auf ${}_{(0)}\hat{\epsilon}$, wo

$$(2) \quad \begin{cases} {}_{(1)}\mathfrak{L} = {}_{(0)}\hat{\epsilon} - ({}_{(0)}\hat{\epsilon} {}_{(1)}\gamma) {}_{(1)}\gamma, \\ {}_{(2)}\mathfrak{L} = {}_{(0)}\hat{\epsilon} - ({}_{(0)}\hat{\epsilon} {}_{(2)}\gamma) {}_{(2)}\gamma, \\ {}_{(3)}\mathfrak{L} = {}_{(0)}\hat{\epsilon} - ({}_{(0)}\hat{\epsilon} {}_{(3)}\gamma) {}_{(3)}\gamma \end{cases}$$

gelten. Da ${}_{(1)}\gamma$ die Kreise in R_2 sind.

Wenn

$$(3) \quad {}_{(1)}\mathfrak{L} {}_{(2)}\mathfrak{L} + {}_{(2)}\mathfrak{L} {}_{(3)}\mathfrak{L} + \overline{{}_{(3)}\mathfrak{L} {}_{(1)}\mathfrak{L}}$$

gegeben ist, so haben wir

$$(4) \quad {}_{(1)}\mathfrak{L} {}_{(2)}\mathfrak{L} = \overline{{}_{(2)}\mathfrak{L} {}_{(3)}\mathfrak{L}} \text{ oder } {}_{(2)}\mathfrak{L} {}_{(3)}\mathfrak{L} = \overline{{}_{(3)}\mathfrak{L} {}_{(1)}\mathfrak{L}} \text{ oder } \overline{{}_{(3)}\mathfrak{L} {}_{(1)}\mathfrak{L}} = \overline{{}_{(1)}\mathfrak{L} {}_{(2)}\mathfrak{L}},$$

wenn der Inhalt von $\triangle {}_{(1)}\mathfrak{L} {}_{(2)}\mathfrak{L} {}_{(3)}\mathfrak{L}$ den Maximum-oder Minimumwert annehmen⁽²⁾.

Nach (2) kann man (3), (4) und den Inhalt von $\triangle {}_{(1)}\mathfrak{L} {}_{(2)}\mathfrak{L} {}_{(3)}\mathfrak{L}$ mit ${}_{(0)}\hat{\epsilon}, {}_{(1)}\gamma, {}_{(2)}\gamma$ und ${}_{(3)}\gamma$ bezeichnen.

Weiter kann man

$$(5) \quad 4d^2 - s^2 - \frac{44}{3\sqrt{3}}F$$

- (1) KUBOTA, T.: Einige Ungleichheiten für das Dreieck und das konvexe Polygon, Tôhoku Math. Journ., Vol. 25 (1925), S. 126.
- (2) NAKAJIMA (MATUMURA, eingeborener NAKAJIMA), S.: Some Inequalities between the Fundamental Quantities of the Triangle, Tôhoku Math. Journ., Vol. 25, S. 116.

$$(6) \quad 4R \left(R - \frac{4F}{s} \right)^2 \geq \left(\frac{s^2}{4} + \frac{4F^2}{s^2} - 2R^2 - \frac{5RF}{s} \right)^2$$

und

$$(7) \quad 2d^2 \geq s^2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} F, \quad \text{u. s. w.}$$

in des Verfassers Arbeit⁽¹⁾ mit ${}_{(0)}\xi$, ${}_{(1)}\eta$, ${}_{(2)}\eta$ und ${}_{(3)}\eta$ bezeichnen.

(E) Es sei eine feste Kugel ${}_{(0)}\xi$ in R_3 vorgegeben.

Nehmen wir $2n$ Punkte

$$(1) \quad {}_{(1)}\xi, {}_{(2)}\xi, \dots, {}_{(n)}\xi$$

auf ${}_{(0)}\xi$, wo

$$(2) \quad \begin{cases} {}_{(1)}\xi = {}_{(0)}\xi - ({}_{(0)}\xi {}_{(1)}\eta) {}_{(1)}\eta, \\ {}_{(2)}\xi = {}_{(0)}\xi - ({}_{(0)}\xi {}_{(2)}\eta) {}_{(2)}\eta, \\ \dots\dots\dots \\ {}_{(2n)}\xi = {}_{(0)}\xi - ({}_{(0)}\xi {}_{(2n)}\eta) {}_{(2n)}\eta \end{cases}$$

gelten. Da ${}_{(i)}\eta$ die Kugeln in R_2 bedeuten.

So kann man untersuchen MORLEYS⁽²⁾ und MUSSELMANS Arbeit im Kugelraum.

(F) Sind

$$(1) \quad {}_{(i)}\xi \quad [i = 1, 2, 3]$$

drei Punkte auf einem festen Kreise ξ , so gibt es

$$(2) \quad {}_{(i)}\xi = \{\xi - {}_{(i)}\eta\} \cdot \{1 + (\xi {}_{(i)}\eta)\}, \quad \text{u. s. w.},$$

wo ξ , ${}_{(1)}\eta$, ${}_{(2)}\eta$ und ${}_{(3)}\eta$ die Kreise in R_2 bedeuten; daraus ergibt sich

$$(3) \quad \overline{{}_{(1)}\xi {}_{(2)}\xi} = \overline{{}_{(2)}\xi {}_{(1)}\xi}$$

oder

(1) NAKAJIMA, a. a. O., S. 117.

(2) MORLEY, F. und MUSSELMAN, J. R.: On $2n$ Points with a real Cross-Ratio, American Journal of Mathematics, Vol. LIX (1937), S. 787.

$$(4) \quad \overline{(2)X(3)X} = (3)X(1)X$$

oder

$$(5) \quad \overline{(3)X(1)X} = (1)X(2)X,$$

falls der Inhalt von $\triangle (1)X(2)X(3)X$ maximal oder minimal ist, da

$$(6) \quad (1)X(2)X + \overline{(2)X(3)X} + \overline{(3)X(1)X} = \text{const.}$$

gilt⁽¹⁾.

Nach (2) kann man (3), (4), (5) und (6) mit ξ und $(i)Y$ bezeichnen⁽²⁾.

(G) Wir nehmen vier Punkte

$$(1) \quad (i)X \quad [i = 1, 2, 3, 4]$$

auf einer festen Kugel ξ in R_3 , wo

$$(2) \quad (i)X = \xi - (\xi (i)Y) (i)Y \quad [i = 1, 2, 3, 4]$$

gelten, so muss

$$(3) \quad \triangle (1)X(2)X(3)X = \triangle (1)X(3)X(4)X = \triangle (1)X(2)X(4)X$$

sein, wenn der Rauminhalt V von $(1)X(2)X(3)X(4)X$ die Maximum-oder Minimumwert annimmt, wo

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \triangle (1)X(2)X(3)X + \triangle (1)X(3)X(4)X + \triangle (1)X(2)X(4)X \\ + \triangle (2)X(3)X(4)X = \text{const.} \end{array} \right.$$

gültig ist, wo $(i)Y$ die Kugeln in R_3 bedeuten.

Nach (2) kann man (3) und (4) mit ξ und $(i)Y$ bezeichnen.

(2)

Im folgenden möchten wir einige Bemerkungen über die Theorie der Kreise und Kugeln machen.

-
- (1) NAKAJIMA, S.: Some Inequalities between the Fundamental Quantities of the Triangles, Tôhoku Math. Journ., 25 (1925), S. 115.
 (2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXXII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI (1939), S. 89.

(A) Ist ξ ein Kreis in R_2 und η ein nicht auf ihm gelegener Kreis in R_2 , so ist⁽¹⁾

$$\zeta = 2(\eta \xi) \xi - \eta$$

der zu η in bezug auf den Kreis ξ inverse Kreis.

Gelten

$$(1) \quad \zeta = 2(\eta \xi) \xi - \eta$$

und

$$(2) \quad \zeta = 2(\xi \eta) \eta - \xi$$

zugleich, so haben wir

$$(3) \quad 0 = 2\{(\eta \xi) \xi - (\xi \eta) \eta\} + \{\xi - \eta\}$$

oder

$$(4) \quad 0 = 2(\xi \eta) \{\xi - \eta\} + \{\xi - \eta\};$$

daraus ergibt sich

$$(5) \quad \xi - \eta = 0$$

oder

$$(6) \quad 2(\xi \eta) + 1 = 0,$$

so folgt der

Satz: *Wenn*

$$2(\xi \eta) + 1 \neq 0$$

oder

$$2 \cos \phi + 1 \neq 0,$$

wo ϕ der Winkel zwischen ξ und η ist, so haben wir

$$\xi = \eta.$$

(B) Es seien vier Kreise χ , η , u und v in R_2 gegeben, wo

$$(\chi u) + (\eta v) = (\chi + \eta, u + v)$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität, IV Bd. (1925), S. 122.

oder

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \gamma$$

gültig ist, so folgt daraus

$$(u \, v) + (x \, v) = 0$$

oder

$$\cos \varphi + \cos \phi = 0,$$

wo φ der Winkel zwischen u und v , ϕ der zwischen x und v , α der zwischen x und u , ferner β der zwischen v und $u+v$ und endlich γ der zwischen $x+v$ und $u+v$ ist.

(C) Zwei Kugeln $x(u, v)$ und $\bar{x}(k, v)$ seien durch gleiche Parameterwerte so aufeinander abgebildet, dass entsprechende Fortschreitungsrichtungen aufeinander senkrecht stehen:

$$(1) \quad x^2 = \bar{x}^2 = 1, \quad x' \bar{x}' = 0, \quad x_u \bar{x}_u = x_v \bar{x}_v = x_u \bar{x}_v + x_v \bar{x}_u = 0.$$

Betrachten wir nun drei quadratische Differential koefizienten

$$(2) \quad x_u \bar{x}_v = G_{ij}, \quad x_v \bar{x}_u = g_{ij}, \quad x_v \bar{x}_v = \bar{g}_{ij},$$

so gibt es

$$(3) \quad x_v \bar{x}_u = -G_{ij}.$$

Wir betrachten

$$\cos \theta = \frac{(G_{ij} du^i du^j)^2}{(g_{ij} du^i du^j)(\bar{g}_{ij} du^i du^j)}$$

(4) sind bei Transformation des Parameters invariant. Weiter kann man untersuchen wie in des Verfassers Arbeit⁽¹⁾.

(D) Die Entfernung \overline{AB} zweier Punkte $A(A_3:A_1:A_2:A_0)$ und $B(B_3:B_1:B_2:B_0)$ ist durch den Ausdruck⁽²⁾

(1) NAKAJIMA S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 192.

(2) KLEIN, F.: Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie, Gesammelte Mathem. Abhandlungen, Bd. I. S. 268.

$$(1) \quad \overline{AB} = \frac{1}{2\varepsilon} \ln \frac{\{AB\} + \sqrt{\{AB\}^2 - \{AA\}\{BB\}}}{\{AB\} - \sqrt{\{AB\}^2 - \{AA\}\{BB\}}}$$

definiert, wo

$$(2) \quad \begin{cases} \{AA\} = \varepsilon^2 A_0^2 - \varepsilon^2 A_1^2 - \varepsilon^2 A_2^2 + A_3^2, \\ \{AB\} = \varepsilon^2 A_0 B_0 - \varepsilon^2 A_1 B_1 - \varepsilon^2 A_2 B_2 + A_3 B_3, \\ \{BB\} = \varepsilon^2 B_0^2 - \varepsilon^2 B_1^2 - \varepsilon^2 B_2^2 + B_3^2 \end{cases}$$

bedeuten.

Ist A ein fester Punkt und

$$(3) \quad \overline{AB} = \text{const.},$$

so kann man mit (1) einen Kreis bezeichnen.

Fallen A und B zusammen, so bezeichnet A oder B einen Punkt auf unserer Ebene.

(E) Wir betrachten

$$(1) \quad {}_{(1)}\mathfrak{L}, {}_{(2)}\mathfrak{L}, {}_{(3)}\mathfrak{L}, {}_{(4)}\mathfrak{L},$$

wo ${}_{(i)}\mathfrak{L}$ die Kugeln in R_3 bedeuten, so gibt es⁽¹⁾

$$(2) \quad \Delta {}_{(1)}\mathfrak{L} = 0, \quad \Delta {}_{(2)}\mathfrak{L} = 0, \quad \Delta {}_{(3)}\mathfrak{L} = 0$$

oder

$$(2') \quad \begin{cases} {}_{(1)}\mathfrak{L}_{uu} + {}_{(1)}\mathfrak{L}_{vv} + {}_{(1)}\mathfrak{L}_{ww} = 0, \\ {}_{(2)}\mathfrak{L}_{uu} + {}_{(2)}\mathfrak{L}_{vv} + {}_{(2)}\mathfrak{L}_{ww} = 0, \\ {}_{(3)}\mathfrak{L}_{uu} + {}_{(3)}\mathfrak{L}_{vv} + {}_{(3)}\mathfrak{L}_{ww} = 0, \end{cases}$$

wo

$$(3) \quad \begin{cases} {}_{(1)}\mathfrak{L}_u + {}_{(2)}\mathfrak{L}_v + {}_{(3)}\mathfrak{L}_w = 0, \\ {}_{(1)}\mathfrak{L}_v = {}_{(2)}\mathfrak{L}_u, \quad {}_{(1)}\mathfrak{L}_w = {}_{(3)}\mathfrak{L}_v, \quad {}_{(2)}\mathfrak{L}_w = {}_{(3)}\mathfrak{L}_u \end{cases}$$

gelten. Da u, v und w Parameter und

$$(4) \quad \Delta \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}$$

ist.

(1) MIRENDORFF, H.: Halborthogonale und halbkonforme Abbildungen im Raume, Deutsche Mathematik, Vierter Jahrgang, Juni 1939, S. 294.

Indem wir (4) in

$$(5) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}$$

setzen, können wir erhalten

$$(6) \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} {}_{(1)}\xi = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} {}_{(2)}\xi = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} {}_{(3)}\xi = 0.$$

Wir setzen (2) in die Form

$$(7) \quad \Delta F \equiv \gamma_{ik} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^k} - \Gamma_{ik}^l \cdot \frac{\partial F}{\partial u^l} \right\} = 0,$$

wo

$$(8) \quad \gamma_{12} = \frac{\partial {}_{(1)}\xi}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial {}_{(1)}\xi}{\partial u^2}; \quad \dots, \quad F = {}_{(1)}\xi, \quad [u^1 = u, v, w]$$

ist und Γ_{ik}^l die CHRISTOFFEL-Symbole bedeutet, so folgt⁽¹⁾ aus

$$(9) \quad g^{\mu\nu} F_{,\mu} = 0,$$

$$(10) \quad F = A \int \frac{J}{g^{\frac{1}{2}} \bar{g}^{\frac{1}{2}}} \frac{ds}{s^{n-1}} + B,$$

wo

$$(11) \quad g_{\mu\nu} = ({}_{(1)}\xi_\mu, {}_{(1)}\xi_\nu)$$

gesetzt ist.

(F) Sind

$$(1) \quad {}_{(1)}\xi, {}_{(2)}\xi, \dots, {}_{(n)}\xi$$

die Kreise in R_3 , so bezeichnet $\sum_n {}_{(1)}\xi$ einen Kreis in R_3 , und wir bekommen so

$$(2) \quad \langle {}_{(1)}\xi - \xi \rangle + \langle {}_{(2)}\xi - \xi \rangle + \dots + \langle {}_{(n)}\xi - \xi \rangle = 0,$$

wo

$$(3) \quad n \xi = \sum {}_{(1)}\xi$$

gesetzt ist.

1) Vergl. RUSE, H. S.: On the elementary solution of LAPLACES Equation. Proceeding of the Edinburgh Math. Society, Vol. II (1930-1931), S. 137.

$$(4) \quad {}_{(i)}x - x$$

bezeichnet den Tangentenabstand ${}_{(i)}a$ zwischen zwei Kreisen ${}_{(i)}x$ und x , so folgt aus (2)

$$(5) \quad \sum {}_{(i)}a = 0.$$

Wenn die Quadrate von Tangentenabständen

$$(6) \quad \sum {}_{(i)}a^2$$

ein Minimum-oder Maximumwert annehmen, so folgt aus (6)

$$(7) \quad \frac{\partial \sum {}_{(i)}a^2}{\partial x} = 0$$

oder

$$(8) \quad \{ {}_{(1)}x - x \} + \{ {}_{(2)}x - x \} + \dots + \{ {}_{(n)}x - x \} = 0,$$

die nicht anders als (2) ist, wo ${}_{(i)}x$ die festen Kreise und x ein veränderlicher Kreis ist.

Weiter ist gültig

$$(9) \quad x = \frac{p_1 {}_{(1)}x + p_2 {}_{(2)}x + \dots + p_n {}_{(n)}x}{p_1 + p_2 + \dots + p_n},$$

wo p_i konstant sind, so folgt aus (9)

$$(10) \quad p_1 \{ {}_{(1)}x - x \} + p_2 \{ {}_{(2)}x - x \} + \dots + p_n \{ {}_{(n)}x - x \} = 0.$$

Wenn

$$(11) \quad \begin{cases} \sum p \{ {}_{(i)}x - x \}^2 = p_1 \{ {}_{(1)}x - x \}^2 + p_2 \{ {}_{(2)}x - x \}^2 \\ \quad + \dots + p_n \{ {}_{(n)}x - x \}^2 \end{cases}$$

einen Maximum-oder Minimumwert annehmen, so folgt daraus

$$(12) \quad x = \frac{\sum p {}_{(i)}x}{\sum p};$$

daraus ergibt sich (9).

(G) Wir betrachten eine Figur F, die aus $(mn + kp)$ Kugeln

$$(1) \quad x^a \quad [a = I, II, \dots, mn + kp]$$

in R_n besteht, wo m, n, k und p ganze Zahlen sind, so besteht (1) aus $2m$ Punkten und k Kreisen in R_n .

In unserem Falle kann man untersuchen wie in des Verfassers Arbeit⁽¹⁾, da

$$(2) \quad 2 \leq p < n$$

ist.

(H) Wir betrachten eine Transformation

$$(1) \quad \bar{x}^i = \varphi^i(x, p), \quad \bar{p}_i = \psi_i(x, p)$$

wo

$$(2) \quad p_i d\bar{x}^i = p_\alpha d x^\alpha$$

gültig ist. Da x^i, p^i, \bar{x}^i und \bar{p}^i die Kugeln in R_n bedeuten.

Aus (1), (2) folgt

$$(3) \quad \begin{cases} \psi_i \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\alpha} d x^\alpha + \frac{\partial \varphi^i}{\partial p_\alpha} d p_\alpha \right) = p_\alpha d x^\alpha, \\ d x^i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^\alpha} d x^\alpha + \frac{\partial \varphi^i}{\partial p_\alpha} d p_\alpha, \quad d \bar{p}_i = \frac{\partial \psi_i}{\partial x^\alpha} d x^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial p_\alpha} d p_\alpha; \end{cases}$$

daraus ergibt sich

$$(4) \quad p_i \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} = p_\alpha, \quad \bar{p}^i \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial p_\alpha} = 0.$$

Aus (4) folgen

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial p_i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial p_\alpha} = 0, \\ \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial p_\alpha} = \delta_\alpha^i, \\ \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial p_\alpha} = 0. \end{cases}$$

Aus (3) und (5) erhalten wir

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXXII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI (1939), S. 117.

$$(6) \quad \begin{cases} d\bar{x}^i \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_\alpha} - d\bar{p}^i \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial q_\alpha} = d\bar{x}^\alpha, \\ d\bar{x}^i \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x^\alpha} - d\bar{p}^i \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} = -d\bar{p}_\alpha. \end{cases}$$

Sind $d\bar{x}^i$ und $d\bar{p}^i$ voneinander unabhängig, so folgt

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}, & \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_i} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}, \\ \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial p_i} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial p_\alpha} = 0, & \frac{\partial \bar{p}^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial x^i} = 0, \end{cases}$$

wenn

$$(8) \quad \begin{cases} d\bar{x}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} d\bar{x}^i + \frac{\partial x^\alpha}{\partial p_i} d\bar{p}_i, \\ d\bar{p}_\alpha = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^i} d\bar{x}^i + \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_i} d\bar{p}_i. \end{cases}$$

gilt, daraus ergeben sich

$$(9) \quad \begin{cases} (\bar{p}_\alpha, \bar{p}_\beta) \equiv \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial p_\beta}{\partial x^i} - \frac{\partial p_\beta}{\partial p_i} \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^i} = 0, \\ (\bar{p}_\alpha, \bar{x}^\beta) \equiv \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^i} - \frac{\partial x^\beta}{\partial p_i} \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^i} = \delta_\alpha^\beta, \\ (\bar{x}^\alpha, \bar{x}^\beta) \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial p_i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^i} - \frac{\partial x^\beta}{\partial p_i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} = 0, \end{cases}$$

so haben wir

$$(10) \quad (\bar{x}^i, \bar{x}^j) = 0, \quad (\bar{p}_i, \bar{x}^j) = \delta_i^j, \quad (\bar{p}_i, \bar{p}_j) = 0,$$

wo

$$(11) \quad (u, v) \equiv \frac{\partial u}{\partial p_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial v}{\partial p_\alpha}.$$

Weiter kann man untersuchen wie in EISENHARTS und KNEBELMANS Arbeit¹⁾.

1) EISEHART, L. P. und KNEBELMAN, M. S.: Invariant theory of homogeneous contact transformations, *Annals of Mathematics*, Vol. 37, 1936, S. 747.

(I) Wir betrachten die Kugeln

$$(1) \quad {}_{(i)}\mathfrak{K}(t) \quad [i = 1, 2, \dots]$$

in R_n , die mit

$$(2) \quad (n+2) {}_{(n+2)}\mathfrak{K}(t) - (2n+3)t {}_{(n+1)}\mathfrak{K}'(t) + (n+1) {}_{(n)}\mathfrak{K}(t) = 0$$

verbunden sind¹⁾, so folgt daraus

$$(3) \quad n = -3,$$

wenn

$$(4) \quad ({}_{(i)}\mathfrak{K} {}_{(i+2)}\mathfrak{K}) = 1, \quad ({}_{(i)}\mathfrak{K} {}_{(i+1)}\mathfrak{K}) = 0, \quad [i = 1, 2, \dots]$$

gültig sind, wo t ein Parameter ist, so folgt der

Satz: Wenn unsere Kugeln (1), (2) und (4) erfüllen, so sind keine Kugeln da.

Nehmen wir

$$(5) \quad ({}_{(i)}\mathfrak{K} {}_{(i+2)}\mathfrak{K}) = 0, \quad ({}_{(i)}\mathfrak{K} {}_{(i+1)}\mathfrak{K}) = 1, \quad [i = 1, 2, \dots]$$

anstatt (4), so folgt derselbe Satz.

Aus (2) und (4) erhalten wir

$$(6) \quad \begin{cases} (n+2) {}_{(n+2)}\mathfrak{K}'(t) - (2n+3) {}_{(n+1)}\mathfrak{K}(t) \\ - (2n+3)t {}_{(n+1)}\mathfrak{K}'(t) + (n+1) {}_{(n)}\mathfrak{K}(t) = 0, \end{cases}$$

$$(7) \quad ({}_{(i)}\mathfrak{K}' {}_{(i+2)}\mathfrak{K}) + ({}_{(i)}\mathfrak{K} {}_{(i+2)}\mathfrak{K}') = 0$$

und

$$(8) \quad ({}_{(i)}\mathfrak{K}' {}_{(i+1)}\mathfrak{K}) + ({}_{(i)}\mathfrak{K} {}_{(i+1)}\mathfrak{K}') = 0,$$

so folgt daraus

$$(9) \quad \begin{cases} (n+2) ({}_{(n+2)}\mathfrak{K}' {}_{(n+1)}\mathfrak{K}) - (2n+3) - (2n+3) ({}_{(n+1)}\mathfrak{K}' {}_{(i+1)}\mathfrak{K}) t \\ + (n+1) ({}_{(n)}\mathfrak{K}' {}_{(n+1)}\mathfrak{K}) = 0 \end{cases}$$

oder

$$(10) \quad (n+2) ({}_{(n+1)}\mathfrak{K}' {}_{(n+2)}\mathfrak{K}) + (2n+3) + (n+1) ({}_{(n)}\mathfrak{K} {}_{(n+1)}\mathfrak{K}') = 0,$$

1) Sin P_n LEGENDRES Polynome, so gibt es
 $(n+2) P_{n+2} - (2n+3) x P_{n+1} + (n+1) P_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

denn

$$(11) \quad ({}_{(n+1)}\xi_{{}_{(n+1)}\xi}) = 1$$

ist gültig. Man ersieht so aus (10), dass (10) für jedes ξ gilt, wenn

$$(12) \quad ({}_{(n+1)}\xi'_{{}_{(n+2)}\xi}) = -1, \quad ({}_{(n)}\xi_{{}_{(n+1)}\xi'}) = -1$$

sind.

Von

$$(13) \quad (1-t^2)({}_{(n)}\xi'(t) + nt_{{}_{(n)}\xi} - n_{{}_{(n-1)}\xi}) = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

gilt das Gleiche.

(J) Wir betrachten p Punktepaare

$$\xi^\alpha \quad [\alpha = I, II, \dots, 2p],$$

wo ξ^α die Kreise in R_2 bedeuten, so kann man untersuchen wie in des Verfassers früherer Arbeit⁽¹⁾.

(K) Wir betrachten⁽²⁾

$$(1) \quad \alpha(\tau) = q_1 \cos \tau + q_2 \sin \tau,$$

wo α , q_1 und q_2 die Kreise in R_2 und

$$(2) \quad q_1 \perp q_2$$

ist. Da q_1 und q_2 die konstanten Vektoren bedeuten.

Die Ableitung von $\alpha(\tau)$ ist

$$(3) \quad \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} = -q_1 \sin \tau + q_2 \cos \tau = \alpha\left(\tau + \frac{\pi}{2}\right).$$

Weiter können wir wissen, dass

$$(4) \quad \frac{d\alpha^2}{d\tau} = 2\alpha \frac{d\alpha}{d\tau} = 2q_1 \cdot q_2 \cos 2\tau + (q_2^2 - q_1^2) \sin \tau$$

gilt, wo τ Parameter ist.

Wir können

1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI (1939), S. 367.

(2) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb., Univ., IV Bd., 1926, S. 132.

$$(5) \quad \begin{cases} a(\tau) = q_1 \cos \tau_0 + q_2 \sin \tau_0 \cos \tau' + (-q_1 \sin \tau_0 \\ \quad \quad \quad + q_2 \cos \tau_0) \sin \tau, \\ \mathfrak{B} = q_1 \cos \tau_0 + q_2 \sin \tau_0, \quad \mathfrak{C} = -q_1 \sin \tau + q_2 \cos \tau, \end{cases}$$

setzen, wo \mathfrak{B} und \mathfrak{C} die Kreise in R_2 sind,

(L) Im folgenden möchten wir A-Fläche in EISENHARTS Arbeit⁽¹⁾ erklären.

Sind

$$(1) \quad {}_{(1)}\mathfrak{L} \quad [i = 1, 2, \dots, n]$$

A-Fläche, so muss

$$(2) \quad \mathfrak{L} = \sum {}_{(i)}\mathfrak{L}/n$$

auch A-Fläche sein.

Wenn umgekehrt \mathfrak{L} und ${}_{(1)}\mathfrak{L}, {}_{(2)}\mathfrak{L}, \dots, {}_{(j-1)}\mathfrak{L}, {}_{(j+1)}\mathfrak{L}, \dots, {}_{(n)}\mathfrak{L}$ A-Fläche sind, so muss auch ${}_{(j)}\mathfrak{L}$ A-Fläche sein.

Weiter kann man wissen, dass, wenn alle

$$(3) \quad {}_{(i)}\mathfrak{L} \quad [i = 1, 2, \dots, n]$$

Kugeln sind, so \mathfrak{L} auch Kugel sein muss.

Wenn umgekehrt alle

$$(4) \quad \mathfrak{L} \text{ und } {}_{(1)}\mathfrak{L}, {}_{(2)}\mathfrak{L}, \dots, {}_{(j-1)}\mathfrak{L}, {}_{(j+1)}\mathfrak{L}, \dots, {}_{(n)}\mathfrak{L}$$

Kugeln sind, so muss ${}_{(j)}\mathfrak{L}$ auch Kugel sein.

(M)

$$(1) \quad a_\nu \mathfrak{L}^\nu \quad [\nu = 1, 2, \dots, n]$$

bezeichnet einen Kreis in R_2 , wo \mathfrak{L}^ν die Kreise in R_2 sind, so bezeichnet

$$(2) \quad \mathfrak{L}^\lambda = a_k^\lambda \mathfrak{L}^k$$

die Kreise in R_2 , a_ν und a_k^λ die skalaren Größen bedeuten.

(1) EISENHART, L. P.: Surface with the same spherical Representation of their Lines of Curvature as Pseudospherical Surfaces, American Journ. of Math., Vol. XXVII (1905), S. 113.

Da sind gültig

$$(3) \quad \bar{\eta}^\lambda = a_\nu^\lambda \eta^\nu, \quad \bar{\xi}_\nu = \beta_\nu^\lambda \xi_\lambda, \quad a_\lambda a_\mu^\lambda = \delta_\mu^\nu.$$

Nun setzen wir

$$(4) \quad \sum d\xi d\eta = g_{ij} du^i du^j,$$

so folgt daraus

$$(5) \quad g_{ij} du^i du^j = 0,$$

wenn

$$(6) \quad \sum d\xi d\eta = 0.$$

Aus (5) ergibt sich

$$(7) \quad \begin{cases} g_{r,} du^r dn^s = A^{ij} \lambda_{r,} \lambda_{j,} du^r du^s \\ \quad \quad \quad = A^{ij} (\lambda_{i,} du^r) (\lambda_{j,} du^s) \\ \quad \quad \quad = 0. \end{cases}$$

Wir setzen

$$(8) \quad \cos^2 \theta = \frac{(G_{ij} du^i du^j)^2}{(g_{ij} du^i du^j)(\bar{g}_{ij} du^i du^j)},$$

wo

$$(9) \quad \begin{cases} \sum d\xi d\eta = G_{ij} du^i du^j, & \sum (d\xi)^2 = g_{ij} du^i du^j, \\ \sum (d\eta)^2 = \bar{g}_{ij} du^i du^j, \end{cases}$$

so muß der extreme Wert $\cos \theta$ bei Änderung des Wertes $du^i: du^s$ genügen den Beziehungen

$$(10) \quad (\cos \theta \cdot \bar{g}_{rs} - G_{rs}) du^r du^s = 0,$$

daraus folgt für $\cos \theta$ die Gleichung

$$(11) \quad |\cos \theta \cdot \bar{g}_{rs} - G_{rs}| = 0,$$

wo

$$(12) \quad (\bar{g}_{ij} du^i du^j)^2 = (g_{ij} du^i du^j)(\bar{g}_{ij} du^i du^j).$$

Weiter können wir untersuchen wie üblich,

(3)

(A) Es seien die Kreise \mathfrak{K} und $\overline{\mathfrak{K}}(t)$ in R_s vorgegeben, wo t Parameter ist.

Ist

$$(1) \quad \eta = \rho_a \xi^a \quad [a = I, II]$$

eine normierte Kugel durch \mathfrak{K} , da

$$(2) \quad \eta \eta = \rho_a \rho_a A^{aa} = 1$$

gilt, so gibt es⁽¹⁾

$$(3) \quad \cos^2 \varphi(t) = \rho_a \rho_a T^{aa}(t),$$

wo $\varphi(t)$ der Winkel zwischen η und $\overline{\mathfrak{K}}(t)$ ist.

Aus (3) können wir

$$(4) \quad \sin 2\varphi(t) = -\rho_a \rho_a T'^{aa}(t)$$

erhalten, da

$$(5) \quad T' = d/dt \cdot T,$$

so folgt aus (4)

$$(6) \quad \rho_a \rho_a T'(t)^{aa} = 0,$$

wenn

$$(7) \quad \sin 2\varphi(t) = 0$$

gültig ist.

Aus (6) können wir zwei Werte von $\rho_1 : \rho_2$ oder zwei Kugeln von η erhalten.

$\mathfrak{K}(t)$ bedeutet die Kreisfläche (\mathbf{K}) in R_s , da ist $\overline{\mathfrak{K}}(t)$ die Erzeugenden von (\mathbf{K}), so bezeichnet φ in (3) den Winkel zwischen η und der Erzeugenden von (\mathbf{K}).

Sind \mathfrak{K} und \mathfrak{K} zwei fest Kreise in R_s , so haben wir

(1) NAKAJIMA S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 196.

$$(8) \quad \cos^2 \varphi(\tau) = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)$$

wo η veränderlich ist. Da bedeutet t den Parameter.

Sind η und $\bar{\mathfrak{R}}$ beide veränderlich, so können wir setzen

$$(9) \quad \cos^2 \varphi(t, \tau) = T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau),$$

wo

$$(10) \quad \eta = \eta(\tau), \quad \bar{\mathfrak{R}} = \bar{\mathfrak{R}}(t).$$

Da sind t und τ Parameter.

Wir können (9) in die Form

$$(11) \quad \cos^2 \varphi(t, \tau) = \frac{T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}$$

setzen, so erhalten wir

$$(12) \quad -\sin 2\varphi(t, \tau) \cdot \frac{\partial \varphi(t, \tau)}{\partial t} = \frac{T'^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)},$$

daraus folgt

$$(13) \quad T'^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau) = 0,$$

wenn $\varphi(t, \tau)$ von t unabhängig ist.

Aus (11) kommt

$$(14) \quad \begin{cases} \sin^2 \varphi(t, \tau) = \frac{\{A^{\alpha\beta}(\tau) - T^{\alpha\beta}(t)\} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}, \\ \tan^2 \varphi(t, \tau) = \frac{\{A^{\alpha\beta}(\tau) - T^{\alpha\beta}(t)\} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}, \end{cases}$$

u. s. w..

Ist $t = \text{const.}$, so folgt aus (14)

$$(15) \quad \sin 2\varphi(t, \tau) \cdot \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\{A^{\alpha\beta}(\tau) - T^{\alpha\beta}(t)\} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)},$$

daraus kommt

$$(16) \quad \frac{\{A^{\alpha\beta}(\tau) - T^{\alpha\beta}(t)\} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)} = \text{Funktion von } t \text{ allein,}$$

wenn φ = die Funktion von t allein ist.

Sind τ und t gegeben, so sind η und $\bar{\mathfrak{R}}$ fest; der Winkel φ zwischen η und $\bar{\mathfrak{R}}$ wird so durch (3) und (14) bestimmt.

Gilt

$$(17) \quad \cos^2 \varphi(t_1, \tau_1) = \cos^2 \varphi(t_2, \tau_2),$$

so folgt aus (11)

$$(18) \quad \frac{T^{\alpha\beta}(t_1) \rho_\alpha(\tau_1) \rho_\beta(\tau_1)}{A^{\alpha\beta}(\tau_1) \rho_\alpha(\tau_1) \rho_\beta(\tau_1)} = \frac{T^{\alpha\beta}(t_2) \rho_\alpha(\tau_2) \rho_\beta(\tau_2)}{A^{\alpha\beta}(\tau_2) \rho_\alpha(\tau_2) \rho_\beta(\tau_2)},$$

wobei sich $t_1 \neq t_2$, $\tau_1 \neq \tau_2$ befinden.

Ist η fest und gilt

$$(19) \quad \cos^2 \varphi = \text{const.},$$

so kommt aus (11)

$$(20) \quad \frac{T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau_0) \rho_\beta(\tau_0)}{A^{\alpha\beta}(\tau_0) \rho_\alpha(\tau_0) \rho_\beta(\tau_0)} = \text{const.},$$

da ist τ_0 ein konstanter Wert von τ , und t veränderlich.

Weiter gilt

$$(21) \quad \frac{T^{\alpha\beta}(t_0) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)} = \text{const.},$$

wenn es

$$(22) \quad \cos^2 \varphi(t_0, \tau) = \text{const.}$$

in (11) gibt, wo t_0 konstant und τ veränderlich ist.

Es seien drei Kreise \mathfrak{R} , $\bar{\mathfrak{R}}(t)$ und $\bar{\mathfrak{R}}(t)$ in \mathfrak{R}_3 vorgegeben, wo t ein Parameter ist.

Ist

$$(23) \quad \eta = \rho_\alpha \xi^\alpha$$

eine normierte Kugel \mathfrak{R} , wo

$$(24) \quad \eta \eta = \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1$$

gilt, so folgt daraus

$$(25) \quad \cos^2 \bar{\varphi}(t) = \rho_\alpha \rho_\beta \bar{T}^{\alpha\beta}(t)$$

wo $\bar{\varphi}(t)$ der Winkel zwischen \mathfrak{y} und $\bar{\mathfrak{R}}(t)$ ist.

Es folgt so daraus

$$(26) \quad T^{11} = \bar{T}^{11}, \quad T^{12} = \bar{T}^{12}, \quad T^{22} = \bar{T}^{22},$$

wenn

$$(27) \quad \frac{T^{22}(t) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)}{A^{22}(\tau) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)} = \frac{\bar{T}^{22}(t) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)}{A^{22}(\tau) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)}$$

für alle Werte von

$$(28) \quad \rho_t : \rho_{tt}$$

gültig ist, wo

$$(29) \quad \cos^2 \bar{\varphi}(t, \tau) = \frac{\bar{T}^{22}(t) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)}{A^{22}(\tau) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)}$$

ist, so folgt der

Satz: *Gilt*

$$(30) \quad \cos^2 \varphi(t, \tau) = \cos^2 \bar{\varphi}(t, \tau)$$

für alle Werte von (28), so ergibt sich (26).

Es gibt

$$(31) \quad \frac{T^{22}(t) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)}{A^{22}(\tau) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)} = \text{const.} \cdot \frac{\bar{T}^{22}(t) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)}{A^{22}(\tau) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)},$$

wenn

$$(32) \quad \cos^2 \varphi(t, \tau) = \text{const.} \cdot \cos^2 \bar{\varphi}(t, \tau)$$

gültig ist.

Die gemeinsame Summe J von $\cos^2 \varphi$ ist mit

$$(33) \quad J = \iint \cos^2 \varphi(t, \tau) dt d\tau = \iint \frac{T^{22}(t) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)}{A^{22}(\tau) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)} dt d\tau$$

gegeben.

Nun betrachten wir

$$(34) \quad \cos^2 \varphi(t, \tau) = T^{22}(t) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau),$$

wo

$$(35) \quad A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau) = 1,$$

so können wir wissen, dass für das Eintreten eines Extremums der Funktion $\cos^2 \varphi(t, \tau)$ an der Stelle $t=t_0$, $\tau=\tau_0$ unter der Nebenbedingung (35) — wenn nicht der Ausnahmefall eintritt, dass an der Stelle (t_0, τ_0) die beiden Gleichungen

$$(36) \quad \frac{\partial}{\partial t} \cos^2 \varphi(t, \tau) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \cos^2 \varphi(t, \tau) = 0$$

erfüllt sind — die folgende Bedingung notwendig ist, es gebe einen Proportionalitätsfaktor λ derart, dass zusammen mit der Gleichung⁽¹⁾

$$(37) \quad A^{\alpha\beta}(\tau_0) \rho_\alpha(\tau_0) \rho_\beta(\tau_0) = 1$$

auch die beiden Gleichungen

$$(38) \quad -\frac{\partial}{\partial t} \cos^2 \varphi(t_0, \tau_0) + \lambda + \frac{\partial}{\partial t} A^{\alpha\beta}(\tau_0) \rho_\alpha(\tau_0) \rho'_\beta(\tau_0) = 0,$$

$$(39) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \cos^2 \varphi(t_0, \tau_0) + \lambda \frac{\partial}{\partial t} A^{\alpha\beta}(\tau_0) \rho_\alpha(\tau_0) \rho_\beta(\tau_0) = 0$$

gelten,

Die eben formulierte Regel nennen wir die *Multiplikatorenregel von LAGRANGE* und den Faktor λ den *LAGRANGESchen Multiplikator*.

Setzen wir

$$(40) \quad \cos^2 \varphi(t, \tau) = \frac{T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)} \equiv f(t, \tau),$$

so können wir wissen, dass, wenn an einer Stelle (t_0, τ_0) ausser den beiden Gleichungen

$$(41) \quad f_t(t_0, \tau_0) = 0, \quad f_\tau(t_0, \tau_0) = 0$$

noch die Ungleichung

$$(42) \quad f_{tt} f_{\tau\tau} - f_{t\tau}^2 > 0$$

gilt⁽²⁾, so die Stelle einen Extremwert liefert, und zwar ein Maximum,

(1) Vgl. z. B. COURANT, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Zweiter Band (1929), Berlin, S. 140.

(2) COURANT, a. a. O., S. 153.

falls $f_{\tau\tau} < 0$ (und daher auch $f_{\tau\tau} < 0$) ist, und ein Minimum, falls $f_{\tau\tau} > 0$ ist.

Ist dagegen

$$(43) \quad f_{\tau\tau} f_{\tau\tau} - f_{\tau\tau}^2 < 0,$$

so haben wir es mit keiner Extremalstelle zu tun; der Fall

$$(44) \quad f_{\tau\tau} f_{\tau\tau} - f_{\tau\tau}^2 = 0$$

bleibt hier unentschieden.

Wir betrachten

$$(45) \quad \cos^2 \varphi(t, \tau) = T^{ab}(t) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)$$

anstatt (11), wo

$$(46) \quad A^{ab}(\tau) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau) = 1$$

gilt, so haben wir zwei quadratische Formen

$$(47) \quad A^{ab}(\tau) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau); \quad T^{ab}(t) \rho_a(\tau) \rho_b(\tau)$$

und wir können solches Formenpaar immer durch eine Transformation in das Formenpaar

$$(48) \quad \rho_I^2(\tau) + \rho_{II}^2(\tau); \quad T^{11}(t) \rho_I^2(\tau) + T^{22}(t) \rho_{II}^2(\tau)$$

überführen.

Wir setzen

$$(49) \quad \rho_I = \cos \tau, \quad \rho_{II} = \sin \tau, \quad T^{11} = \cos t, \quad T^{22} = \sin t$$

in (48), so folgt aus (48)

$$(50) \quad \rho_I^2(\tau) + \rho_{II}^2(\tau) = 1, \quad T^{11} \rho_I^2 + T^{22} \rho_{II}^2 = \cos(t - \tau),$$

wo

$$(51) \quad t - \tau = \varphi(t, \tau)$$

ist.

Gilt

$$(52) \quad \varphi(t, \tau) = \pi/2 - \bar{\varphi}(t, \tau)$$

in (11) und (29), so kommt aus (11)

$$(53) \quad \frac{T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)} = \frac{\{A^{\alpha\beta}(t) - T^{\alpha\beta}(t)\} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}$$

oder

$$(54) \quad T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau) = \{A^{\alpha\beta}(t) - \bar{T}^{\alpha\beta}(t)\} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau).$$

Weiter ist gültig

$$(55) \quad \frac{T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)} = \frac{\{A^{\alpha\beta}(\tau) - T^{\alpha\beta}(t)\} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}{T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)}$$

wenn

$$(56) \quad \cos^2 \varphi(t, \tau) = \tan^2 \bar{\varphi}(t, \tau).$$

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} & [\{A^{\alpha\beta}(\tau) - T^{\alpha\beta}(t)\} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)] : [A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)] \\ & = [\{A^{\alpha\beta}(\tau) - T^{\alpha\beta}(t)\} \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)] : [T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)], \end{aligned} \right.$$

oder

$$T^{\alpha\beta}(t) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau) : A^{\alpha\beta}(\tau) \rho_\alpha(\tau) \rho_\beta(\tau)$$

wenn

$$(58) \quad \sin^2 \varphi(t, \tau) = \tan^2 \bar{\varphi}(t, \tau), \quad \text{u. s. w. .}$$

Ist (14₂) von den ρ_α unabhängig, so folgt daraus

$$(59) \quad \{A^{\alpha\beta}(\tau) - T^{\alpha\beta}(t)\} \text{ prop. } T^{\alpha\beta}(t).$$

Wenn

$$(60) \quad y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

gegeben ist, wo

$$(61) \quad x = \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

so können wir (60) immer in homogene Form

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} & y = a_0 \{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta\}^n + a_1 \{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta\}^{n-1} \cdot \{A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta\} + \dots \\ & + a_{n-1} \{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta\} \cdot \{A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta\}^{n-1} + a_n \{A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta\}^n \end{aligned} \right.$$

setzen, wo a , die Konstanten bedeuten.

(B) Wir betrachten zwei Kreise \mathfrak{K} und $\bar{\mathfrak{K}}$ im R_4 .

Ist

$$(1) \quad \eta = \rho_\alpha \xi^\alpha \quad [\alpha = I, II]$$

eine normierte Kugel durch \mathfrak{K} mit

$$(2) \quad \eta \eta = \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1,$$

so gilt

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = \rho_\alpha \rho_\beta T^{\alpha\beta},$$

wo φ den Winkel zwischen der Kugel (1) und dem Kreis \mathfrak{K} bedeutet⁽¹⁾.

Weiter können wir

$$(4) \quad \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xx}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xx}^2 - \Omega_{xx} \Omega_{yy}}}$$

in KLEINS Abhandlungen⁽²⁾ betrachten und untersuchen, wo Ω_{xx} , Ω_{xy} und Ω_{yy} die folgenden Ausdrücke bedeuten:

$$(5) \quad \begin{cases} \Omega_{xx} = T^{11} x_1^2 + 2 T^{12} x_1 x_2 + T^{22} x_2^2, \\ \Omega_{yy} = T^{11} y_1^2 + 2 T^{12} y_1 y_2 + T^{22} y_2^2, \\ \Omega_{xy} = T^{11} x_1 y_1 + T^{12} (x_1 y_2 + x_2 y_1) + T^{22} y_2^2. \end{cases}$$

(C) Es seien die Kreise

$$(1) \quad {}_{(i)}\mathfrak{K}, \quad {}_{(i)}\overline{\mathfrak{K}} \quad [i = 1, 2]$$

in R_3 gegeben.

Ist

$$(2) \quad {}_{(i)}\eta = {}_{(i)}\rho_\alpha {}_{(i)}\xi^\alpha$$

die normierte Kugel durch ${}_{(i)}\mathfrak{K}$, so folgen

$$(3) \quad ({}_{(i)}\eta {}_{(i)}\eta) = {}_{(i)}A^{\alpha\beta} {}_{(i)}\rho_\alpha {}_{(i)}\rho_\beta,$$

da sind gültig

$$(4) \quad \cos^2 {}_{(i)}\varphi = {}_{(i)}T^{\alpha\beta} {}_{(i)}\rho_\alpha {}_{(i)}\rho_\beta;$$

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34 (1931), S. 196.

(2) FRICKE, R. und OSTROWSKI, A.: FELIX KLEINES gesammelte mathematische Abhandlungen, I (1921), S. 268.

daraus folgt

$$(5) \quad \frac{\cos^2_{(1)} \varphi}{\cos^2_{(2)} \varphi} = \frac{{}_{(1)}T^{\alpha\beta} {}_{(1)}\rho_\alpha {}_{(1)}\rho_\beta}{{}_{(2)}T^{\alpha\beta} {}_{(2)}\rho_\alpha {}_{(2)}\rho_\beta}$$

oder

$$(6) \quad \frac{\cos^2_{(1)} \varphi}{\cos^2_{(2)} \varphi} = \frac{{}_{(1)}T^{\alpha\beta} {}_{(1)}\rho_\alpha {}_{(1)}\rho_\beta}{{}_{(2)}T^{\alpha\beta} {}_{(2)}\rho_\alpha {}_{(2)}\rho_\beta} \cdot \frac{{}_{(2)}A^{\alpha\beta} {}_{(2)}\rho_\alpha {}_{(2)}\rho_\beta}{{}_{(1)}A^{\alpha\beta} {}_{(1)}\rho_\alpha {}_{(1)}\rho_\beta}.$$

(D) Aus DE MOIVRES Satz⁽¹⁾

$$(1) \quad \begin{cases} \cos n \varphi = \cos^n \varphi - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \sin n \varphi = n \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots \end{cases}$$

ergeben sich

(3)

$$\begin{cases} \cos n \varphi = (T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta)^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2!} (T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta)^{n-2} \{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta\} \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} (T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta)^{n-4} \{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta\}^2 - \dots, \end{cases}$$

(4)

$$\begin{cases} \sin n \varphi = n (T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta)^{\frac{n-1}{2}} \{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta\}^{\frac{1}{2}} \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta)^{\frac{n-3}{2}} \{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta\}^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!} (T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta)^{\frac{n-5}{2}} \{(A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta\}^{\frac{5}{2}} - \dots \end{cases}$$

(1) TODHUNTER, L.: Plane Trigonometry, 1902, Kaishindo and Co., P. 215.

oder⁽¹⁾ aus (3) und (4) folgt

$$(5) \quad \begin{cases} \tan n\varphi = \frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi} \\ = \frac{n(T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta)^{\frac{n-1}{2}}\{(A^{\alpha\beta}-T^{\alpha\beta})\rho_\alpha\rho_\beta\}^{\frac{1}{2}} - \dots}{(T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta)^{\frac{n}{2}} - \dots} \end{cases}$$

(E) Aus DE MOIVRES Theorem ergibt sich

$$(1) \quad (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi; \quad i = \sqrt{-1},$$

so folgt aus (3) und (4)

$$(2) \quad \begin{cases} [(T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta)^{\frac{1}{2}} + i \{ (A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha\rho_\beta \}^{\frac{1}{2}}]^n = [(T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta)^{n/2} - \dots] \\ + i [n (T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta)^{\frac{n-1}{2}} \{ (A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha\rho_\beta \}^{\frac{1}{2}} - \dots] \end{cases}$$

(F) Wir betrachten

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

wieder.

Wenn ρ_α und ρ_β in (1) vertauschbar sind, so folgt aus (1)

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2$$

oder

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = T^{11} (\rho_1^2 + \rho_2^2) + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2,$$

da

$$(4) \quad A^{11} \rho_1^2 + 2 A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2 = 1,$$

wo in

$$(5) \quad A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 0$$

ρ_α und ρ_β vertauschbar sind; daraus ergibt sich

$$(6) \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = \{ T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2 \} \\ : \{ A^{11} \rho_1^2 + 2 A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2 \} \end{cases}$$

Weiter können wir wissen, dass

1) TODHUNTER, a. a. O., p. 216.

$$(7) \quad \sin^2 \varphi = \frac{(A^{11} - T^{11}) \rho_1^2 + 2(A^{12} - T^{12}) \rho_1 \rho_2 + (A^{22} - T^{22}) \rho_2^2}{A^{11} \rho_1^2 + 2A^{12} \rho_1 \rho_2 + A^{22} \rho_2^2}$$

$$(8) \quad \tan^2 \varphi = \frac{(A^{11} - T^{11}) \rho_1^2 + 2(A^{12} - T^{12}) \rho_1 \rho_2 + (A^{22} - T^{22}) \rho_2^2}{T^{11} \rho_1^2 + 2T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2}$$

u. s. w.

gelten, wenn ρ_α und ρ_β vertauschbar sind.

(G) Es seien zwei Kreise \mathfrak{K} und $\bar{\mathfrak{K}}$ in R_s gegeben.

Ist

$$(1) \quad \eta = \rho_\alpha \xi^\alpha$$

die normierte Kugel durch \mathfrak{K} , wo

$$(2) \quad (\eta \eta) = A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 1$$

gilt, so folgt daraus

$$(3) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

wo φ der Winkel zwischen η und $\bar{\mathfrak{K}}$ ist.

Betrachten wir eine andere normierte Kugel

$$(4) \quad \bar{\eta} = \rho_\alpha \bar{\xi}^\alpha,$$

wo

$$(5) \quad (\bar{\eta} \bar{\eta}) = A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 1,$$

so gilt

$$(6) \quad \cos^2 \bar{\varphi} = \bar{T}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta;$$

demnach folgt aus (3) und (6)

$$(7) \quad T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = \bar{T}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

wenn

$$(8) \quad \text{const. } \cos^2 \varphi = \cos^2 \bar{\varphi}$$

ist.

Wenn (8) für jeden Wert von ρ_α gilt, so folgt aus (7)

$$(9) \quad \text{const. } T^{\alpha\beta} = \bar{T}^{\alpha\beta}.$$

Gilt (8) weiter für vertauschbare ρ_a , so folgen

$$(10) \quad \begin{cases} \text{const. } T^{11} = \bar{T}^{11}, & \text{const. } T^{12} = \bar{T}^{12}, & \text{const. } T^{22} = \bar{T}^{22} \\ T^1 = T^2, & T^{11} = \bar{T}^{22}, & A^{11} = A^{22}, & \bar{A}^{11} = \bar{A}^{22}. \end{cases}$$

Anstatt (8) gilt

$$(11) \quad \text{const. } \cos^2 \varphi = \sin^2 (\pi/2 - \bar{\varphi}),$$

so folgt daraus

$$(12) \quad \text{const. } T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = (A^{\alpha\beta} - \bar{T}^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta;$$

hieraus folgt

$$(13) \quad \text{const. } T^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta},$$

wenn (12) für alle ρ_α gilt.

Gilt (11) für vertauschbare ρ_α , so folgt

$$(14) \quad \begin{cases} \text{const. } T^{11} = A^{11} - T^{11}, & \text{const. } T^{12} = A^{12} - T^{12}, \\ \text{const. } T^{22} = A^{22} - T^{22}, \\ T^{11} = T^{22}, & \bar{T}^{11} = \bar{T}^{22}, & A^{11} = A^{22}, & \bar{A}^{11} = \bar{A}^{22}. \end{cases}$$

Wenn

$$(15) \quad \text{const. } \cos^2 \varphi = \tan^2 \bar{\varphi}$$

immer gilt, so besteht

$$(16) \quad \text{const. } T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = \frac{(A^{\alpha\beta} - \bar{T}^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta}{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta},$$

oder

$$(17) \quad \frac{\text{const. } T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}{A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} = \frac{(\bar{A}^{\alpha\beta} - \bar{T}^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta}{\bar{T}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta}$$

für jede ρ_α , so folgt daraus

$$(18) \quad \begin{cases} \text{const. } \frac{T^{11}}{A^{11}} = \frac{\bar{A}^{11} - \bar{T}^{11}}{\bar{T}^{11}}, & \text{const. } = \frac{T^{12}}{A^{12}} = \frac{\bar{A}^{12} - \bar{T}^{12}}{\bar{T}^{12}} \\ \text{const. } \frac{T^{22}}{A^{22}} = \frac{\bar{A}^{22} - \bar{T}^{22}}{\bar{T}^{22}} \end{cases}$$

Wenn ρ_α vertauschbar sind, so haben wir (12) und

$$(19) \quad A^{11} = \bar{A}^{11}, \quad A^{22} = \bar{A}^{22}, \quad T^{11} = \bar{T}^{11}, \quad T^{22} = \bar{T}^{22}.$$

Gilt

$$(20) \quad \text{const.} \sin' \varphi = \tan^2 \bar{\varphi},$$

so folgt

$$(21) \quad \text{const.} (A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta = \frac{(\bar{A}^{\alpha\beta} - \bar{T}^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta}{\bar{T}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta};$$

daraus ergibt sich

$$(22) \quad \begin{cases} \text{const.} \{A^{11} - T^{11}\} = \frac{\bar{A}^{11} - \bar{T}^{11}}{\bar{T}^{11}}, \\ \text{const.} \{A^{12} - T^{12}\} = \frac{\bar{A}^{12} - \bar{T}^{12}}{\bar{T}^{12}}, \\ \text{const.} \{A^{22} - T^{22}\} = \frac{\bar{A}^{22} - \bar{T}^{22}}{\bar{T}^{22}}, \end{cases}$$

wo

$$(23) \quad A^{11} = \bar{A}^{11}, \quad A^{22} = \bar{A}^{22}, \quad T^{11} = \bar{T}^{11}, \quad T^{22} = \bar{T}^{22}$$

gültig sind, wenn (21) für jeden Wert von ρ_α gilt. Da ρ_α vertauschbar sind.

Wir betrachten $\cos^2 \varphi$ und $\cos^2 \bar{\varphi}$ in (3), (6) und setzen

$$(24) \quad \cos^2 \phi = \frac{1}{2} \{ \cos^2 \varphi + \cos^2 \bar{\varphi} \}$$

und nennen ϕ in (24) den Winkel zwischen \mathfrak{K} und \mathfrak{K} . Es gibt so

$$(25) \quad \begin{cases} \cos^2 \phi = \frac{1}{2} \{ \cos^2 \varphi + \cos^2 \bar{\varphi} \} \\ = \frac{1}{2} \{ T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta + \bar{T}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \} \\ = \frac{1}{2} \{ T^{\alpha\alpha} + \bar{T}^{\alpha\alpha} \} \rho_\alpha \rho_\alpha. \end{cases}$$

Gilt

$$(26) \quad \cos^2 \varphi = \cos^2 \bar{\varphi} = \cos^2 \bar{\varphi} = \dots$$

für jeden Wert von ρ_α und für jeden η , so nennen wir

$$(27) \quad {}_{(2)}\mathfrak{R}, {}_{(3)}\mathfrak{R}, \dots, {}_{(n)}\mathfrak{R}$$

zueinander parallel. Es ist dann

$$(28) \quad T^{\alpha\beta} = \overline{T}^{\alpha\beta} = \overline{T}^{\alpha\beta} = \dots$$

die Bedingung dafür, dass

$$(29) \quad {}_{(2)}\mathfrak{R}, {}_{(3)}\mathfrak{R}, \dots, {}_{(n)}\mathfrak{R}$$

zueinander parallel sind.

Wenn η zu ${}_{(i)}\mathfrak{R}$ [$i=2, 3, \dots, n$] senkrecht ist, so folgt

$$(30) \quad {}_{(i)}T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 0 \quad [i=2, 3, \dots, n].$$

(H) Aus

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

kommt

$$(2) \quad \varphi = \cos^{-1} \sqrt{T^{\alpha\beta} \overline{\rho}_\alpha \overline{\rho}_\beta},$$

daraus ergibt sich

$$(3) \quad \sinh \varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} = -i \sin i \{ \cos^{-1} \sqrt{T^{\alpha\beta} \overline{\rho}_\alpha \overline{\rho}_\beta} \}.$$

Weiter können wir

$$(4) \quad \cosh \varphi, \quad \tanh \varphi, \quad \text{u. s. w.}$$

berechnen.

Ist

$$(5) \quad \cos^2 \varphi = \text{const.},$$

so folgt daraus

$$(6) \quad T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = \text{const.}$$

(I) Es seien n Kreise

$$(1) \quad {}_{(i)}\mathfrak{R} \quad [i=1, 2, \dots, n]$$

in R_3 gegeben.

Ist

$$(2) \quad \eta = \rho_\alpha \xi^\alpha \quad [\alpha = I, II]$$

eine normierte Kugel durch ${}_{(1)}\mathfrak{K}$, so folgt daraus

$$(3) \quad \cos {}_{(1)}\varphi = {}_{(1)}T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta},$$

wo ${}_{(1)}\varphi$ der Winkel zwischen η und ${}_{(j)}\mathfrak{K}$ [$j=2, 3, \dots, n$] ist, da gilt

$$(4) \quad (\eta \eta) = A^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta} = 1.$$

Besteht

$$(5) \quad {}_{(2)}\varphi = {}_{(3)}\varphi = \dots = {}_{(n)}\varphi$$

immer, so erhalten wir

$$(6) \quad {}_{(2)}T_{\alpha\beta} = {}_{(3)}T_{\alpha\beta} = {}_{(4)}T_{\alpha\beta} = \dots = {}_{(n)}T^{\alpha\beta}.$$

(J) Es seien $\mathfrak{K}(t)$ und $\bar{\mathfrak{K}}(t)$ zwei Kreisflächen, deren Erzeugendekreise $\mathfrak{K}(t)$ und $\bar{\mathfrak{K}}(t)$ in R_3 sind, wo t Parameter ist.

Ist

$$(1) \quad \eta = \rho_{\alpha}(t) x^{\alpha}(t)$$

die normierte Kugel in R_3 durch $\mathfrak{K}(t)$ mit

$$(2) \quad (\eta \eta) = \rho_{\alpha}(t) \rho_{\beta}(t) A^{\alpha\beta}(t) = 1,$$

so muss

$$(3) \quad \cos^2 \varphi(t, \tau) = \rho_{\alpha}(t) \rho_{\beta}(\tau) T^{\alpha\beta}(t)$$

von ρ_{α} unabhängig sein, wobei $\varphi(t)$ die Winkel zwischen $\eta(t)$ und $\mathfrak{K}(t)$ bedeuten.

Nun betrachten wir zwei Kreisflächen $\mathfrak{K}(t)$ und $\bar{\mathfrak{K}}(t)$ im R_3 derart, dass alle durch die Kreise gehenden Kugeln die gleichen Winkel miteinander bilden, so ist dies nur dann möglich, wenn⁽¹⁾

$$T^{\alpha\beta}(t) \text{ prop. } A(t), \quad \bar{T}^{\alpha\beta}(t) \text{ prop. } \bar{A}_{\alpha\beta}(t)$$

gültig sind.

(K) Aus

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha} \rho_{\beta}, \quad \sin^2 \varphi = (A^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) \rho_{\alpha} \rho_{\beta},$$

1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math Joarn., Vol. 34 (1931), S. 196.

und

$$(2) \quad \cos^2 \bar{\varphi} = \bar{T}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta, \quad \sin^2 \bar{\varphi} = (\bar{A}^{\alpha\beta} - \bar{T}^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta,$$

können wir

$$(3) \quad \sin(\varphi + \bar{\varphi}) \sin(\varphi - \bar{\varphi})$$

berechnen, denn

$$(4) \quad \sin(\varphi + \bar{\varphi}) \sin(\varphi - \bar{\varphi}) = \sin^2 \varphi - \sin^2 \bar{\varphi}$$

gilt.

Weiter ist gültig

$$(5) \quad \begin{cases} \cos(\varphi + \bar{\varphi}) \cos(\varphi - \bar{\varphi}) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \bar{\varphi} = \cos^2 \bar{\varphi} - \sin^2 \varphi \\ = (T^{\alpha\beta} + \bar{T}^{\alpha\beta} - \bar{A}^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta = (\bar{T}^{\alpha\beta} + T^{\alpha\beta} - A^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta. \end{cases}$$

Wir können

$$(6) \quad \sin(\varphi + \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}}), \quad \cos(\varphi + \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}})$$

und

$$(7) \quad \tan(\varphi + \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}}), \quad \text{u. S. w.}$$

berechnen, weil gelten⁽¹⁾:

$$(8) \quad \begin{cases} \sin(\varphi + \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}}) = \sin \varphi \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\bar{\varphi}} + \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\bar{\varphi}} \\ + \sin \bar{\bar{\varphi}} \cos \varphi \cos \bar{\varphi} - \sin \varphi \sin \bar{\varphi} \sin \bar{\bar{\varphi}}, \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \cos(\varphi + \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}}) = \cos \varphi \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\bar{\varphi}} - \cos \varphi \sin \bar{\varphi} \sin \bar{\bar{\varphi}} \\ - \cos \bar{\varphi} \sin \varphi \sin \bar{\bar{\varphi}} - \cos \bar{\bar{\varphi}} \sin \varphi \sin \bar{\varphi} \end{cases}$$

$$(10) \quad \tan(\varphi + \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}})$$

$$= \frac{\sin \varphi \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\bar{\varphi}} + \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\bar{\varphi}} + \sin \bar{\bar{\varphi}} \cos \varphi \cos \bar{\varphi} - \sin \varphi \sin \bar{\varphi} \sin \bar{\bar{\varphi}}}{\cos \varphi \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\bar{\varphi}} - \cos \varphi \sin \bar{\varphi} \sin \bar{\bar{\varphi}} - \cos \bar{\varphi} \sin \varphi \sin \bar{\bar{\varphi}} - \cos \bar{\bar{\varphi}} \sin \varphi \sin \bar{\varphi}}$$

u. S. w..

(L) Ist $\cos^2 \varphi = 1$ in

(1) TODHUNTER, L.: Plane Trigonometry, Tokyo, 1902, S. 55 und 74.

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

wenn $\rho_I = 0$ und $\rho_{II} = 1$ ist, so folgt daraus

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = \rho_I^2 + 2 T^{12} \rho_I \rho_{II} + \rho_{II}^2,$$

wo ρ_I und ρ_{II} vertauschbar sind.

Aus (5) folgen

$$(3) \quad \rho_I + T^1 \rho_{II} = 0, \quad T^{12} \rho_I + \rho_{II} = 0$$

für Maximum-oder Minimumwert von $\cos^2 \varphi$, wo $T^{12} = \text{constant}$, aber ρ_I und ρ_{II} veränderlich sind.

Aus 3) kommt

$$(4) \quad \rho_I^2 = \rho_{II}^2,$$

so haben wir

$$(5) \quad \rho_I = \rho_{II}$$

oder

$$(6) \quad \rho_I = -\rho_{II};$$

daraus ergibt sich

$$(7) \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = \rho_I^2 + 2 T^{12} \rho_I + \rho_I = 2(1 + T^{12}) \rho_I^2 \\ \quad \quad \quad = 2(1 + T^{12}) \rho_I \end{cases}$$

für Maximum-oder Minimumwert von $\cos^2 \varphi$.

Gilt

$$(8) \quad \cos^2 \varphi = 0$$

für

$$(9) \quad \rho_I = 0, \quad \rho_{II} = 1,$$

so folgt daraus

$$(10) \quad \cos^2 \varphi = 2 T^{12} \rho_I \rho_{II},$$

wo

$$(11) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

ist. Da ρ_I und ρ_{II} miteinander vertauschbar sind.

Aus (10) folgt

$$(12) \quad \cos^2 \varphi = 0,$$

wenn $\rho_I = 0$ oder $\rho_{II} = 0$.

Wenn $T^{11} = 0$ in (1), so

$$(13) \quad \cos^2 \varphi = 2 T^{12} \rho_I \rho_{II} + T^{22} \rho_{II}^2;$$

daraus folgt

$$(14) \quad \cos^2 \varphi = 0,$$

wenn

$$(15) \quad \rho_{II} = 0.$$

Wenn

$$(16) \quad T^{22} = 0,$$

so

$$(17) \quad \cos^2 \varphi = T^{11} \rho_I^2 + 2 T^{12} \rho_I \rho_{II};$$

hieraus ersehen wir, dasz

$$(18) \quad \cos^2 \varphi = 0,$$

wenn

$$(19) \quad \rho_I = 0.$$

Von

$$(20) \quad \sin^2 \varphi = (A^{22} - T^{22}) \rho_I \rho_{II}, \quad \text{u. s. w.}$$

gilt das Gleiche.

(4)

Im folgenden möchten wir unsere Fundamentalgrößen⁽¹⁾

$$(\theta, \theta_t), \quad (\theta, \theta_\tau), \quad (\theta_\tau, \theta_\tau)$$

behandeln.

(1) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

(A) Betrachten wir eine Kreisfläche (\mathbf{K}), so ist die Gleichung von Minimallinien auf (\mathbf{K})

$$(1) \quad (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0.$$

Nach der Theorie der quadratischen Gleichung lässt sich eine derartige Gleichung zerspalten in

$$(2) \quad \begin{cases} [(\theta_i \theta_i) dt + \{(\theta_i \theta_\tau) + \sqrt{(\theta_i \theta_\tau)^2 - (\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau)}\} d\tau] \\ \times [(\theta_i \theta_i) dt + \{(\theta_i \theta_\tau) - \sqrt{(\theta_i \theta_\tau)^2 - (\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau)}\} d\tau] = 0, \end{cases}$$

so dass sie in zwei Differentialgleichungen von der Form

$$(3) \quad f(t, \tau) d\tau - \varphi(t, \tau) dt = 0,$$

nämlich in

$$(4) \quad (\theta_i \theta_i) dt + \{(\theta_i \theta_\tau) \pm \sqrt{(\theta_i \theta_\tau)^2 - (\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau)}\} d\tau = 0$$

zerfällt, die allerdings nur im Falle

$$(5) \quad (\theta_i \theta_\tau)^2 - (\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) \neq 0$$

voneinander verschieden sind.

Jede definiert eine einfach unendliche Kurvenschar auf (\mathbf{K}), und wenn $(\theta_i \theta_i)$, $(\theta_i \theta_\tau)$ und $(\theta_\tau \theta_\tau)$, wie wir immer annehmen, einwertige analytische Funktionen sind, geht durch jeden Flächenpunkt (t, τ) nur eine Kurve jeder Schar.

Demnach definiert eine Gleichung von der Form (1) ein Kurvennetz auf (\mathbf{K}), sobald

$$(6) \quad (\theta_i \theta_\tau)^2 - (\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) \neq 0$$

ist.

Beispielsweise definiert die Gleichung $dt d\tau = 0$, die sich der Form (1) unterordnet, die beiden Scharen

$$(7) \quad t = \text{const.}, \quad \tau = \text{const.},$$

also das Netz der Parameterlinien der Fläche (\mathbf{K}).

Wenn dagegen

$$(8) \quad (\theta_i \theta_\tau)^2 - (\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) = 0$$

ist, also die linke Seite von (1) ein vollständiges Quadrat in dt und $d\tau$ vorstellt, fallen beide Kurvenscharen in eine und dieselbe zusammen.

(B) Wir betrachten (1), wo

$$(1) \quad (\theta_t \theta_t) (\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_t \theta_\tau)^2 \neq 0$$

gilt.

Sind dabei (k_1) und (k_2) die beiden Fortschreitungsrichtungen $(d\tau : dt)$ eines Punktes (t, τ) längs der beiden Kurven des Netzes, so genügen k_1 und k_2 der quadratischen Gleichung für k :

$$(2) \quad (\theta_t \theta_t) + 2 (\theta_t \theta_\tau) k + (\theta_\tau \theta_\tau) k^2 = 0,$$

so dass

$$(3) \quad k_1 + k_2 = - \frac{2 (\theta_t \theta_\tau)}{(\theta_\tau \theta_\tau)}, \quad k_1 k_2 = \frac{(\theta_t \theta_t)}{(\theta_\tau \theta_\tau)}$$

st.

(C) Wir betrachten eine Kreisfläche (**K**), deren Bogenelement ds mit

$$(1) \quad ds^2 = (\tau^2 + c^2) dt^2 + d\tau^2$$

gegeben ist, so folgen daraus

$$(2) \quad (\theta_t \theta_t) = \tau^2 + c^2, \quad (\theta_t \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1,$$

wo c die Konstante bedeutet⁽²⁾.

Diese Fläche ist nicht anders als Rotationskreisfläche der Kettenlinie.

Aus (1) ersehen wir, dass die Minimallinie auf (**K**) mit der Gleichung

$$(3) \quad (\tau^2 + c^2) dt^2 + d\tau^2 = 0$$

gegeben wird.

Weiter betrachten wir die Kreisfläche, deren Bogenelement⁽²⁾ ds mit

(1) ELLIOTT, E. B.: A Course of Differential Geometry. Oxford, (1926) p. 26.

(2) CAMPBELL, a. a. O., p. 27-28.

$$(4) \quad ds^2 = d\tau^2 + (\phi(\tau))^2 dt^2$$

oder

$$(5) \quad ds^2 = d\tau^2 + \sin^2 \tau \cdot dt^2$$

oder

$$(6) \quad ds^2 = d\tau^2 + \sinh^2 \tau \cdot dt^2$$

oder

$$(7) \quad ds^2 = d\tau^2 + (e^{-\tau} - e^{\tau-2c})^2 dt^2$$

oder

$$(8) \quad ds^2 = d\tau^2 + e^{-2\tau} dt^2$$

gegeben ist so können wir untersuchen es wie in des Verfassers früheren Arbeit⁽¹⁾, wo c konstant ist.

(D) Im folgenden möchten wir die Kreisfläche untersuchen, deren Parameterlinien vertauschbar sind.

Die Gleichung von Minimallinien auf der Kreisfläche ist

$$(1) \quad (\theta, \theta_t) dt^2 + 2(\theta, \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2 = 0.$$

Wenn in (1) die Parameterlinien vertauschbar sind, so erhalten wir

$$(2) \quad dt^2 + 2(\theta, \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2 = 0,$$

die unsere Gleichung von Minimallinien ist.

Dies sind nicht anders als „äquidistante“ Kurven auf einer Kreisfläche⁽²⁾.

Aus (2) erhalten wir die folgenden Sätze.

(1) Definiert die Differentialgleichung

$$d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf unserer Kreisfläche keine Schar von Minimalkurven, so lautet die

1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI (1939), S. 336.

2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII, S. 251.

Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind :

$$\frac{d\tau}{dt} = - \frac{1 + (\theta, \theta_\tau) \lambda}{(\theta, \theta_\tau) + \lambda}.$$

(2) Ein Kurvennetz

$$A(t, \tau) dt^2 + 2B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf unserer Kreisfläche (V) ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$C - 2(\theta, \theta_\tau) B + A = 0$$

ist.

(3) Die Parameterlinien unserer Kreisfläche bilden immer ein Kurvennetz ohne Umwege.

(4) Wenn

$$(1) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(2) \quad \tau = \text{const.}$$

zueinander senkrecht sind, so folgt daraus

$$(3) \quad (\theta, \theta_\tau) = 0;$$

daraus ersehen wir, dasz

$$(4) \quad ds^2 = dt^2 + d\tau^2$$

gelten.

Aus (4) wissen wir, dasz die Diagonalkurven des Netzes mit

$$(5) \quad t \mp \tau = \text{const.}$$

gegeben sind.

(5) Um zwei Flächen F und \bar{F} von (V) konform aufeinander abzubilden, haben wir solche Parameter auf beiden Flächen von (V) einzuführen, in denen

$$(\theta_i \theta_\tau) = (\bar{\theta}_i \bar{\theta}_\tau)$$

gilt.

(6) Für die Nabelpunkte auf (V) ist gültig

$$L : M : N = 1 : (\theta_i \theta_\tau) : 1,$$

wo L, M und N die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung von (V) bedeuten.

(7) Es gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{L dt^2 + 2 M dt d\tau + N d\tau^2}{dt^2 + 2 (\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2},$$

wo $1/R$ die Krümmung aller derjenigen Flächenkurven auf (V) darstellt, da

$$1 : (\theta_i \theta_\tau) : 1 = L : N.$$

(8) Die Differentialgleichung der Krümmungskurven ist

$$\begin{array}{ccc} d\tau^2 & 1 & L \\ -dt d\tau & (\theta_i \theta_\tau) & M \\ dt^2 & 1 & N \end{array} = 0.$$

(9) Nach SCHEFFERS⁽¹⁾ hat das allgemeinste Kurvennetz auf der Fläche (2) ohne Umwege die Differentialgleichung

$$(1 - \varphi_i) dt^2 + 2 \{(\theta_i \theta_\tau) - \varphi_i \varphi_\tau\} dt d\tau + (1 - \varphi_\tau^2) d\tau^2 = 0,$$

wo

$$\varphi_i = \partial \varphi / \partial t, \dots$$

sind.

(10) Ist unsere Kreisfläche die TCHEBYCHEFS⁽²⁾, so muss

(1) SCHEFFERS, G.: Theorie der Flächen, S. 52.

(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreis und Kugeln (XXIV), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, S. 33, TCHEBYCHEF, P. L.: Sur le coupure des vêtements {1878}. Vgl. Oeuvres Bd. II, S. 708.

$$(\theta, \theta_\tau) = F(t, \tau)$$

sein.

(E) Wir betrachten die Kreisfläche \mathbf{K} , deren Bogenelement ds mit

$$(1) \quad ds^2 = (\theta, \theta) dt^2 + 2(\theta, \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2$$

gegeben ist.

Wir setzen (1) in

$$(2) \quad ds^2 = g_{ik} du^i du^k.$$

Ist die Form (2) für jede beliebige Transformation von Parametern

$$(3) \quad \bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2), \quad \bar{u}^2 = \bar{u}^2(u^1, u^2)$$

invariant, d. h.

$$(4) \quad \bar{g}_{rr} d\bar{u}^r d\bar{u}^r = g_{rr} du^r du^r,$$

so folgt daraus

$$(5) \quad \bar{g}_{r^*} = g_{pq} \frac{\partial u^p}{\partial \bar{u}^r} \frac{\partial u^q}{\partial \bar{u}^s}.$$

Wir werden g_{rs} als Fundamentaltensor für die Massbestimmung annehmen und eine Riemannsche Übertragung in unsere Theorie einführen.

Wir setzen

$$(6) \quad g_{rs} du^r du^s = A^{ij} (\lambda_{i,r} du^r) (\lambda_{j,s} du^s) = 0,$$

die die Gleichung von Minimallinien auf \mathbf{K} ist.

An (6) erkennt man, dass für den Winkel θ der Parameterlinien in einem Punkt

$$(7) \quad \cos \theta = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}$$

gilt, wo g_{11} und g_{22} stets positiv sind.

Aus (7) folgt insbesondere doch, dass die Parameterlinien einander rechtwinklig schneiden, wenn

$$(8) \quad g_{12} = 0$$

ist.

Wir betrachten λ^α in

$$(9) \quad g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha = \lambda_\beta;$$

daraus folgt

$$(10) \quad (\lambda)^\sharp = g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = \lambda^\alpha \lambda_\alpha = g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta,$$

wo

$$(11) \quad \lambda_\mu \cos \theta = g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta = \lambda^\alpha \mu_\alpha = \lambda_\alpha \mu^\alpha = g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta,$$

$$(12) \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta}{\sqrt{g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta} \sqrt{g_{\alpha\beta} \mu^\alpha \mu^\beta}} = \frac{\lambda^\alpha \mu_\alpha}{\sqrt{\lambda^\alpha \lambda_\alpha} \sqrt{\mu^\alpha \mu_\alpha}} \\ = \frac{g_{\alpha\beta} \lambda_\alpha \mu_\beta}{\sqrt{g^{\alpha\beta} \lambda_\alpha \lambda_\beta} \sqrt{g^{\alpha\beta} \mu_\alpha \mu_\beta}} \end{cases}$$

gültig sind.

Nach des Verfassers Arbeit⁽¹⁾ kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz: \mathfrak{E} und $\bar{\mathfrak{E}}$ seien zwei konvexe Kreisflächen in R_3 , deren Punkte eineindeutig durch parallele und gleichgerichtete Flächennormalen einander zugeordnet sind.

Für jede Wahl von gemeinsamen Flächenparametern u_i seien die ersten Fundamentalgrößen in zugeordneten Punkten einander gleich:

$$g_{ik} = \bar{g}_{ik},$$

wobei

$$\begin{cases} d s^2 = d \mathfrak{E}^2 = \sum g_{ik} du^i du^k, \\ d \bar{s}^2 = d \bar{\mathfrak{E}}^2 = \sum \bar{g}_{ik} du^i du^k \end{cases}$$

sind.

Dann sind die beiden Flächen bis auf eine Transformation miteinander identisch.

(1) NAKAZIMA, S.: Über die Fundamentalgrößen bei Eiflächen, Japanese Journal of Mathematics, Vol. VI (1929), Tokyo, S. 27.

Weiter gelten⁽¹⁾

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta_{\nu}^{\lambda} \begin{cases} = 1, & \lambda = \nu \\ = 0, & \lambda \neq \nu \end{cases}$$

$$v_{\nu} = v^{\lambda} g_{\lambda\nu}, \quad w^{\lambda} = w_{\nu} g^{\lambda\nu},$$

$$\delta p = dp, \quad \nabla_{\mu} p = \partial p / \partial x^{\mu},$$

$$\delta v^{\nu} = dv^{\nu} + \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} v^{\lambda} dx^{\mu}, \quad \delta w_{\lambda} = dw_{\lambda} - \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} w_{\nu} dx^{\mu},$$

$$\nabla_{\mu} v^{\nu} = \frac{\partial v^{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} v^{\lambda}, \quad \nabla_{\mu} w_{\lambda} = \frac{\partial w_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} w_{\nu}$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\nu\alpha} \left\{ \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \right\},$$

$$\Delta [{}_{\mu} w_{\lambda}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial w_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \right),$$

$$\Delta [{}_{\mu} w_{\lambda}] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial w_{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \right),$$

$$\Delta [{}_{\nu} \nabla_{\mu}] p = 0, \quad \Delta_{\mu} g^{\lambda\nu} = \Delta_{\nu} g_{\lambda\mu} = 0.$$

Für geodätische Linien gelten

$$\frac{d^2 x^{\nu}}{ds^2} + \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} \frac{dx^{\lambda}}{ds} \frac{dx^{\mu}}{ds} = 0$$

oder

$${}_{\mu} \nabla_{\mu} i^{\nu} = 0,$$

wenn

$$dx^{\nu}/ds = i^{\nu}.$$

Für die Krümmung gelten

$$k_{\omega\mu\lambda}^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\omega \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ \omega \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} k\omega \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\mu \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} k\mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda\omega \\ k \end{smallmatrix} \right\},$$

$$2 \nabla [{}_{\omega} \nabla_{\mu}] v^{\nu} = - k_{\omega\mu\lambda}^{\nu} v^{\lambda}, \quad 2 \nabla [{}_{\omega} \nabla_{\mu}] w_{\lambda} = + k_{\omega\mu\lambda}^{\nu} w_{\nu},$$

1 Vgl. SCHOUTEN, J. A.: Der Ricci-Kalkül, Berlin, 1924.

$$\begin{aligned}
 k_{(\omega\mu),\lambda}^{\dots\nu} &= 0, & k_{(\omega\mu\lambda)}^{\dots\nu} &= 0, & K_{\omega\mu(\lambda\nu)} &= 0, & k_{\omega\mu\lambda\nu} &= k_{\lambda\nu\omega\mu}, \\
 \nabla[\epsilon k_{\omega\mu}]_{\lambda\nu} &= 0, & k_{\mu\lambda} &= k_{\nu\mu}^{\dots\nu}, \\
 2\nabla[\epsilon k_{\epsilon}]_{\lambda} &= \nabla_{\mu} k_{\mu\epsilon}^{\dots\nu}, & \nabla^{\mu} G_{\mu\lambda} &= 0, \\
 G_{\mu\lambda} &= k_{\mu\lambda} - \frac{1}{2} k g_{\mu\lambda}, & \text{u. s. w.},
 \end{aligned}$$

wo

$$x^{\nu} = x^{\nu}(u^1, u^2)$$

unsere Kreisfläche ist.

(F) Im folgenden möchten wir eine Bemerkung über Translationsfläche machen, die zugleich Rotationskreisflächen sind.

Die Gleichung von Translationsfläche ist

$$(1) \quad \xi = U + V,$$

so folgt daraus

$$(2) \quad E = \xi_u^2 = \sum U'^2, \quad F = \xi_u \xi_v = \sum U'V', \quad G = \xi_v^2 = \sum V'^2,$$

wo E, F und G erste Fundamentalgrößen unserer Translationsfläche sind.

Aus der Rotationskreisfläche ergibt sich

$$(3) \quad (\theta, \theta_t) = f'(\tau), \quad (\theta, \theta_{\tau}) = 0, \quad (\theta_{\tau} \theta_{\tau}) = 1,$$

so folgt aus (2.) und (3)

$$(4) \quad (\theta_t \theta_t) : (\theta_t \theta_{\tau}) : (\theta_{\tau} \theta_{\tau}) = f''(\tau) : 0 : 1 = \sum U'^2 : \sum U'V' : \sum V'^2.$$

(4) ist unsere Bedingung, wo $f(\tau)$ und V die Funktionen von τ allein und U die Funktion von τ allein ist.

(G) Im folgenden möchten wir eine Bemerkung über die Schraubenkreisfläche machen, die zugleich die Rotationskreisfläche ist.

Für die Schraubenkreisfläche gilt⁽¹⁾

$$(1) \quad (\theta, \theta_t) = \tau^2 + q^2, \quad (\theta, \theta_{\tau}) = 0, \quad (\theta_{\tau} \theta_{\tau}) = 1,$$

wo q eine Konstante ist.

1) SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig, 1922, S. 136.

Auf der andern Seite gilt für die Rotationskreisfläche⁽¹⁾

$$(2) \quad (\theta_i, \theta_i) = p(\tau), \quad (\theta_i, \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1,$$

demnach folgt aus (1) und (2)

$$(3) \quad (\theta_i, \theta_i) : (\theta_i, \theta_\tau) : (\theta_\tau, \theta_\tau) = \tau^2 + q^2 : 0 : 1 = p : 0 : 1,$$

oder

$$(4) \quad p = \tau$$

(4) ist unsere Bedingung.

Aus (4) ersehen wir, dasz

$$(5) \quad q = 0$$

in SCHEFFERS Buch⁽²⁾ ist, wir also

$$(6) \quad x = \tau \cos t, \quad y = \tau \sin t, \quad z = 0$$

als Gleichung der Rotationskreisfläche erhalten, d. h. (6) nicht eine Gerade ist.

(H) Im folgenden möchten wir eine Bemerkung über die Regelkreisfläche machen, die zugleich eine Kugel ist.

Wir betrachten eine Regelkreisfläche S, die in des Verfassers Arbeit steht. Wir können den Ausdruck des Quadrates des Linien-elementes auf die folgende Form bringen⁽³⁾:

$$(1) \quad ds^2 = d\tau^2 + 2 \cos \theta d\tau dt + (M^2 \tau^2 + 2 N \tau + 1) dt^2.$$

Wenn wir eine Kugel als Kreisfläche ansehen, so können wir setzen⁽⁴⁾

$$(2) \quad ds^2 = d\tau^2 + \cos^2 \tau \cdot dt^2.$$

So folgen aus (1) und (2)

(1) SCHEFFERS, a. a. O., S. 126.

(2) SCHEFFERS, a. a. O., S. 126.

(3) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXIX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, S. 297.

(4) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXVII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, S. 139.

$$(3) \quad \cos \theta = 0, \quad M^2 \tau^2 + 2 N \tau + 1 = \cos^2 \tau,$$

die die Bedingung dafür sind, dass S zugleich die Kugel sind.

(H) Wir betrachten die Kreisfläche P , deren Quadrat des Linien-
elementes ds^2 sich folgendermassen darstellen lässt⁽¹⁾:

$$(1) \quad ds^2 = (1 + a\tau + b\tau^2) dt^2 + d\tau^2.$$

Wenn P zugleich eine Kugel ist, so folgt aus (1) und aus

$$(2) \quad ds^2 = \cos^2 \tau \cdot dt^2 + d\tau^2$$

$$(3) \quad 1 + a\tau + b\tau^2 = \cos^2 \tau.$$

(3) ist die Bedingung dafür, dass P zugleich eine Kugel ist.

(I) Wir betrachten eine Spiralkreisfläche S , die in des Ver-
fassers Arbeit⁽²⁾ liegt. Es gibt

$$(1) \quad ds^2 = F(\tau/t) dt^2 + d\tau^2,$$

wo ds das Linienelement von S bedeutet.

Wenn S zugleich eine Kugel ist, so folgt aus (1) und aus

$$(2) \quad ds^2 = \cos^2 \tau \cdot dt^2 + d\tau^2$$

$$(3) \quad F(\tau/t) = \cos^2 \tau.$$

Aus (3) ersehen wir, dass die Differentialgleichungen der Minimal-
linien sind⁽³⁾:

$$(4) \quad d\tau \pm i F(\tau/t) dt = 0, \quad i = \sqrt{-1}$$

oder

$$(5) \quad \begin{cases} u = (\cos t + i \sin t) \tan(\frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2} \pi), \\ v = (\cos t - i \sin t) \tan(\frac{1}{2} \tau + \frac{1}{2} \pi), \end{cases}$$

- 1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXIII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI, S. 136.
- 2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXIII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI, S. 139.
- 3) MATUMURA, a. a. O., S. 139.

wo

$$(6) \quad \cos \tau = \sqrt{F(\tau/t)}$$

und t ein Parameter ist. Wir können so (5) mit $F(\tau/t)$ berechnen.

Wenn unsere Kurve zugleich ein Radialnetz ist, so folgt aus (1) und⁽¹⁾ aus

$$(7) \quad ds^2 = \tau^2 dt^2 + 2(\theta, \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2$$

$$(8) \quad \tau^2 : F(\tau/t)(\theta, \theta_\tau) : 0$$

oder

$$(9) \quad F(\tau/t) \cdot (\theta, \theta_\tau) = 0$$

oder

$$(10) \quad (\theta, \theta_\tau) = 0,$$

wenn

$$(11) \quad F(\tau/t) = 0.$$

(J) Wir betrachten eine Kreisfläche (K), deren Bogenelement ds mit⁽²⁾

$$(1) \quad ds^2 = 2\{\tau + \phi(t)\} dt^2 + d\tau^2$$

gegeben ist.

Das Quadrat des Linienelements der Kugel ist

$$(2) \quad ds^2 = \cos^2 \tau \cdot dt^2 + d\tau^2.$$

Wenn (K) zugleich eine Kugel ist, so folgt aus (1) und (2)

$$(3) \quad \cos^2 \tau = 2\{\tau + \phi(t)\},$$

so können wir wissen, dass die Gleichung der Minimallinien auf (K) mit

$$(4) \quad \cos^2 \tau dt' + d\tau^2 = 0$$

gegeben ist.

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXVI), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, S. 113.

(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXIII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI, S. 141.

Definiert die Differentialgleichung

$$(5) \quad d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf **(K)** keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind⁽¹⁾:

$$(6) \quad d\tau/dt = -\cos^2 \tau / \lambda.$$

Weiter können wir wissen, dass ein Kurvennetz

$$(7) \quad A(t, \tau) dt^2 + 2B(t, \tau) dt d\tau + C(t, \tau) d\tau^2 = 0$$

auf **(K)** dann und nur dann ein Orthogonalsystem ist, wenn

$$(8) \quad \cos^2 \tau C + A = 0$$

gilt.

Noch weist man, dass die Parameterlinien auf **(K)** ein Kurvennetz ohne Umwege nicht bilden, da

$$\frac{\partial \cos^2 \tau}{\partial \tau} \neq 0$$

gültig ist.

Weiter können wir ähnliche Probleme untersuchen wie oben.

(K) Nach WEINGARTEN hat man eine aus den Minimalkreisflächen **(M)** durch Quadraturen bestimmbare Klasse aufeinander abwickelbarer Kreisflächen von Linienelementquadrat

$$(1) \quad ds^2 = 2\tau dt^2 + 2dt d\tau + d\tau^2$$

angegeben⁽²⁾.

Sind **(M)** zugleich die Fläche **(S)**, deren Bogenelement ds mit

$$(2) \quad ds^2 = dt^2 + 2\cos a dt d\tau + d\tau^2$$

gegeben⁽³⁾ ist, so folgt daraus

(1) Vgl. MATUMURA, a. a. O., S. 142.

(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln XXX, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, S. 328.

(3) Vgl. MATUMURA, a. a. O., S. 330.

$$(3) \quad 2\tau : 1 = 1 : \cos \alpha,$$

wo α die Funktion von τ und t ist, woraus sich

$$(4) \quad \cos \alpha = 1/2 \tau$$

ergibt, so wissen wir, dass in unserem Falle α die Funktion von τ allein; daraus ersehen wir, dass

$$(5) \quad 2\tau^2 dt^2 + dt d\tau + \tau d\tau' = 0$$

die Gleichung der Minimallinien auf unserer Kreisfläche ist.

Ist

$$(6) \quad \varphi(t, \tau) = \text{const.}$$

die Gleichung einer Kurvenschar einer Kreisfläche (\mathbf{M}), dann werden deren orthogonale Trajektorien bekanntlich dargestellt durch

$$(7) \quad \left\{ (\theta_t, \theta_t) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_t, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} dt + \left\{ (\theta_t, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - (\theta_\tau, \theta_\tau) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} d\tau = 0$$

oder wird aus (1)

$$(8) \quad \left\{ 2\tau \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} dt + \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} d\tau = 0.$$

(L) Wir betrachten eine Kreisfläche (\mathbf{M}), deren Bogenelement mit

$$(1) \quad ds^2 = 2\tau dt^2 + 2t dt d\tau + d\tau^2$$

gegeben⁽¹⁾ ist.

Wenn (\mathbf{M}) zugleich (\mathbf{S}) ist, so folgt daraus

$$(2) \quad 2\tau = t^2,$$

wo (\mathbf{S}) in des Verfassers früherer Arbeit⁽²⁾ steht, so erhalten wir den

Satz 1: Die Gleichung der Minimallinien ist

$$t^2 dt^2 + 2t dt d\tau + d\tau^2 = 0,$$

1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, S. 328.

2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXII) Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI, S. 132.

oder

$$t \, dt + d\tau = 0.$$

Satz 2: *Ein Kurvennetz*

$$A(t, \tau) \, dt^2 + 2B(t, \tau) \, dt \, d\tau + C(t, \tau) \, d\tau^2 = 0$$

auf unserer Kreisfläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$t^2 C - 2tB + A = 0$$

gilt.

Satz 3: *Definiert die Differentialgleichung*

$$d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf unserer Kreisfläche keine Schar der Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die auf die durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{t^2 + t\lambda}{t + \lambda}, \quad \text{u. s. w. .}$$

(M) Unter „äquidistanten“ Kurven (A) auf einer Kreisfläche versteht man nach Voss ein solches System von Kurven $t = \text{const.}$, $\tau = \text{const.}$, für das

$$(1) \quad ds^2 = dt^2 + 2(\theta, \theta_\tau) \, dt \, d\tau + d\tau^2$$

wird⁽¹⁾, wo ds das Linienelement von (A) bedeutet.

Sind (A) zugleich eine Kurvenschar auf (M) in des Verfassers Arbeit⁽²⁾, so erhalten wir

$$(2) \quad 1 : 2\tau = (\theta, \theta_\tau) : t$$

oder

$$(3) \quad (\theta, \theta_\tau) = t/2\tau,$$

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XX), Mem. of the Faculty of Science and Agriculture, Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII, S. 251.

(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXX), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, S. 328.

und so ist die Gleichung der Minimallinien auf unserer Fläche

$$(4) \quad dt^2 + t/\tau \, dt \, d\tau + d\tau^2 = 0$$

oder

$$(5) \quad \tau \, dt^2 + t \, dt \, d\tau + \tau \, d\tau^2 = 0.$$

Aus (5) ersehen wir, dass die folgenden Sätze erfolgen.

Satz 1: *Ein Kurvennetz*

$$A(t, \tau) \, dt^2 + 2B(t, \tau) \, dt \, d\tau + C(t, \tau) \, d\tau^2 = 0$$

auf unserer Fläche ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$\tau C - t B + \tau A = 0$$

ist.

Satz 2: *Definiert die Differentialgleichung*

$$d\tau/dt = \lambda(t, \tau)$$

auf unserer Fläche keine Schar der Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{2\tau + t\lambda}{t + 2\tau\lambda}, \quad \text{u. s. w. .}$$

(N) Wir betrachten die besondere Klasse (B) von A-Fläche, deren Linienelement ds

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + (V^2 + V^2) \, dv^2$$

sind, wo V die Funktion von v allein⁽¹⁾ ist.

Sind (B) die Kreisfläche (T), so können wir setzen

$$(2) \quad (\theta_t, \theta_t) = T^2 + T^2, \quad (\theta_t, \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1,$$

wo T nur die Funktion von t allein ist.

Aus (2) können wir wissen, dass die Gleichung der Minimallinien auf unserer Kreisfläche (T) mit

(1) EISENHART, a. a. O., S. 168.

$$(3) \quad (T'^2 + T^2) dt^2 + d\tau^2 = 0$$

gegeben ist, wo

$$t = \text{const.}, \quad \tau = \text{const.}$$

zueinander senkrecht sein.

Weiter betrachten wir die besondere A-Fläche (V), deren Bogenelement⁽¹⁾

$$(4) \quad ds^2 = du^2 + a^2 e^{2cv} (1 + c^2) dv^2$$

ist.

Ist (V) die Kreisfläche (K), so können wir setzen

$$(5) \quad (\theta_t, \theta_t) = a^2 e^{2ct} (1 + c^2), \quad (\theta_t, \theta_\tau) = 0, \quad (\theta_\tau, \theta_\tau) = 1;$$

darin erkennen wir, dass die Gleichung der Minimallinien auf (K) mit

$$(6) \quad a^2 e^{2ct} (1 + c^2) dt^2 + d\tau^2 = 0$$

gegeben ist, wo a und c die Konstanten bedeuten.

Aus (6) wissen wir, dass die Parameterlinien auf (K) dann und nur dann ein Kurvennetz ohne Umwege bilden, wenn

$$(7) \quad \exp. ct = 0$$

genügen.

(O) Wir betrachten

$$(1) \quad ds^2 = t^2 dt^2 + 2t dt d\tau + d\tau^2$$

wieder⁽²⁾.

Setzen wir (1) in die Form

$$(2) \quad ds^2 = \frac{1}{4} dT^2 + dT d\tau + d\tau^2,$$

wo

$$(3) \quad T = t^2$$

gesetzt ist, so ist die Gleichung der Minimallinien auf unserer Kreisfläche

(1) EISENHART, a. a. O., S. 169.

(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI, 1939, S. 132.

$$(4) \quad dT^2 + 4dTd\tau + 4d\tau^2 = 0$$

wo T das neue Parameter ist.

Weiter können wir untersuchen wie üblich.

(P) Wir betrachten

$$(1) \quad \left(\frac{D}{(\theta_i \theta_\tau)} \right)^{2n} (\theta_i \theta_i) dt - \left(\frac{D''}{(\theta_\tau \theta_\tau)} \right)^{2n} (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0$$

in des Verfassers Arbeit wieder⁽¹⁾.

Wenn (1) zugleich „äquidistante“ Kurven sind, so folgt aus (1) und⁽²⁾ aus

$$(2) \quad ds^2 = dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2$$

$$\left(\frac{D}{(\theta_i \theta_\tau)} \right)^{2n} (\theta_i \theta_i) : 1 = 0 : 2(\theta_i \theta_\tau) = \left(\frac{D''}{(\theta_\tau \theta_\tau)} \right)^{2n} (\theta_\tau \theta_\tau) : 1$$

oder

$$(4) \quad (\theta_i \theta_\tau) (\theta_i \theta_i) \left(\frac{D}{(\theta_i \theta_\tau)} \right)^{2n} = 0, \quad (\theta_i \theta_\tau) (\theta_\tau \theta_\tau) \left(\frac{D''}{(\theta_\tau \theta_\tau)} \right)^{2n} = 0$$

oder

$$(5) \quad (\theta_i \theta_\tau) = 0,$$

wenn

$$D = D'' \neq 0.$$

(Q) Wir betrachten das Radialnetz auf der Kreisfläche.

Wir setzen

$$(1) \quad ds^2 = \tau^2 dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2,$$

wo ds das Bogenelement bedeutet⁽³⁾.

Wenn (1) bezüglich dt und $d\tau$ vertauschbar ist, so muss

$$(2) \quad \tau = 1$$

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XX, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII, S. 250

(2) MATUMURA, a. a. O., 251.

(3) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXVI, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXI, S. 113.

sein, woraus sich ergibt

$$(3) \quad ds^2 = dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + d\tau^2.$$

Das sind nicht anders als „äquidistante“ Kurven⁽¹⁾ auf unserer Kreisfläche.

(R) Wir betrachten eine Fläche (F) in R_2 , so ist das Bogenelement ds ,

$$(1) \quad ds^2 = E dt + 2F dt d\tau + G d\tau^2$$

wo E, F und G die ersten Fundamentalgrößen bedeuten.

Ist (F) zugleich eine Kreisfläche, so erfolgt

$$(2) \quad \lambda E = (\theta_t \theta_t), \quad \lambda F = (\theta_t \theta_\tau), \quad \lambda G = (\theta_\tau \theta_\tau),$$

wo

$$(3) \quad (\theta_t \theta_t), \quad (\theta_t \theta_\tau), \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 1$$

in des Verfassers Arbeit⁽²⁾ stehen, und t und τ die Parameter bedeuten.

Ist

$$(4) \quad G = 1$$

so folgt daraus

$$(5) \quad \lambda = 1;$$

daraus ergeben sich

$$(6) \quad E = (\theta_t \theta_t), \quad F = (\theta_t \theta_\tau), \quad G = 1.$$

(S) Die überstrichenen Buchstaben beziehen sich auf die Elemente der Parallelfäche einer gegebenen Kreisfläche im Abstand $H/2$; es gibt (1)

$$(1) \quad \begin{cases} (\overline{\theta_t \theta_t}) = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \left(1 - \frac{4k}{H^2}\right) (\theta_t \theta_t), & (\overline{\theta_t \theta_\tau}) = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \left(1 - \frac{4k}{H^2}\right) (\theta_t \theta_\tau), \\ (\overline{\theta_\tau \theta_\tau}) = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \left(1 - \frac{4k}{H^2}\right) (\theta_\tau \theta_\tau), \end{cases}$$

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln XX, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII, S. 251.

(2) Vgl. NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

wo H und K in SCHEFFERS Buch⁽¹⁾, und $(\theta_i\theta_i)$, $(\theta_i\theta_\tau)$, $(\theta_\tau\theta_\tau)$, $(\overline{\theta_i\theta_i})$, $(\overline{\theta_i\theta_\tau})$ und ferner λ und $\bar{\lambda}$ in des Verfassers Arbeit stehen⁽²⁾.

An (1) erkennen wir, dasz

$$(2) \quad (\overline{\theta_i\theta_i}) : (\overline{\theta_i\theta_\tau}) : (\overline{\theta_\tau\theta_\tau}) = (\theta_i\theta_i) : (\theta_i\theta_\tau) : (\theta_\tau\theta_\tau)$$

gilt, wo

$$(3) \quad (\theta_\tau\theta_\tau) = (\overline{\theta_\tau\theta_\tau})$$

gültigt ist, so folgt aus (2)

$$(4) \quad (\overline{\theta_i\theta_i}) = (\theta_i\theta_i), \quad (\overline{\theta_i\theta_\tau}) = (\theta_i\theta_\tau).$$

Wenn t und τ miteinander vertauschbar sind, so erhalten wir

$$(5) \quad (\overline{\theta_i\theta_i}) = (\theta_i\theta_i) = 1.$$

(T) Wenn in unserer Kreisfläche

$$(1) \quad \theta = \theta(t, \tau),$$

$$(2) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(3) \quad \tau = \text{const.}$$

die Kongruenz von Guichard bilden, so erfolgt⁽³⁾

$$(4) \quad \theta_{, \tau} - \frac{T \sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}}{\sqrt{(\theta_i\theta_i)}} \theta_i - \frac{T' \sqrt{(\theta_i\theta_i)}}{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}} \theta_\tau = 0$$

wo T bzw. T' nur die Funktion von t bzw. τ allein ist.

Da gilt⁽⁴⁾

$$(5) \quad \theta(t, \tau) = \rho_a(\tau) \xi^a(t) + \sqrt{\rho_a(\tau) \rho_b(\tau)} T^{ab}(t) \cdot \eta(t).$$

- (1) SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig, 1922, S. 302.
- (2) NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.
- (3) MATUMURA, S.: On a Pair of Surfaces Mutually Related, (V), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII, 1936, S. 108.
- (4) Vgl. MATUMURA, S.: On a Pair of Surfaces Mutually Related, (III), (IV), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII, 1936, S. 10.

gilt⁽¹⁾

$$(6) \quad -\frac{\partial^2 \theta}{\partial t \partial \tau} = -a(t, \tau) \frac{\partial \theta}{\partial t} - b(t, \tau) \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

so haben wir

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t \partial \tau} = -\left(a + \frac{\partial}{\partial \tau} \log \lambda\right) \frac{\partial \theta'}{\partial t} - \left(b + \frac{\partial}{\partial t} \log \lambda\right) \frac{\partial \theta'}{\partial \tau}$$

wo⁽²⁾

$$(8) \quad \theta' = \frac{\theta}{\lambda(t, \tau)}$$

ist.

(1) - NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, (VI), VII, VIII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 32, 1930, S. 196.

(2) STETSON, J. M.: Conjugate systems of curves on a surface both of whose Laplace transforms are lines of curvature, Annals of Mathematics, Vol. 19, 1917-1918, S. 108.

BEITRÄGE ZUR GEOMETRIE DER KREISE UND KUGELN (XXXVI)

Sôzi MATUMURA

Accepted for publication, November 27, 1939.

Im folgenden möchten wir einige Bemerkungen über die Theorie der Kreise und Kugeln machen.

(1)

(A) Zunächst betrachten wir die Kreisflächen⁽¹⁾

$$(1) \quad \mathfrak{d}(u, v) = \rho_a(v) \mathfrak{x}^a(u) + \sqrt{\rho_a(v) \rho_a(v)} \overline{T^{a,i}(u)} \cdot \eta_i(v)$$

wo $\rho_a(v) \rho_a(v) T^{a,i}(u) = \cos^2 \varphi(u, v)$ ist.

Hier sind u und v Parameter.

Aus (1) ergeben sich

$$(2) \quad \mathfrak{d}_u = \rho_a(v) \dot{\mathfrak{x}}^a - \sin \varphi \cdot \partial \varphi / \partial u \cdot \eta + \cos \varphi \cdot \eta'$$

$$(3) \quad \mathfrak{d}_v = \rho_a^i \mathfrak{x}^a - \sin \varphi \cdot \partial \varphi / \partial v \cdot \eta + \cos \varphi \cdot \eta',$$

u. s. w. ;

hieraus kann man alle Formeln⁽²⁾ in der elementaren Differentialgeometrie⁽³⁾ berechnen, z. B.

$$\left(E = \mathfrak{d}_u^2, \quad F = \mathfrak{d}_u \mathfrak{d}_v, \quad G = \mathfrak{d}_v^2, \quad \xi = \frac{\mathfrak{d}_u \times \mathfrak{d}_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \right.$$

[Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ. Formosa, Japan, Vol. XXVI No. 7, December, 1939.]

(1) NAKAJIMA, MATUMURA, eingeborener NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, VI, VII, (VIII), Tôhoku Math. Journ. Vol. 32 (1930), S. 196.

(2) BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Dritte Auflage, S. 86, S. 87, S. 89, S. 93.

(3) SCHEFFERS, G.: Einführung in die Theorie der Flächen, Berlin und Leipzig, 1922, S. 555.

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} L = -d_u \xi_u = -\frac{(d_{uu} d_u d_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ M = -d_u \xi_v = -d_v \xi_u = \frac{(d_{uv} d_u d_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N = -d_v \xi_v = \frac{(d_{vv} d_u d_v)}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ d_{uu} d_u = \frac{1}{2} E_u, \quad d_{uv} d_u = \frac{1}{2} E_v, \\ d_{uv} d_v = \frac{1}{2} G_u, \quad d_{vv} d_v = \frac{1}{2} G_v, \\ d_{uu} d_v = F_u - \frac{1}{2} E_v, \quad d_{vv} d_u = F_v - \frac{1}{2} G_u, \quad \text{s. u. w.} \end{array} \right.$$

(B) Im folgenden möchten wir zwei Kreisflächen betrachten, für welche das Strahlensystem, welches von den gemeinschaftlichen Tangenten dieser zwei Kreisflächen gebildet wird, ein Normalensystem ist.

Es seien die zwei Kreisflächen $d(t, \tau)$ und $\bar{d}(t, \tau)$, so entstehen⁽¹⁾

$$(1) \quad \lambda d_{t\tau} + \sigma d_t + d_\tau = 0$$

und

$$(2) \quad \bar{\lambda} \bar{d}_{t\tau} + \bar{\sigma} \bar{d}_t + \bar{d}_\tau = 0$$

wo

$$(3) \quad d(t, \tau) = \rho_s(\tau) \overset{\circ}{x}^s(t) + \sqrt{\rho_s(\tau) \rho_s(\tau)} T^{ss}(\bar{t}) \eta(t)$$

gilt⁽²⁾.

Nach DARBOUX⁽³⁾ kann man erkennen: wenn man eine Lösung ϕ von

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \tau} - \frac{\sigma}{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial(\sigma/\lambda)}{\partial t} + \frac{\partial(1/\lambda)}{\partial \tau} \right) \phi = 0$$

finden kann, so man ohne Schwierigkeit nur durch einfach Integra-

(1) NAKAJIMA, S.: Zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, Tôhoku Math. Journ., Vol. 30 (1928), S. 143.

(2) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, (VI), (VII), (VIII) Tôhoku Math. Journ., Vol. 32 (1930), S. 196.

(3) Lecons, Vol. 2, S. 225.

tion eine Konkruenz finden, welche konjugiert zum parametrischen System ist.

Weiter kann man studieren wie in des Verfassers Arbeit⁽¹⁾.

Nach STETSONS Arbeit⁽²⁾ kann man wissen, dasz, wenn

$$(5) \quad MM_1 = MM_{-1}$$

besteht, so

$$(6) \quad \frac{(\theta_i \theta_i)}{b^2} = \frac{(\theta_\tau \theta_\tau)}{a^2}, \quad \text{u. s. w.},$$

folgt, wobei $(\theta_i \theta_i)$ und $(\theta_\tau \theta_\tau)$ in des Verfassers Arbeit⁽³⁾ stehen.

(C) Wir behandeln nun

$$(1) \quad \mathfrak{d}(u, v) = \rho_\alpha(v) \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{x}}^\alpha(u) + \cos \varphi(u, v) \gamma(u),$$

wo u und v Parameter sind. Aus (1) folgen

$$(2) \quad \mathfrak{d}_u = \partial \mathfrak{d} / \partial u = \rho_\alpha(v) \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{x}}^{\alpha'} - \sin \varphi \cdot \partial \varphi / \partial u \cdot \gamma + \cos \varphi \cdot \gamma',$$

$$(3) \quad \mathfrak{d}_v = \partial \mathfrak{d} / \partial v = \rho'(v) \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{x}}^\alpha - \sin \varphi \cdot \partial \varphi / \partial v \cdot \gamma + \cos \varphi \cdot \gamma',$$

woraus man ersieht, dasz die Gleichung der Berührungsebene⁽⁴⁾

$$(4) \quad (\mathfrak{d} - \mathfrak{d})[\mathfrak{d}_u \mathfrak{d}_v] = 0$$

ist oder

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\bar{\mathfrak{d}} - \mathfrak{d})[\rho_\alpha(v) \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{x}}^{\alpha'} - \sin \varphi \cdot \partial \varphi / \partial u \cdot \gamma + \cos \varphi \cdot \gamma', \\ \rho'(v) \cdot \overset{\circ}{\mathfrak{x}}^\alpha - \sin \varphi \cdot \partial \varphi / \partial v \cdot \gamma + \cos \varphi \cdot \gamma'] = 0. \end{array} \right.$$

Damit das Netz (u, v) aus zwei Scharen von Minimalkurven bestehe, ist also notwendig und hinreichend, dasz zugleich

$$(6) \quad E = 0 \quad \text{und} \quad G = 0$$

(1) MATUMURA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben VI, Tohoku Math. Journ., Vol. 36 (1933), S. 257.

(2) STETSON, J. M.: Conjugate system of curves on a surface both of whose LAPLACE transforms are lines of curvature, Annals of Mathematics, Vol. 19 (1917-1918), S. 125.

(3) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

(4) Vgl. ROTHE, R.: Differentialgeometrie I, Berlin, 1937, S. 110.

oder

$$(7) \quad \mathfrak{d}_u^2 = (\rho_\alpha(v) \cdot \overset{\circ}{\xi}^{\alpha'} - \sin \varphi \cdot \partial \varphi / \partial u \cdot \eta + \cos \varphi \cdot \eta')^2 = 0$$

und

$$(8) \quad \mathfrak{d}_v^2 = (\rho'(v) \cdot \overset{\circ}{\xi}^\alpha - \sin \varphi \cdot \partial \varphi / \partial v \cdot \eta + \cos \varphi \cdot \eta')^2 = 0$$

ist.

Ist

$$(9) \quad F = 0$$

oder

$$(10) \quad \begin{cases} \mathfrak{d}_u \mathfrak{d}_v = (\rho_\alpha \overset{\circ}{\xi}^{\alpha'} - \sin \varphi \cdot \partial \varphi / \partial u \cdot \eta + \cos \varphi \cdot \eta', \\ \rho' \overset{\circ}{\xi}^\alpha - \sin \varphi \cdot \partial \varphi / \partial v \cdot \eta + \cos \varphi \cdot \eta') = 0, \end{cases}$$

so schneiden sich die Netzlinien senkrecht, u. s. w..

(D) Dafür, dass die Parameterlinien ein konjugiertes Netz bilden, haben wir

$$(1) \quad (\mathfrak{d}_{uv} \mathfrak{d}_u \mathfrak{d}_v) = 0$$

oder

$$(2) \quad \begin{cases} \left(\rho'_\alpha \overset{\circ}{\xi}^{\alpha'} - \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \sin \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \eta - \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \eta', \right. \\ \rho_\alpha \overset{\circ}{\xi}^{\alpha'} - \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \eta + \cos \varphi \eta', \\ \left. \rho' \overset{\circ}{\xi}^\alpha - \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \eta + \cos \varphi \eta' \right) = 0, \end{cases}$$

da aus

$$(3) \quad \mathfrak{d}(u, v) = \rho_\alpha(v) \overset{\circ}{\xi}^\alpha(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u)$$

$$(4) \quad \mathfrak{d}_{uv} = \rho'_\alpha \overset{\circ}{\xi}^{\alpha'} - \cos \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \sin \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \eta - \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} \eta'$$

folgt.

Die Bedingung (2) wird sicher erfüllt, wenn

$$(5) \quad \mathfrak{d}_{uv} = 0$$

ist, wenn \mathfrak{d} also die Gestalt

$$(6) \quad \mathfrak{d} = \eta(u) + \mathfrak{z}(v)$$

hat, d. h. Translationsfläche ist.

(E) Gilt

$$(1) \quad \mathfrak{d}_{uv} = 1/v \cdot \mathfrak{d}_u$$

in

$$(2) \quad \mathfrak{d}(u, v) = \rho_\alpha(v) \hat{x}^\alpha(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u),$$

so folgt⁽¹⁾

$$(3) \quad \mathfrak{d} = v U + V,$$

wobei U Funktionen eines Parameters u und V Funktionen eines Parameters v sind.

Hier sind gültig

$$(4) \quad \mathfrak{d}_{uv} = -\frac{\partial^2 \mathfrak{d}}{\partial u \partial v}, \quad \mathfrak{d}_u = \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial u},$$

wo u und v die Parameter bedeuten.

Weiter gilt

$$(5) \quad \mathfrak{d} = \{U + \bar{V}\} : \{U + V\},$$

wenn sich

$$(6) \quad \mathfrak{d}_{uv} + \frac{2V}{U+V} \mathfrak{d}_u + \frac{2\bar{U}}{U+V} \mathfrak{d}_v = 0$$

ergibt⁽²⁾, wo \bar{U} Funktionen von u und \bar{V} Funktionen von v allein sind.

Gilt

$$(7) \quad \mathfrak{d}_u + a \mathfrak{d}_v = 0,$$

wo a Konstante ist, so folgt

$$(8) \quad (\theta_u \theta_u) + 2a(\theta_u \theta_v) + a^2(\theta_v \theta_v) = 0,$$

(1) Vgl. NAKAJIMA, S.: Über zwei Flächen, welche eine Beziehung haben, IV), Tôhoku Math. Journ., Vol. 35 (1932), S. 336.

(2) MATUMURA, S.: On a Pair of Surfaces Mutually Related, Tôhoku Math. Journ., Vol. 39, 1934, S. 20.

wobei $(\theta_u \theta_u)$, $(\theta_u \theta_v)$ und $(\theta_v \theta_v)$ in des Verfassers Arbeit⁽¹⁾ stehen.

(F) Liegt eine Darstellung

$$(1) \quad \mathfrak{d}(u, v) = \rho_\alpha(v) \xi^\alpha(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u)$$

einer Kreisfläche mittels zweier Parameter u und v vor, so ergibt sich aus ihr die allgemeinste Parameterdarstellung derselben Kreisfläche dadurch, dass u und v gleich zwei voneinander unabhängigen Funktionen

$$(2) \quad u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v})$$

zweier neuer Parameter \bar{u} und \bar{v} gesetzt und diese Funktionen statt u und v in die gegebenen Gleichungen eingeführt werden.

Liegt dagegen die Kreisfläche in der Parameterdarstellung vor:

$$(3) \quad \mathfrak{d}(u, v) = \rho_\alpha(v) \xi^\alpha(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u),$$

so sind u und v die Bestimmungsstücke.

Geben wir u einen bestimmten Wert u_0 , während wir v veränderlich lassen, so ergeben sich diejenigen Punkte $\mathfrak{d}(u, v)$ der Kreisfläche, für die

$$(4) \quad \mathfrak{d}(u_0, v) = \rho_\alpha(v) \xi^\alpha(u_0) + \cos \varphi(u_0, v) \eta(u_0)$$

ist. Hierin tritt rechts nur eine Veränderliche v auf.

Es liegt also eine Kurve vor und zwar dargestellt mittels des Parameters v .

Diese Kurve liegt auf der Kreisfläche und ist durch die Angabe des Wertes u_0 , den wir u beilegen, völlig bestimmt.

Sie heisst daher die Parameterlinie u_0 der Kreisfläche. Geben wir zweitens dem Parameter v einen bestimmten Wert v_0 , während u beliebig veränderlich sein soll, so betrachten wir diejenigen Punkte $\mathfrak{d}(u, v)$ der Kreisfläche, die auf der Kurve⁽²⁾

(1) NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

(2) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34, 1931, S. 196.

$$(5) \quad \mathfrak{d}(u, v_0) = \rho_\alpha(v_0) \xi^\alpha(u) + \cos \varphi(u, v_0) \eta(u)$$

mit dem Parameter u liegen.

Diese Kurve auf der Kreisfläche heisst die Parameterlinie (v_0) der Kreisfläche.

Wollen wir einen Punkt auf der Kreisfläche bestimmt wählen, so haben wir u und v bestimmte Werte u_0, v_0 zu erteilen.

Der zugehörige Punkt :

$$(6) \quad \mathfrak{d}(u_0, v_0) = \rho_\alpha(v_0) \xi^\alpha(u_0) + \cos \varphi(u_0, v_0) \eta(u_0)$$

ist der Schnittpunkt der beiden Parameterlinien (u_0) und (v_0).

Auf einer Kreisfläche mit den Parametern u und v wird jede Kurve durch eine Gleichung

$$(7) \quad \Omega(u, v) = 0$$

zwischen u und v definiert.

Die Kurve gehört der Kreisfläche (1) dann und nur dann an, wenn es zu jedem Werte t ein Wertepaar u, v derart gibt, dass

$$(8) \quad \mathfrak{d} = \sigma(t)$$

wird, d. h.

$$(9) \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{d}(\lambda(t), \mu(t)).$$

Eine einfach unendliche Schar von Kurven auf der Kreisfläche (1) wird durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen u und v definiert :

$$(10) \quad U(u, v) dv - V(u, v) du = 0.$$

Sehr oft gelangt man in der Theorie der Kreisflächenkurven zu den Gleichungen, die in du und dv homogen und quadratisch sind :

$$(11) \quad A(u, v) du^2 + 2B(u, v) du dv + C(u, v) dv^2 = 0.$$

(G) Wir betrachten die Kreisfläche, deren Gleichung

$$(1) \quad \mathfrak{d}(u, v) = \rho_\alpha(v) \xi^\alpha(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u)$$

(1) Vgl. BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, Berlin, 1930, S. 16.

ist; es ist gültig

$$(2) \quad \bar{b}(v) = \rho_a(v) \overset{\circ}{x}(v) + \cos \bar{\varphi}(v) \cdot \bar{\eta}(v)$$

längs einer Kurve

$$(3) \quad u = f(v)$$

auf (1), wo

$$(4) \quad \bar{b}(f(v), v) = \rho_a(v) \overset{\circ}{x}(f(v)) + \cos \varphi(f(v), v) \eta(f(v))$$

mit

$$(5) \quad \bar{b}(v) = \rho_a(v) \overset{\circ}{x}(v) + \cos \bar{\varphi}(v) \cdot \bar{\eta}(v)$$

gesetzt ist, und wo u, v Parameter bedeuten.

Ist η ein beliebiger Punkt von $\bar{b}(v)$, so wird die Gleichung der Schmiegeebene der Kurve $\bar{b}(u)$ im Punkte \bar{b} mit

$$(6) \quad (\eta - \bar{b}, \bar{b}', \bar{b}'') = 0$$

gegeben, wo (6) mit $\rho_a, \overset{\circ}{x}, \bar{\varphi}$ und $\bar{\eta}$ bezeichbar ist⁽¹⁾.

Weiter kann man die Gleichung der Krümmung, u. s. w. berechnen.

(H) Im folgenden behandeln wir die Kreisfläche

$$(1) \quad \bar{b}(u, v) = \rho_a(v) \overset{\circ}{x}^a(u) + \cos(u, v) \eta(u).$$

Nehmen wir einen nicht auf einer Kugel η gelegenen Flächenpunkt \bar{b} , so ist

$$(2) \quad \eta = 2(\bar{b} \eta) \eta - \bar{b}$$

ein zu \bar{b} in Bezug auf die Kugel η inverser Punkt.

Aus (2) folgt

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta &= 2 \{ \rho_a(v) \overset{\circ}{x}^a(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u), \eta \} \\ &\quad - \{ \rho_a(v) \overset{\circ}{x}^a(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u) \} \\ &= 2 \{ \rho_a(v) \overset{\circ}{x}^a(u) \eta(u) + \cos \varphi(u, v) \} \eta \\ &\quad - \{ \rho_a(v) \overset{\circ}{x}^a(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u) \} \\ &= \rho_a(v) \overset{\circ}{x}^a(u) + \cos \varphi(u, v) \eta = \bar{b}, \end{aligned} \right.$$

woraus sich

$$(4) \quad \eta = \mathfrak{d},$$

ergibt, so erhalten wir den folgenden

Satz: Bei Inversion in bezug auf die Kugel η ist \mathfrak{d} invariant.

Wir betrachten nun

$$(5) \quad \bar{\eta} = 2(\eta \mathfrak{d}) \mathfrak{d} - \eta;$$

es folgt

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta &= 2(\eta, \rho_a \check{x}^a + \cos \varphi \cdot \eta) \{ \rho_a \check{x}^a + \cos \varphi \cdot \eta \} - \eta \\ &= 2 \{ \rho_a \check{x}^a \eta + \cos \varphi \} \{ \rho_a \check{x}^a + \cos \varphi \cdot \eta \} - \eta \\ &= 2 \rho_a^2 \eta \{ \check{x}^a \}^2 + 2 \cos \varphi \cdot \rho_a \check{x}^a + 2 \rho_a \check{x}^a \cos \varphi \\ &\quad + 2 \cos^2 \varphi \cdot \eta - \eta \\ &= 2 \rho_a^2 \eta \{ \check{x}^a \}^2 + 4 \cos \varphi \cdot \rho_a \check{x}^a + \cos 2 \varphi \cdot \eta \end{aligned} \right.$$

Ist $\hat{\varepsilon}$ eine Kugel und \mathfrak{d} ein nicht auf ihm gelegener Flächenpunkt, so ist

$$(7) \quad \eta = 2(\mathfrak{d} \hat{\varepsilon}) \hat{\varepsilon} - \mathfrak{d}$$

ein zu \mathfrak{d} in bezug auf die Kugel $\hat{\varepsilon}$ inverser Flächenpunkt.

Aus (7) folgt

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta &= 2(\rho_a \check{x}^a + \cos \varphi \cdot \eta, \hat{\varepsilon}) \hat{\varepsilon} - \{ \rho_a \check{x}^a + \cos \varphi \cdot \eta \} \\ &= \{ (2 \rho_a \check{x}^a, \hat{\varepsilon}) \hat{\varepsilon} - \rho_a \check{x}^a \} + \cos \varphi \{ (2 \eta, \hat{\varepsilon}) \hat{\varepsilon} - \eta \} \\ &= (\text{Inversion von } \rho_a \check{x}^a) + \cos \varphi (\text{Inversion von } \eta). \end{aligned} \right.$$

(I) Wir betrachten zwei Kreisflächen

$$(1) \quad (k): \mathfrak{d}(u, v) = \rho_a(v) \check{x}^a(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u)$$

und

$$(2) \quad (\bar{k}): \bar{\mathfrak{d}}(u, v) = \bar{\rho}_a(v) \check{x}^a(u) + \cos \bar{\varphi}(u, v) \bar{\eta}(u);$$

es gilt

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\rho_a(v) \check{x}^a(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u) \\ &= \bar{\rho}_a(v) \check{x}^a(u) + \cos \bar{\varphi}(u, v) \bar{\eta}(u) \end{aligned} \right.$$

für die Schnittpunkte von (k) und (\bar{k}) .

Gelten

$$(4) \quad \rho_\alpha(v) = \bar{\rho}_\alpha(v), \quad \varphi(u, v) = \bar{\varphi}(u, v), \quad \overset{\circ}{x}^\alpha = \bar{\overset{\circ}{x}}^\alpha$$

in (3), so folgt

$$(5) \quad \cos \varphi [\eta(u) - \bar{\eta}(u)] = 0$$

oder

$$(6) \quad \eta(u) = \bar{\eta}(u).$$

(J) Wir behandeln im folgenden eine Formel der Krümmungslinien⁽¹⁾

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & | \delta \delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv} | du^2 + | \delta \delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv} | du dv \\ & + | \delta \delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv} | dv^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(2) \quad \delta(u, v) = \rho_\alpha(v) \overset{\circ}{x}^\alpha(u) + \cos \varphi(u, v) \eta(u);$$

es folgt

$$(3) \quad A : 2B : C = | \delta \delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv} | : | \delta \delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv} | : | \delta \delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv} |,$$

wenn

$$(4) \quad A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = 0$$

eine Formel der Krümmungslinien ist.

Wenn

$$(5) \quad | \delta \delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv} | = 0$$

ist, so folgt aus (4)

$$(6) \quad dv = 0$$

oder

$$(7) \quad 2B du + C dv = 0.$$

Weiter ist gültig

1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen (VII), Tôhoku Math. Journ., Vol. 32, 1930, S. 207.

$$(8) \quad du = 0$$

oder

$$(9) \quad A du + 2 B dv = 0,$$

wenn

$$(10) \quad |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}| = 0.$$

Das Kurvennetz (1) auf einer Kreisfläche (2) ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$(11) \quad \begin{cases} (\theta_u \theta_v) |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}| - 2(\theta_u \theta_v) |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| \\ + (\theta_u \theta_v) |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| = 0 \end{cases}.$$

gültig ist.

Nach der Theorie der quadratischen Gleichung lässt sich eine derartige Gleichung zerspalten in

$$(12) \quad \begin{cases} [|\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}| du + \frac{1}{2} (|\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| \\ + \gamma' |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| - 4 |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}|) dv] \times \\ [|\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}| du + \frac{1}{2} (|\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| \\ - \gamma' |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| - 4 |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}|) dv] = 0, \end{cases}$$

so dass sie in zwei Differentialgleichungen von der Form

$$(13) \quad U(u, v) dv - V(u, v) du = 0,$$

namlich in

$$(14) \quad \begin{cases} |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}| du + \frac{1}{2} (|\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| \\ \pm \gamma' |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| - 4 |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}|) dv = 0 \end{cases}$$

zerfällt, die allerdings nur im Falle

$$(15) \quad |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}|^2 - 4 |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| \neq 0$$

voneinander verschieden sind.

Jede definiert eine einfach unendliche Kurvenschar auf der Fläche, und wenn

$$(16) \quad |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}|, |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}|, |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}|$$

wie wir immer annehmen, einwertige analytische Funktionen sind, geht durch jeden Flächenpunkt (u, v) nur eine Kurve jeder Schar.

Damnach definiert eine Gleichung von der Form (1) ein Kurvennetz auf der Fläche, sobald

$$(17) \quad |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}|^2 - 4 |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{uv}| |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| \neq 0$$

ist.

Wenn dagegen

$$(18) \quad |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}|^2 - 4 |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{uv}| |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| = 0$$

ist, also die linke Seite von (1) ein vollständiges Quadrat in du und dv vorstellt, so fallen beide Kurvenscharen in ein und dieselbe zusammen.

Wenn

$$(19) \quad |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{uu}| = 0$$

und

$$(20) \quad |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{vv}| = 0$$

gelten, so folgt aus (1)

$$(21) \quad du \, dv = 0;$$

hieraus ergibt sich

$$(22) \quad u = \text{const.}$$

oder

$$(23) \quad v = \text{const.}$$

Wenn

$$(24) \quad |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}| = |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uv} \delta_{uv}|$$

und

$$(25) \quad |\delta\delta_u \delta_v \delta_{uu} \delta_{vv}| = 0$$

gültig sind, so folgt aus (1)

$$(26) \quad u \pm v = \text{const.}$$

Nun führen wir eine Kreisfläche \bar{b} ein, wo

$$(27) \quad \bar{b}(u, v) = \rho_a(v) \xi^a(u) - \cos \varphi(u, v) \eta(u)$$

ist, dann folgt aus (2) und (27)

$$(28) \quad \frac{b + \bar{b}}{2} = \rho_a \xi^a, \quad \frac{b - \bar{b}}{2} = \cos \varphi \cdot \eta.$$

$$b_v = -b \cos v \xi^I - b \sin v \xi^{II} - \sin v \dot{\xi}^I + \cos v \dot{\xi}^{II} - \frac{d\sqrt{\prime\prime}}{dv} \eta,$$

$$\left\{ \begin{aligned} b_u &= -b \sin v \dot{\xi}^I + b \cos v \dot{\xi}^{II} + \cos v \ddot{\xi}^I + \sin v \ddot{\xi}^{II} \\ &\quad - d\sqrt{\prime\prime}/dt \cdot \eta - \sqrt{\prime\prime} \dot{\eta} - \dot{b} \sin v \xi^I + \dot{b} \cos v \xi^{II} \\ &= \{A_1 \cos v + A_2 \sin v - \sqrt{\prime\prime} \cdot bw/q - \dot{b} \sin v\} \xi^I \\ &\quad + \{B_1 \cos v + B_2 \sin v + \sqrt{\prime\prime} \cdot bs/p + \dot{b} \cos v\} \xi^{II} \\ &\quad + \{C_1 \cos v + C_2 \sin v + \sqrt{\prime\prime} \cdot s/p - b \sin v\} \dot{\xi}^I \\ &\quad + \{D_1 \cos v + D_2 \sin v + \sqrt{\prime\prime} \cdot w/q + b \cos v\} \dot{\xi}^{II} \\ &\quad + \{s \cos v + w \sin v - d\sqrt{\prime\prime}/du\} \eta, \quad \text{u. s. w.}^{(1)}. \end{aligned} \right.$$

(K) Gilt

$$(1) \quad b_{uu} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} b_u - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} b_v = 0,$$

so wollen wir b nach Eisenhart A-Kreisfläche nennen⁽²⁾, woraus folgt:

$$(2) \quad \begin{cases} x = bX + \Delta(b, X), & y = bY + \Delta(b, Y), \\ z = bZ + \Delta(b, Z). \end{cases}$$

Man vergleiche x, y, z, Δ und ω, X, Y, Z mit EISENHARTS Arbeit⁽³⁾.

Weiter kann man untersuchen wie in EISENHARTS Arbeit⁽⁴⁾.

(L) Damit unsere Kreisfläche b einer Kugel ξ gleich ist, musz

1 NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, VI, (VII), (VIII), Tôhoku Math. Journ., Vol. 32, 1930, S. 205.

2 EISENHART, L. P.: Surfaces with the Same Spherical Representation of their Lines of Curvature as Pseudospherical Surfaces, American Journ. of Math., Vol. XXVII, 1905, S. 113.

(3) EISENHART, a. a. O., S. 117.

(4) l. c. '3.

$$(1) \quad 0 = (b \xi) = \rho_{\alpha}(\xi \dot{\xi}^{\alpha}) + \cos \varphi \cdot (\xi \eta)$$

gelten.

(1) ist unsere Bedingung.

(M) Wir knüpfen an die (A) die gegebene Kreisflächendefinition an und stellen uns die Aufgabe, die Länge einer auf der Kreisfläche

$$(1) \quad b = b(u^1, u^2)$$

gelegenen stetig differenzierbaren Kurve

$$(2) \quad u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t)$$

zu ermitteln. Wir finden dafür

$$(3) \quad s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{b}^2} dt.$$

Es ist aber

$$(4) \quad \dot{b} = b_1 \dot{u}^1 + b_2 \dot{u}^2$$

und

$$(5) \quad \dot{b}^2 = b_1^2 \dot{u}^1 \dot{u}^1 + 2 b_1 b_2 \dot{u}^1 \dot{u}^2 + b_2^2 \dot{u}^2 \dot{u}^2.$$

Wir kürzen, wie üblich, ab:

$$(6) \quad g_{11} = b_1^2, \quad g_{12} = b_1 b_2, \quad g_{21} = b_2 b_1 (= g_{12}), \quad g_{22} = b_2^2$$

und können kurz schreiben:

$$(7) \quad \dot{b}^2 = \sum g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k.$$

Die quadratische Differentialform (7) heisst die erste Fundamentalform. Die g_{ik} sind dabei stetige Funktion der u^1, u^2 . Vielfach sind auch andere Bezeichnung in Gebrauch, namentlich in der älteren Literatur

$$(8) \quad g_{11} = E, \quad g_{12} = F, \quad g_{22} = G.$$

Dann kann man den folgenden Satz beweisen.

Satz: b und \bar{b} seien zwei konvexe Kreisflächen, deren Punkte eindeutig durch parallele und gleichgerichtete Kreisflächennormalen einander zugeordnet sein. Für jede Wahl von gemeinsamen Kreisflächen-

parametern u^1 und u^2 seien die ersten Fundamentalgrößen in zugeordneten Punkten einander gleich:

$$(9) \quad E = E, \quad \bar{F} = F, \quad G = G,$$

dann sind die beiden Kreisflächen bis auf eine Translation miteinander identisch⁽¹⁾.

Weiter kann man die Tangentialebene, die Hauptnormalenfläche und die Binormalenfläche, u. s. w. befinden.

Wir untersuchen eine Transformation

$$(10) \quad \bar{d}(u, v) = d(u, v) + \frac{\lambda}{2} d_u;$$

wir erhalten den folgenden⁽²⁾

Satz: Sind d und \bar{d} Kugeln, so gilt

$$\log G = \text{const.} \int E du + V.$$

Weiter kann man untersuchen wie in des Verfassers Arbeit⁽³⁾.

(N) Wir betrachten

$$(1) \quad \bar{x} = \{\hat{\xi} - \bar{\eta}\} \cdot \{1 + (\hat{\xi} \bar{\eta})\},$$

$$(2) \quad \bar{x} = \{\hat{\xi} + \eta\} \cdot \{1 - (\hat{\xi} \bar{\eta})\},$$

$$(3) \quad \bar{x} = \{\hat{\xi} + \varepsilon \bar{\eta}\} \cdot \sqrt[+]{1 - 2\varepsilon(\hat{\xi} \bar{\eta})}$$

und

$$(4) \quad \bar{x} = \{\hat{\xi} - \varepsilon \bar{\eta}\} \cdot \sqrt[+]{1 + 2\varepsilon(\hat{\xi} \bar{\eta})}$$

wieder⁽⁴⁾, wo $\hat{\xi}$ und $\bar{\eta}$ die Kugeln in R_3 bedeuten.

Da $(\hat{\xi} \bar{\eta}) = 1$ gilt, ist ε die Einheit von dualen Zahlen ($\varepsilon^2 = 0$).

(1) Vgl. NAKAJIMA, S.: Über die ersten Fundamentalgrößen bei Eiflächen, Jap. Journ. of Math., Vol. IV, 1927, S. 101.

(2) MATUMURA, S.: On a Pair of Surfaces Mutually Related, Tôhoku Math. Journ., Vol. 39, 1934, S. 18.

(3) a. a. O., S. 19, u. s. w..

MATUMURA, S.: On some differentialequation (X), Journ. of the Society of tropical agriculture, Vol. VI, 1934, S. 711, S. 712, S. 716, S. 719.

MATUMURA, S.: On some differentialequation (IX), Journ. of the Society of tropical agriculture, Vol. VI, 1934, S. 655.

(4) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXXII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI, 1939, S. 89.

Liegt der Punkt $\bar{\xi}$ in (1) auf unserer Kreisfläche $b(u, v)$, so entsteht

$$(5) \quad (b \bar{\xi}) = 0;$$

hieraus folgt

$$(6) \quad (\rho_{\alpha} \overset{\circ}{\xi}^{\alpha} + \cos \varphi \cdot \eta, \{ \xi - \eta \} \cdot \{ 1 + (\xi \eta) \}) = 0$$

oder

$$(7) \quad \rho_{\alpha} (\overset{\circ}{\xi}^{\alpha} \xi) + \cos \varphi (\eta \xi) - \rho_{\alpha} (\overset{\circ}{\xi}^{\alpha} \eta) - \cos \varphi = 0,$$

wenn

$$(8) \quad 1 + (\xi \eta) \neq 0, \quad \eta \equiv \bar{\eta}.$$

Von (2), (3) und (4) gilt das Gleiche.

(O) Wenn

$$(1) \quad b_{t\tau} = \frac{\partial^2 b}{\partial t \partial \tau} = 0$$

ist, d. h.⁽¹⁾

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ -A_1 \sin \tau + A_2 \cos \tau + \frac{bw}{q} \frac{d\sqrt{\prime\prime}}{d\tau} - \dot{b} \cos \tau \right\} \xi^I \\ + \left\{ -B_1 \sin \tau + B_2 \cos \tau - \frac{bs}{p} \frac{d\sqrt{\prime\prime}}{d\tau} - \dot{b} \sin \tau \right\} \xi^{II} \\ + \left\{ -C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau - \frac{s}{p} \frac{d\sqrt{\prime\prime}}{d\tau} - b \cos \tau \right\} \dot{\xi}^I \\ + \left\{ -D_1 \sin \tau + D_2 \cos \tau - \frac{w}{p} \frac{d\sqrt{\prime\prime}}{d\tau} - b \sin \tau \right\} \dot{\xi}^{II} \\ + \left\{ -s \sin \tau + w \cos \tau + \frac{d^2 \sqrt{\prime\prime}}{dt d\tau} \right\} \eta = 0, \end{array} \right.$$

so folgt

$$(3) \quad b = U(t) + V(\tau);$$

daraus ersieht man, dass unsere Kreisfläche b eine Translation ist.

Die Bedingung dafür, dass b die Funktion von t allein ist, ist die

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, (VI), (VII), (VIII), Tôhoku Math. Journ., Vol. 32, 1930, S. 205.

$$(4) \quad \delta_\tau = 0$$

oder

$$(5) \quad \begin{cases} -b \cos \tau \dot{x}^I - b \sin \tau \dot{x}^{II} - \sin \tau \ddot{x}^I \\ + \cos \tau \ddot{x}^{II} + d \sqrt{\tau} / d\tau \cdot \eta = 0, \end{cases}$$

wo

$$(6) \quad \sqrt{\tau}'' = \sqrt{\tau} - p \cos^2 \tau - q \sin^2 \tau \cdot \eta$$

ist.

Nach des Verfassers Arbeit⁽¹⁾ kann man wissen, dass δ die Funktion von τ allein ist

$$(7) \quad \delta_\tau = 0$$

oder

$$(8) \quad \begin{cases} -b \sin \tau \cdot \dot{x}^I + b \cos \tau \cdot \dot{x}^{II} + \cos \tau \ddot{x}^I \\ + \sin \tau \cdot \ddot{x}^{II} + d \sqrt{\tau}'' / dt \cdot \eta + \sqrt{\tau}'' \cdot \eta \\ - \dot{b} \sin \tau \dot{x}^I + \dot{b} \cos \tau \dot{x}^{II} = 0. \end{cases}$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{A}_1 \cos \tau + \dot{A}_2 \sin \tau + \frac{d}{dt} \left(\frac{bw}{q} \sqrt{\tau}'' \right) \\ - \ddot{b} \sin \tau + A_1 C_1 \cos \tau + A_1 C_2 \sin \tau \\ - A_1 \cdot s/p \sqrt{\tau}'' - A_1 b \sin \tau + A_2 D_1 \cos \tau \\ + A_2 D_2 \sin \tau - A_2 \cdot w/p \sqrt{\tau}'' + A_2 b \cos \tau \\ + \frac{bws}{q} \cos \tau + \frac{bw^2}{q} \sin \tau + \frac{bw}{q} \frac{d \sqrt{\tau}''}{dt} \end{array} \right\} \dot{x}^I + \dots = 0$$

ist die Bedingung dafür, dass

$$(10) \quad \delta = (\text{Funktion von } \tau) t + (\text{Funktion von } \tau)$$

ist.

Die Bedingung dafür, dass

$$(11) \quad \delta = (\text{Funktion von } t) \tau + (\text{Funktion von } t)$$

gilt, ist die

(1) NAKAJIMA, a. a. O., S. 204.

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & b \sin \tau \, \dot{x}^I - b \cos \tau \, \dot{x}^{II} - \cos \tau \, \dot{x}^I - \sin \tau \, \dot{x}^{II} \\ & + d^2 \sqrt{\prime\prime} / d\tau^2 \cdot \eta = 0. \end{aligned} \right.$$

Gelten

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \dot{A}_1 \cos \tau + \dot{A}_2 \sin \tau + \frac{d}{dt} \left(\frac{bw}{q} \sqrt{\prime\prime} \right) - \ddot{b} \sin \tau \right. \\ & + A_1 C_1 \cos \tau + A_2 C_2 \sin \tau - A_1 s/p \sqrt{\prime\prime} - A_1 b \sin \tau \\ & + A_2 D_1 \cos \tau + A_2 D_2 \sin \tau - A_2 w/q \sqrt{\prime\prime} + A_2 b \cos \tau \\ & \left. + \frac{bws}{q} \cos \tau + \frac{bw^2}{q} \sin \tau + \frac{bw}{q} \frac{d\sqrt{\prime\prime}}{dt} \right\} + \dots = 0 \end{aligned} \right.$$

und

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} & b \sin \tau \cdot \dot{x}^I - b \cos \tau \, \dot{x}^{II} - \cos \tau \, \dot{x}^I - \sin \tau \, \dot{x}^{II} \\ & + d^2 \sqrt{\prime\prime} / d\tau^2 \cdot \eta = 0 \end{aligned} \right.$$

gleichfalls, so erhalten wir

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & b = (\text{Funktion von } v) u + (\text{Funktion von } v) \\ & = (\text{Funktion von } u) v + (\text{Funktion von } u) \end{aligned} \right.$$

oder

$$(16) \quad b = \text{const. } u v + \text{const. } u + \text{const. } v + \text{const.}.$$

Nach des Verfassers Arbeit⁽¹⁾ kann man $b_{uu\dots}$ und $b_{u\dots\tau\dots}$ berechnen.

Weiter gilt

$$(17) \quad b_\tau = \text{const.}$$

oder

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} & -b \cos \tau \, \dot{x}^I - b \sin \tau \, \dot{x}^{II} - \sin \tau \, \dot{x}^I \\ & + \cos \tau \, \dot{x}^{II} + d \sqrt{\prime\prime} / d\tau \cdot \eta = 0 \end{aligned} \right.$$

so entsteht

$$(19) \quad b = \text{const. } \tau + \text{const.}$$

(1) NAKAJIMA, a. a. O., S. 206.

Wenn

$$(20) \quad \mathfrak{d}_t = \text{const.}$$

oder

$$(21) \quad \begin{cases} -b \sin \tau \dot{\xi}^I + b \cos \tau \dot{\xi}^{II} + \cos \tau \{A_1 \dot{\xi}^I + B_1 \dot{\xi}^{II} \\ + C_1 \dot{\xi}^I + D_1 \dot{\xi}^{II} + s \eta\} + \sin \tau \{A_2 \dot{\xi}^I + B_2 \dot{\xi}^{II} + C_2 \dot{\xi}^I \\ + D_2 \dot{\xi}^{II} + w \eta\} + d \sqrt{\gamma} / dt \cdot \eta = \text{const.}, \end{cases}$$

ist, so haben wir

$$(22) \quad \mathfrak{d} = \text{const. } t + \text{const.}$$

Gilt

$$(23) \quad \mathfrak{d} = \rho_a(\tau) \overset{\circ}{\xi}^a(t) + \cos \varphi(t, \tau) \eta(t) = f(t) + \varphi(\tau),$$

so ist

$$(24) \quad \mathfrak{d}_{t\tau} = 0;$$

hieraus ergibt sich die Gleichung für die Krümmungslinien

$$(25) \quad dt d\tau = 0$$

d. h.

$$(26) \quad t = \text{const.}$$

oder

$$(27) \quad \tau = \text{const.}$$

Gilt

$$(28) \quad \mathfrak{d}_{\tau\tau} = 0,$$

so ist die Gleichung der Krümmungslinien

$$(29) \quad d\tau^2 = 0.$$

Ist

$$(30) \quad \mathfrak{d}_{\tau\tau} = 0,$$

so ist die Gleichung der Krümmungslinien

$$(31) \quad d\tau^2 = 0.$$

(P) Die Gleichung der Minimallinien auf unserer Kreisfläche $b(t, \tau)$ ist

$$(1) \quad (\theta_t \theta_t) dt^2 + 2(\theta_t \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2 = 0,$$

wobei $(\theta_t \theta_t)$, $(\theta_t \theta_\tau)$ und $(\theta_\tau \theta_\tau)$ in des Verfassers Arbeit⁽¹⁾ stehen.

Ist

$$(2) \quad (\theta_t \theta_\tau) = 0$$

oder

$$(3) \quad \begin{cases} -b \cos \tau \{A_1 \cos \tau + A_2 \sin \tau + \sqrt{\dots} bw/q - \dot{b} \sin \tau\} \\ - \dots = 0, \end{cases}$$

so sind

$$(4) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(5) \quad \tau = \text{const.}$$

zueinander orthogonal.

Wenn

$$(6) \quad (\theta_\tau \theta_\tau) = 0$$

oder

$$(7) \quad -\frac{pq}{p \cos^2 \tau + q \sin^2 \tau} = 0,$$

ist, so sind

$$(8) \quad t = \text{const.}$$

und

$$(9) \quad dt + 2(\theta_t \theta_\tau) d\tau = 0$$

die Minimallinien auf $b(t, \tau)$.

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen (VI), (VII), (VIII), Tôhoku Math. Journ., Vol. 32, 1930, S. 211.

Weiter ist

$$(10) \quad (\theta_i \theta_i) = 0$$

oder

$$(11) \quad A_1 \cos \tau + A_2 \sin \tau + \sqrt{bw/q - \dot{b} \sin \tau}^2 + \dots = 0,$$

so sind

$$(12) \quad \tau = \text{const.}$$

und

$$(13) \quad 2(\theta_i \theta_i) dt + d\tau = 0$$

die Minimallinien auf $\mathfrak{b}(t, \tau)$.

(2)

Im folgenden möchten wir einige Bemerkungen über die Theorie der Kreise und Kugeln machen.

(A)

$$(1) \quad f(\mathfrak{x}^I, \mathfrak{x}^{II}, \mathfrak{x}^{III}, t) = 0$$

bezeichnet ein Paar der Raumkurven in R_3 , wo \mathfrak{x}^I , \mathfrak{x}^{II} und \mathfrak{x}^{III} Kugeln in R_3 und t ein Parameter ist.

Nun setzen wir

$$(2) \quad {}_{(a)}\mathfrak{x} + \lambda {}_{(a)}\mathfrak{y}$$

anstatt \mathfrak{x}^a in (1) ein, so ergibt sich daraus

$$(3) \quad f({}_{(1)}\mathfrak{x} + \lambda {}_{(1)}\mathfrak{y}, {}_{(2)}\mathfrak{x} + \lambda {}_{(2)}\mathfrak{y}, {}_{(3)}\mathfrak{x} + \lambda {}_{(3)}\mathfrak{y}, t) = 0$$

oder

$$(4) \quad \begin{cases} 0 = f_1 + \lambda \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{x}^I} {}_{(1)}\mathfrak{y} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{x}^{II}} {}_{(2)}\mathfrak{y} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathfrak{x}^{III}} {}_{(3)}\mathfrak{y} + \frac{\partial f_1}{\partial t} t \right) \\ \quad + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} (\dots) + \dots, \end{cases}$$

so folgt

$$(5) \quad \lambda = 0,$$

wenn

$$(6) \quad f_1 = 0$$

gültig ist, wo ${}_{(a)}\xi$ und ${}_{(a)}\eta$ Kugeln in R_3 bedeuten.

Weiter gilt

$$(7) \quad \lambda^3 = 0,$$

wenn

$$(8) \quad f_1 = 0$$

und

$$(9) \quad \frac{\partial f_1}{\partial \xi^I} {}_{(1)}\eta + \frac{\partial f_1}{\partial \xi^{II}} {}_{(2)}\eta + \frac{\partial f_1}{\partial \xi^{III}} {}_{(3)}\eta + \frac{\partial f_1}{\partial t} t = 0$$

gelten, wo λ Parameter ist. Da besteht f_1 in SALMON-FIEDLERS Buch⁽¹⁾.

Aus (5) folgt

$$(10) \quad {}_{(2)}\xi + \lambda {}_{(3)}\eta \equiv {}_{(a)}\xi.$$

(B)

$$(1) \quad f_1(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) = c_1, \quad f_2(\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}) = c_2, \quad F(c_1, c_2) = 0$$

bezeichnet zwei Paare der Raumkurven in R_3 , wo ξ^I , ξ^{II} und ξ^{III} Kugeln in R_3 , c_1 und c_2 Konstanten bedeuten.

Aus (1) folgt

$$(2) \quad F(f_1, f_2) = 0,$$

die unsere zwei Paare der Raumkurven in R_3 bezeichnet.

$$(3) \quad \begin{cases} f_1(\xi^I, \xi^{II}, \dots, \xi^{(n+1)}) = c_1, & f_2(\xi^I, \xi^{II}, \dots, \xi^{(n+1)}) = c_2, \\ F(c_1, c_2) = 0 \end{cases}$$

bezeichnet zwei Raumkurvenpaare in R_n , wo ξ^I , ξ^{II} , ... und $\xi^{(n+1)}$ Kugeln in R_n bedeuten; so folgt

$$(4) \quad F(f_1, f_2) = 0,$$

da c_1 und c_2 Konstanten sind.

(1) KOMMERELL, K.: SALMON-FIEDLERS Analytische Geometrie des Raumes, Fünfte Auflage, Berlin und Leipzig, 1922, S. 23.

$$(5) \quad \begin{cases} x^\alpha [\alpha = I, II, III], & x^I \equiv \alpha, \\ y^\alpha [\alpha = I, II, III], & y^I \equiv \alpha \end{cases}$$

und

$$(6) \quad z^\alpha [\alpha = I, II, III], \quad z^I \equiv \alpha$$

bezeichnen drei Punkte auf einer festen Kugel α in R_3 .

$$(7) \quad x^\alpha(t) [\alpha = I, II, III], \quad x^I \equiv \alpha$$

bezeichnet eine Kurve auf α .

$$(8) \quad x^\alpha(u, v) [\alpha = I, II, III], \quad x^I \equiv \alpha$$

bezeichnet zwei Scharen der Kurven auf α , wo x^I , x^{II} und x^{III} Kugeln in R_3 bedeuten.

Da u und v Parameter sind.

$$(9) \quad F(x^I, x^{II})$$

bezeichnet ein Paar der Punkte P_1, P_2 in R_2 , wo x^I und x^{II} Kreise in R_2 bedeuten.

$$(10) \quad F(x^I + \partial, x^{II} + \varepsilon)$$

bezeichnet die benachbarten Punkte P_1, P_2 von P_1, P_2 , wo

$$(11) \quad \begin{cases} F(x^I + \partial, x^{II} + \varepsilon) = F(x^I, x^{II}) + \left(\partial \frac{\partial}{\partial x^I} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^{II}} \right) F(x^I, x^{II}) + \dots \\ \quad = F(x^I, x^{II}) + \left(\partial \frac{\partial}{\partial x^I} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^{II}} \right) F(x^I, x^{II}) \end{cases}$$

gilt, wenn ∂ und ε sehr klein sind.

Also ist

$$(12) \quad \begin{cases} F(x^I(t) + \partial, x^{II}(t) + \varepsilon) = F(x^I(t), x^{II}(t)) \\ \quad + \left(\partial \frac{\partial}{\partial x^I} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x^{II}} \right) \times F(x^I(t), x^{II}(t)) \end{cases}$$

die Bedingung zwischen zwei Kurvenpaaren von P_1, P_2 und \bar{P}_1, \bar{P}_2 , wo t den Parameter bedeutet.

(C) Im folgenden möchten wir die Arbeit⁽¹⁾ von GOW, CAMPBELL und COGHILL untersuchen.

Wenn unsere Kurve die innen-umdrehbare Kurve eines n -Eckes ist, so müssen wir⁽²⁾

$$(1) \quad p = a + \cos \varphi \cdot f(\varphi)$$

in

$$(2) \quad (p + p'') \cos \varphi = -V^2/g,$$

oder

$$(3) \quad \rho \cos \beta = -V^2/g, \quad \varphi = \beta$$

setzen, woraus man $f(\varphi)$ finden kann.

Damit unsere Kurve ein Kreis ist, musz p in der Form

$$(4) \quad p = \text{const.} + \text{const.} \cos \varphi + \text{const.} \sin \varphi$$

sein, wo p und φ polare Tangentenkoordinaten bedeuten.

Aus (3) kann man

$$(5) \quad \tan \theta = \frac{1}{3} \cdot d\rho/ds = \frac{1}{3} \tan \varphi \cdot d\varphi/ds$$

erhalten, wo θ die Deviation unserer Kurve⁽³⁾ ist.

Nach ROTHE kann man wissen, dasz⁽⁴⁾

$$(6) \quad \tan \theta = \frac{1}{3} \cdot \frac{d\rho}{ds} - \frac{\rho}{e} = \frac{1}{3} \tan \varphi \frac{d\varphi}{ds} + \frac{V^2}{ge \cos \varphi}$$

gültig ist.

Aus

$$(7) \quad \rho(\varphi) = -\frac{V^2}{g} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

ersieht man, dasz

(1) GOW, CAMPBELL and COGHILL: A Laboratory Investigation of Ball Milling, San Francisco Meeting, October, 1929.

(2) HAYASHI, T.: On the In-revolvable and Circum-revolvable Curves of a Regular Polygon, The Science Reports of the Tōhoku Imp. Univ., Vol. XV (1926), S. 263.

(3) MATUMURA, S.: Über die Deviation ebener Kurven, Tōhoku Math. Journ. 39 (1934), S. 239.

(4) Vergl. Archiv der Mathematik und Physik III, Reihe XXVIII, Heft 3 4, S. 171.

$$(8) \quad \rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi) = 0$$

gilt, wo ρ den Krümmungshalbmesser bedeutet.

Nun setzen wir

$$(9) \quad \rho(\varphi) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

in (8) ein, so folgt

$$(10) \quad \rho(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} \{a_{2m+1} \cos(2m+1)\varphi + b_{2m+1} \sin(2m+1)\varphi\}.$$

Aus (8) folgt

$$(11) \quad \rho(\varphi) = -\rho(\varphi + \pi) = \rho(\varphi + 2\pi);$$

hieraus ersieht man, dass $\rho(\varphi)$ eine periodische Funktion bedeutet, deren Periode 2π ist.

Aus der wohlbekannten Formel erhalten wir die Relation

$$(12) \quad \begin{cases} x = \int \left\{ \cos \int \frac{-g \cos \varphi}{V^2} ds \right\} ds, \\ y = \int \left\{ \sin \int \frac{-g \cos \varphi}{V^2} ds \right\} ds, \end{cases}$$

wo x und y die kartesischen Koordinaten in R_2 bedeuten.

Gilt

$$(13) \quad \rho(\varphi) = \text{const.} \sin \varphi$$

oder

$$(14) \quad \rho(\varphi) = \text{const.} \cos \varphi + \text{const.} \sin \varphi$$

anstatt (7), so kann man auch (11) beweisen.

Aus (7) folgt

$$(15) \quad \rho = -V^2/g = \text{const.},$$

wenn φ klein ist, d. h. unsere Kurve ein Kreis ist.

Soll der Abstand der beiden Kurven K und K' in (3) $\pm c$ gleich sein, so ist nun nachzuweisen, dass

$$(16) \quad \rho' - \rho = \pm c$$

ist, wo c konstant ist. Da K und K' die Parallelkurven sind.

Aus (16) entsteht

$$(17) \quad -\frac{V^2}{g \cos \varphi} + \frac{V^2}{g' \cos \varphi} = \pm c.$$

(D) Im folgenden möchten wir eine Verallgemeinerung

$$(1) \quad H(u, v) = k : \cos \varphi(u, v)$$

in R_3 von GOW-CAMPBELL-COGHILLS Aufgabe angeben, wo H die Stützfunktion von Eikörper E in R_3 , u und v Parameter sind.

Ist E eine A-Fläche⁽¹⁾, so musz

$$(2) \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial v} = 0$$

sein.

Aus (1), (2) ergibt sich

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \sin \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \sin \varphi \cos^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ & - \frac{\partial \log \cos \omega}{\partial u} \sin \varphi \cos^2 \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0; \end{aligned} \right.$$

hieraus ersieht man, dass (3) von k in (1) unabhängig ist, wo k Konstante ist.

So folgt der

Satz: Wenn unsere Fläche eine A-Fläche ist, so ist φ von k unabhängig.

Weiter nehmen wir

$$(4) \quad H(u, v) = \{k : \cos \varphi(u, v)\} + \{k_1 : \sin \varphi(u, v)\}$$

oder

$$(5) \quad H(u, v) = k \cos \varphi(u, v) + k_1 \sin \varphi(u, v)$$

anstatt (1), so kann man auch den obigen Satz beweisen, wo k und k_1 die Konstanten bedeuten.

1) EISENHART, L. P.: Surfaces with the Same Spherical Representation of their Lines of Curvature as Pseudospherical Surfaces, American Journ. of Math., Vol. XXVII, 1905, S. 113.

Es ist klar, dass, wenn $H(u, v) = \text{const.}$ ist, so unsere Fläche die Kugel ist.

Wenn die Fläche

$$(6) \quad H(u, v) = U(u) + V(v)$$

eine A-Fläche ist, so muss

$$(7) \quad a U' + b V' = 0$$

sein, wo U Funktion von u allein und V Funktion von v allein ist. (7) ist die Bedingung dafür, dass unsere Translationsfläche (6) eine A-Fläche ist.

Wenn ${}_{(1)}f(u, v)$ und ${}_{(2)}f(u, v)$ beide A-Flächen sind, so muss auch

$$(8) \quad H(u, v) = \text{const. } {}_{(1)}f(u, v), \quad H(u, v) = \text{const. } {}_{(2)}f(u, v)$$

und

$$(9) \quad H(u, v) \equiv {}_{(1)}f(u, v) + \text{const. } {}_{(2)}f(u, v)$$

A-Fläche sein.

Sind ${}_{(1)}f$, ${}_{(2)}f$, H und λ A-Flächen, so muss

$$(10) \quad \lambda_v {}_{(2)}f_u + \lambda_u {}_{(3)}f_v = 0$$

sein, wo

$$(11) \quad H = {}_{(1)}f(u, v) + \lambda(u, v) {}_{(2)}f(u, v)$$

gilt, denn aus (11) folgt

$$\left\{ \begin{aligned} H_{uu} + a H_u + b H_v &= \{ {}_{(1)}f_{uu} + a {}_{(1)}f_u + b {}_{(1)}f_v \} \\ &+ {}_{(2)}f \{ \lambda_{uu} + a \lambda_u + b \lambda_v \} + \lambda \{ {}_{(2)}f_{uv} + a {}_{(2)}f_u + b {}_{(2)}f_v \} \\ &+ \lambda_u {}_{(2)}f_v + \lambda_v {}_{(2)}f_u. \end{aligned} \right.$$

(E) Sind ${}_{(1)}H$, ${}_{(2)}H$, ... und ${}_{(n)}H$ die Stützfunktionen vor Eikörpern ${}_{(1)}k$, ${}_{(2)}k$, ... bzw. ${}_{(n)}k$ in R_3 , so ist der Eikörper K auch A-Fläche, wo ${}_{(i)}k$ A-Flächen sind und

$$(1) \quad H = 1 / \sum a \cdot \{ {}_{(1)}a {}_{(1)}H + {}_{(2)}a {}_{(2)}H + \dots + {}_{(n)}a {}_{(n)}H \}$$

gilt, wo ${}_{(i)}a$ die Konstanten bedeuten.

Da ist H die Stützfunktion von K .

Dieser Beweis ist klar aus der Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin \omega}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\xi \log \cos \omega}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Natürlich kann man die obige Untersuchung über Kugeln anstatt Eikörpern anstellen.

(F) Im folgenden möchten wir etwas über Eikurven in R_3 angeben.

Als Bestimmungsstück der Tangente t im Punkte M einer ebenen Kurve kann man nehmen: die Länge $OP = p$ der vom Anfangspunkt O der Koordinaten auf die Tangente gefällten Normalen und den Winkel θ , den die Tangente mit der positiven Richtung der Abszissenachse einschliesst.

Die Gleichung der als Hüllkurve ihrer Tangenten betrachteten Kurve ist dann

$$(1) \quad p = p(\theta).$$

Gilt

$$(2) \quad p'' + ap' + b = 0,$$

so wollen wir unsere Eikurve B-Kurve nennen, wo a und b die Funktionen von θ sind.

Für das Bogenelement erhält man sofort

$$(3) \quad \begin{cases} ds = (p + p'') d\theta = \{(1 - b)p - ap'\} d\theta \\ \quad = -ap' d\theta = A p' d\theta, \end{cases}$$

wenn

$$(4) \quad b = 1, \quad A = -a$$

gelten, so kann man setzen

$$(5) \quad s = A \int p' d\theta = Ap,$$

wenn

$$(6) \quad A = \text{const.}$$

gültig ist.

Weiter gibt es

$$(7) \quad \begin{cases} P = \frac{1}{2} \int_{a_0}^a \{(1-b)p^2 - a p p'\} d\theta = \frac{1}{2} \int_{a_0}^a \{-a p p'\} d\theta \\ = A/4 \cdot (a^2 - a_0^2); \end{cases}$$

hierbei ist die zwischen den Fahrstrahlen der Berührungspunkte M_0 und M , den Tangenten t_a und t_{a_0} und dem Kurvenbogen $M_0 M$ enthaltene Fläche durch den Ausdruck

$$(8) \quad P = \frac{1}{2} \int_{a_0}^a p(p + p'') d\theta$$

gegeben.

$$(9) \quad \bar{p} = p + \text{const.}$$

ist die Parallelkurve von

$$(10) \quad p = p(\theta).$$

Im allgemeinen gehört $\bar{p} = \bar{p}(\theta)$ nicht zu B-Kurve, wenn $p = p(\theta)$ B-Kurve ist.

Nun werden die aus

$$(11) \quad \begin{cases} {}_{(1)}p = {}_{(1)}p(\theta), \\ {}_{(2)}p = {}_{(2)}p(\theta), \\ \dots\dots\dots \\ {}_{(n)}p = {}_{(n)}p(\theta) \end{cases}$$

zusammengesetzten Kurven

$$(12) \quad p = 1/\sum a \cdot \{{}_{(1)}a {}_{(2)}p + {}_{(2)}a {}_{(3)}p + \dots + {}_{(n)}a {}_{(n)}p\}$$

untersucht, wo ${}_{(i)}a$ die Konstanten bedeuten.

Sind

$$(13) \quad \begin{cases} {}_{(1)}p = {}_{(1)}p(\theta), \\ {}_{(2)}p = {}_{(2)}p(\theta), \\ \dots\dots\dots \\ {}_{(n)}p = {}_{(n)}p(\theta) \end{cases}$$

B-Kurven, so ist auch p B-Kurve.

Ist der Kreis B-Kurve, so musz aus (2)

$$(14) \quad b = 0$$

sein.

Nun werden wir R-Abstand⁽¹⁾

$$(15) \quad r = p : q$$

betrachten; es folgt

$$(16) \quad b = \frac{p''q^3 - q''q^2p - 2q^2p'q' + 2qpq'^2 - p''q + pq''}{q - p - q^4},$$

wenn $p=p(\theta)$, $q=q(\theta)$ und $r=r(\theta)$ B-Kurven sind.

Weiter kann man Süss' Formel⁽²⁾

$$(17) \quad \rho = \frac{ds}{d\sigma} = \frac{\rho(\xi)}{\rho(\epsilon)} = \frac{(1-b)p - ap'}{(1-b)q - aq'} = \frac{p'}{q'}$$

berechnen, wenn

$$(18) \quad b = 1$$

ist, so kann man die Formeln

$$(19) \quad 2I(\xi) = \oint r ds = \oint r \frac{p'}{q'} d\sigma,$$

$$(20) \quad S = \oint ds = \oint \rho d\sigma = \oint \frac{p'}{q'} d\sigma,$$

$$(21) \quad 2E = \oint \frac{p^2}{q^3} d\sigma, \quad \text{u. s. w.}$$

in Süss' Arbeit betrachten.

(G) Besteht⁽³⁾

$$(1) \quad p'' + ap = 0$$

in

(1) SÜSS, W.: Zur relativen Differentialgeometrie, I: Japanese Journal of Mathematics, Vol. IV, 1927, S. 59.

(2) l. c. (1).

(3) Wenn (2) der Kreis als besonderer Fall enthalten wird, so setzen wir diese Arbeit hier.

$$(2) \quad p = p(\theta),$$

so wollen wir

$$(3) \quad p = p(\theta)$$

C-Kurve nennen, wobei $p=p(\theta)$ die Ebene-Kurve bezeichnet.

Für C-Kurve kann man untersuchen wie in (I), z. B. wenn

$$(4) \quad p'' + ap = 0$$

und

$$(5) \quad q'' + aq = 0$$

gelten, so folgt

$$(6) \quad r = \frac{p}{q} = \frac{\int p''/a \cdot d\theta}{\int p''/a \cdot d\theta};$$

hieraus ersieht man, dass, wenn $p=p(\theta)$ und $(q=q(\theta))$ C-Kurve sind, so

$$(7) \quad r = \int \{p'' : a\} d\theta : \int \{q'' : a\} d\theta,$$

ist, wo r R-Abstand ist.

Insbesondere ist a eine Konstante; es folgt so aus (7)

$$(8) \quad r = \int p'' d\theta : \int q'' d\theta;$$

daraus kommen⁽¹⁾

$$(9) \quad 2I(\xi) = \oint \{ \int p'' d\theta : \int q'' d\theta \} ds,$$

$$(10) \quad S = \oint \{ \int p'' d\theta : \int q'' d\theta \} ds,$$

$$(11) \quad 2G = \oint \{ \int p'' d\theta : \int q'' d\theta \}^2 d\theta \quad \text{u. s. w. .}$$

(H) Es sei die Ebenenkurve $\xi(t)$ vorgelegt und vorausgesetzt, dass die Tangente von $\xi(t)$ im Punkte t zur entsprechenden Tangente von $e(t)$ parallel ist.

(1) SÜSS, a. a. O., S. 60.

Bezeichnet man den Krümmungsradius der Kurve $\xi(t)$ mit $r(t)$, dann ist der gesuchte Relativschmiegekreis durch

$$(1) \quad \bar{\xi} = \xi(t) - \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} e(t) + \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} e(\sigma)$$

darstellbar, wobei \bar{r} den Krümmungsradius der Eichkurve e und σ einen veränderlichen Parameter bedeutet⁽¹⁾.

Betrachten wir THOMSENS Arbeit über den relativgeometrischen Standpunkt, so müssen wir $\bar{\xi}$ in (1) anstatt ξ in THOMSENS Formeln⁽²⁾

$$(2) \quad \xi_{oo} = -\xi + \bar{c} v + c \bar{v}, \quad v_o = -c \xi_p, \quad \bar{v}^o = -\bar{c} \xi_o$$

setzen.

Ferner untersuchen wir zwei Relativschmiegekreise $\bar{\xi}(t)$ und $\bar{\eta}(t)$; es gelten

$$(3) \quad \bar{\xi} = \xi(t) - \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} c(t) + \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} e(\sigma)$$

und

$$(4) \quad \bar{\eta} = \eta(t) - \frac{R(t)}{\bar{R}(t)} e(t) + \frac{R(t)}{\bar{R}(t)} e(\sigma),$$

woraus man setzen muß:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} &\eta(t) - \frac{R(t)}{\bar{R}(t)} e(t) - \xi(t) + \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} e(\sigma) \\ &\leq \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} e(\sigma) + \frac{R(t)}{\bar{R}(t)} e(\sigma), \end{aligned} \right.$$

da die Koordinaten des Zentrums der Relativschmiegekreise $\bar{\xi}$ und $\bar{\eta}$ in den Vektorformen

$$(6) \quad \xi(t) - \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} e(t)$$

(1) Vgl. KUBOTA, T.: Krümmungstheorie in der relativen Kurventheorie, Tôhoku Imp. Univ. Sci. Reports, Anniversary Volume Dedicated to Prof. K. HONDA, 1936, S. 1.

(2) THOMSEN, G.: Über konforme Geometrie II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ., IV Bd. S. 130.

und

$$(7) \quad \eta(t) - \frac{R(t)}{\bar{R}(t)} \epsilon(t)$$

darstellbar sind. Hier setzen wir voraus, dass in der R-Geometrie alle Gesetze in der gewöhnlichen Geometrie gelten.

Da

$$(8) \quad \frac{r(t)}{r(t)} \epsilon(\sigma)$$

und

$$(9) \quad \frac{R(t)}{R(t)} \epsilon(\sigma)$$

Relativradien von \bar{x} und \bar{y} sind.

Für die Schnittpunkte von \bar{x} und \bar{y} gilt

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \bar{x}(t) - \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} \epsilon(t) + \frac{r(t)}{r(t)} \epsilon(\sigma) \\ & = \eta(t) - \frac{R(t)}{R(t)} \epsilon(t) + \frac{R(t)}{R(t)} \epsilon(\sigma). \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \eta(t) - \frac{R(t)}{R(t)} \epsilon(t) - \bar{x}(t) + \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} \epsilon(\sigma) \\ & = \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} \epsilon(\sigma) + \frac{R(t)}{R(t)} \epsilon(\sigma) \end{aligned} \right.$$

ist die Bedingung dafür, dass sich zwei R.-Kreise \bar{x} und \bar{y} auszen berühren.

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \eta(t) - \frac{R(t)}{R(t)} \epsilon(t) - \bar{x}(t) + \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} \epsilon(t) \\ & = \frac{R(t)}{R(t)} \epsilon(\sigma) - \frac{r(t)}{\bar{r}(t)} \epsilon(\sigma) \end{aligned} \right.$$

ist die Bedingung dafür, dass sich zwei R.-Kreise \bar{x} und \bar{y} innen berühren.

$$(13) \quad \alpha \bar{x} + \beta \bar{y}$$

bezeichnet den Kreisbüschel durch den Schnittpunkt von \bar{x} und \bar{y} , wo α und β skalare Größen sind.

Ist \bar{x} ein Kreis und \bar{z} ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(14) \quad v = 2(\bar{z}\bar{x})\bar{x} - \bar{z}$$

der zu \bar{z} in bezug auf den Kreis \bar{x} inverse Punkt.

Man kann (13), (14) nach (3), (4) mit $x, r, c, \bar{r}, y, R, \bar{R}$ bezeichnen. Weiter kann man untersuchen wie in THOMSENS Arbeit⁽¹⁾.

(I)

$$(1) \quad x^a \quad [a = I, II, \dots]$$

bezeichnet die Punktreihe auf einer Raumkurve in R_n , wo x^a die Punkte in R_n bedeuten.

Bezüglich (1) kann man untersuchen wie in des Verfassers Arbeit⁽²⁾.

Ist

$$(2) \quad (d p)^2 = (d q)^2,$$

so folgt

$$(3) \quad d(p+q) \cdot d(p-q) = 0;$$

daraus ersieht man, dass

$$(4) \quad d\{p+q\} \perp d\{p-q\}$$

gültig ist, wo p und q die Kugeln in R_3 bedeuten.

(J)

$$(1) \quad x^a$$

bezeichnet den Kreis in R_n , wo x^a die Kreise in X_n bedeuten.

Da ist a die ganze Zahl und

$$(2) \quad 2 \leq a \leq (n-1),$$

(1) THOMSEN, G.: Über konforme Geo. II, Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV Bd., 1925, S. 122.

(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXXII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI, 1939, S. 113.

z. B.

$$(3) \quad \{x^I, x^{II}, \dots, x^a\}$$

bezeichnet den Kreis \mathfrak{K} in R_n .

Das Kreiselement von α Dimensionen in der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n mit Koordinatensystem

$$(4) \quad x^i \quad [i = 1, 2, \dots, n; m < n]$$

definiert sich eindeutig durch das System von einem Punkte und einer diesen Punkt enthaltenden kontravarianten m -Richtung.

Diese Richtung wird durch

$$(5) \quad p'_\alpha \quad [\alpha = 1, 2, \dots, m]$$

gegeben.

Die lineare Transformation von Parametern

$$(6) \quad \bar{p}'_\alpha = U_\alpha^i(x) p'_i$$

gibt keinen Anlaß zu wesentlicher Änderung des Kreiselementes, wobei die Koeffizienten U_α^i nur vom Punkt x' abhängig sind.

Ausser dem in X_n liegenden gewöhnlichen Tensor, z. B. H_{ij} , tritt weiter der Tensor anderer Art ein, z. B. $Q_{\alpha\beta}$, wo das Kreiselement (x, p) enthalten ist und bei der Transformation (6) folgendermassen sich transformiert:

$$(7) \quad \bar{Q}_{\alpha\beta} = U_\alpha^i U_\beta^j Q_{ijs}.$$

(K) Der Winkel φ zwischen dem Kreis $x^\alpha(t)$ und der Kugel \mathfrak{y} wird mit⁽¹⁾

$$(1) \quad \cos^2 \varphi (x_\alpha(t) \mathfrak{y}) (x^\alpha(t) \mathfrak{y})$$

oder

$$(1') \quad \cos^2 \varphi = A_{\alpha\beta} (x^\alpha(t) \mathfrak{y}) (x^\beta(t) \mathfrak{y})$$

gegeben, wo t Parameter ist.

Da ist \mathfrak{y} eine feste Kugel.

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeometrie der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34. 1931, S. 199.

Aus (1) kann man wissen, dass die Gleichung der Kegel, deren Erzeugende Kreise sind, mit

$$(2) \quad \text{const.} = (x_\alpha(t) \eta) (x^\alpha(t) \eta) (p x^\alpha(t) = 0$$

oder

$$(2') \quad \text{const.} = A_{\alpha\beta} (x^\alpha(t) \eta) (x^\beta(t) \eta), (p x^\alpha(t) = 0$$

gegeben wird, wo p die Spitze der Kugel ist. Da bilden alle Erzeugenden mit der festen Kugel η konstante Winkel.

Bildet die Erzeugende der Kugel auf η eine geschlossene Kurve, so muss

$$(3) \quad (x_\alpha \eta) (x^\alpha \eta)$$

oder

$$(3') \quad A_{\alpha\beta} (x^\alpha \eta) (x^\beta \eta)$$

eine periodische Funktion haben, deren Periode 2π ist.

$$(4) \quad (x_\alpha(t) \eta) (x^\alpha(t) \eta) = 0$$

oder

$$(4') \quad A_{\alpha\beta} (x^\alpha(t) \eta) (x^\beta(t) \eta) = 0$$

ist die Bedingung dafür, dass

$$(5) \quad x^\alpha(t) \perp \eta$$

gelten.

Gilt

$$(6) \quad (\xi(t) \eta) = \cos \varphi,$$

so ergibt sich aus (1) und (6)

$$(7) \quad (\xi(t) \eta)^3 = (x_\alpha(t) \eta) (x^\alpha(t) \eta)$$

oder

$$(8) \quad (x_\alpha(t) \eta) : (\xi(t) \eta) = (\xi(t) \eta) : (x^\alpha(t) \eta),$$

so folgt der

Satz: Gilt (7), so ist $(\xi(t)\eta)$ das geometrische Mittel zwischen $(\xi_\alpha(t)\eta)$ und $(\xi^\alpha(t)\eta)$.

Da bedeutet $\xi(t)$ die Kreisschar in R_3 .

Gelten

$$(9) \quad \cos^2 \varphi = (\xi_\alpha \eta) (\xi^\alpha \eta)$$

und

$$(10) \quad \cos^2 \bar{\varphi} = (\xi_\alpha \bar{\eta}) (\xi^\alpha \bar{\eta}),$$

so folgt aus (9) und (10)

$$(11) \quad \frac{\cos^2 \bar{\varphi}}{\cos^2 \varphi} = \frac{(\xi_\alpha \bar{\eta}) (\xi^\alpha \bar{\eta})}{(\xi_\alpha \eta) (\xi^\alpha \eta)},$$

wo $\bar{\eta}$ die Kugel in R_3 bedeutet.

Aus (1) folgen

$$(12) \quad \begin{cases} \sin^2 \varphi = 1 - (\xi_\alpha \eta) (\xi^\alpha \eta) \\ \tan^2 \varphi = \{1 - (\xi_\alpha \eta) (\xi^\alpha \eta)\} : (\xi_\alpha \eta) (\xi^\alpha \eta), \quad \text{u. s. w.}, \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} \sinh \varphi = -i \sin i \varphi = -i \sin \{i \cos^{-1} \sqrt{(\xi_\alpha \eta) (\xi^\alpha \eta)}\}, \\ \cosh \varphi = \cos i \varphi = \cos \{i \cos^{-1} \sqrt{(\xi_\alpha \eta) (\xi^\alpha \eta)}\}, \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Ist

$$(14) \quad \varphi = 0$$

in (1), so haben wir

$$(15) \quad 1 = (\xi_\alpha \eta) (\xi^\alpha \eta)$$

oder

$$(16) \quad 1 = A_{\alpha\beta} (\xi^\alpha \eta) (\xi^\beta \eta).$$

(15) oder (16) ist die Bedingung dafür, dass ξ^α auf η liegt.

Gelten

$$(17) \quad \cos^2 \varphi A_{\alpha\beta} (\xi^\alpha \eta) (\xi^\beta \eta)$$

und

$$(18) \quad \cos^2 \bar{\varphi} = A_{\alpha\beta} (\xi^\alpha \bar{\eta}) (\xi^\beta \bar{\eta}),$$

so folgt

$$(19) \quad A_{\alpha\beta}(\xi^\alpha \eta)(\xi^\beta \eta) = A_{\alpha\beta}(\xi^\alpha \bar{\eta})(\xi^\beta \bar{\eta})$$

oder

$$(20) \quad A_{\alpha\beta}(\xi, \eta - \bar{\eta})(\xi^\beta, \eta - \bar{\eta}) = 0$$

d. h.

$$(21) \quad \xi^\alpha \perp \{\eta - \bar{\eta}\},$$

wo ξ^α den Kreis in R_3 und $\eta - \bar{\eta}$ die Kugel in R_3 bedeutet.

Da η und $\bar{\eta}$ die Kugeln in R_3 und ξ^α der Kreis in R_3 ist.

$$(22) \quad \frac{1}{2} = (\xi_\alpha(t) \eta)(\xi^\alpha(t) \eta)$$

zeigt, dass die Kreisschar $\xi^\alpha(t)$ in R_3 mit der festen Kugel η in R_3 den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bildet.

Bestehen beide

$$(23) \quad \cos^2 \varphi = (\xi_\alpha \eta)(\xi^\alpha \eta)$$

und

$$(24) \quad \cos^2 \phi = (\xi_\alpha \bar{\eta})(\xi^\alpha \bar{\eta})$$

zugleich, so ergibt sich

$$(25) \quad \cos^2 \phi (\xi_\alpha \eta)(\xi^\alpha \eta) = \cos^2 \varphi (\xi_\alpha \bar{\eta})(\xi^\alpha \bar{\eta}),$$

wo ϕ und φ gegebene Winkeln η und $\bar{\eta}$ zwei gegebener Kugeln in R_3 bedeuten; es folgt der

Satz: Es seien η und $\bar{\eta}$ zwei gegebene Kugeln in R_3 . Wenn ein Kreis ξ^α in R_3 mit η bzw. $\bar{\eta}$ die Winkel φ bzw. ϕ bildet, so gilt (25).

Insbesondere gilt

$$(26) \quad \phi = \varphi$$

in (25), so folgt

$$(27) \quad (\xi_\alpha \eta)(\xi^\alpha \eta) = (\xi_\alpha \bar{\eta})(\xi^\alpha \bar{\eta}).$$

Ist ein Kreis ξ^α [$\alpha = I, II$] in R_3 gegeben, so sind die Kugeln $\eta(t)$, die auf ξ^α senkrecht sind, mit

$$(28) \quad (\chi_\alpha \eta(t)) (\chi^\alpha \eta(t)) = 0$$

gegeben.

Ist eine Kugel η in R_3 vorgegeben, so ist die Kreise $\chi^\alpha(t)$, die auf η senkrecht sind, mit

$$(29) \quad (\chi_\alpha(t) \eta) (\chi^\alpha(t) \eta) = 0$$

gegeben.

Sind χ^α und $\bar{\chi}^\alpha$ zwei gegebene Kreise in R_3 , so bildet die Kugel η mit χ^α und $\bar{\chi}^\alpha$ den Winkel φ bzw. ϕ bildet, so folgen

$$(30) \quad \cos^2 \varphi = (\chi_\alpha \eta) (\chi^\alpha \eta)$$

und

$$(31) \quad \cos^2 \phi = (\bar{\chi}_\alpha \eta) (\bar{\chi}^\alpha \eta);$$

daraus erhalten wir

$$(32) \quad \cos^2 \phi (\chi_\alpha \eta) (\chi^\alpha \eta) = \cos^2 \varphi (\bar{\chi}_\alpha \eta) (\bar{\chi}^\alpha \eta).$$

(L) Ist ein Kreis χ^α in R_3 gegeben, so ist der Kugelbüschel $\eta(t)$ in R_3 , der mit χ^α einen festen Winkel φ_0 bildet, mit

$$(1) \quad \cos^2 \varphi_0 = (\chi_\alpha \eta(t)) (\chi^\alpha \eta(t))$$

oder

$$(1') \quad \cos^2 \varphi_0 = A_{\alpha\beta} (\chi^\alpha \eta(t)) \chi^\beta \eta(t)$$

gegeben, wo t ein Parameter ist.

$\eta(t)$ in (1) oder in (1') bezeichnet den Kugelbüschel in R_3 .

(M) Nehmen wir einen Punkt u als Linearkombination von $\dot{\chi}^\alpha$ [$\alpha=I, II$], dann folgt

$$(1) \quad u = \rho_\alpha \dot{\chi}^\alpha + \rho_\beta \dot{\chi}^\beta \quad [u, \beta=I, II]$$

wo ρ_α und ρ_β gewisse skalare Zahlen bedeuten; es musz gelten

$$(2) \quad (u u) = \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} + \rho_\alpha \rho_\beta B^{\alpha\beta} + \rho_\alpha \rho_\beta T^{\alpha\beta},$$

wo

$$(3) \quad A^{\alpha\beta}(\xi^\alpha \xi^\beta), \quad B^{\alpha\beta} = (\xi^\alpha \dot{\xi}^\beta), \quad T^{\alpha\beta} = (\dot{\xi}^\alpha \dot{\xi}^\beta)$$

sind⁽¹⁾.

Wenn zwei Punkte u und $\bar{\xi}$ zusammenfallen, so entsteht

$$(4) \quad (u \bar{\xi}) = 0$$

oder

$$(5) \quad (u, \xi - \eta) \{1 + (\xi \eta)\} = 0,$$

d. h. $(5') \quad (u, \xi - \eta) = 0,$

wo

$$(6) \quad \bar{\xi} = \{\xi - \eta\} \cdot \{1 + (\xi \eta)\}$$

gilt⁽²⁾. Da ξ und η Kugeln in R_3 und $\bar{\xi}$ ein Punkt in R_3 ist.

Aus (5') kann man wissen, dass u auf der Kugel $\xi - \eta$ liegt, wenn zwei Punkte u und $\bar{\xi}$ zusammenfallen.

Ist $\bar{\xi}$ eine Kugel in R_3 und u ein nicht auf ihm gelegener Punkt, so ist

$$(7) \quad \eta = 2(u \bar{\xi}) \bar{\xi} - u$$

der zu u in bezug auf die Kugel $\bar{\xi}$ inverse Punkt.

Ist

$$(8) \quad \eta = \bar{\xi},$$

so kommt aus (1) und (7)

$$(9) \quad \{\xi - \eta\} \cdot \{1 + (\xi \eta)\} = 2(\rho_\alpha \xi^\alpha + \rho_\beta \dot{\xi}^\beta, \bar{\xi}) \bar{\xi} - \{\rho_\alpha \xi^\alpha + \rho_\beta \dot{\xi}^\beta\}$$

oder

$$(10) \quad 2(\rho_\alpha \xi^\alpha + \rho_\beta \dot{\xi}^\beta, \bar{\xi}) \bar{\xi} = \rho_\alpha \xi^\alpha + \rho_\beta \dot{\xi}^\beta,$$

wenn

$$(11) \quad \bar{\xi} \equiv \eta.$$

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen, X, XI, XII, Tôhoku Math. Journ., Vol. 34, 1931, S. 201.

(2) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XXXII), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XXVI, 1939, S. 89.

(3)

Im folgenden möchten wir

$$(a) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

in des Verfassers Arbeit untersuchen⁽¹⁾.

(A) Es seien drei Kreise \mathfrak{R} , $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{\bar{\mathfrak{R}}}$ im \mathfrak{R}_3 gegeben.

Ist $\mathfrak{y} = \rho_\alpha \mathfrak{x}^\alpha$ eine normierte Kugel im \mathfrak{R}_3 durch \mathfrak{R} , so setzen wir

$$(1) \quad \mathfrak{y} \mathfrak{y} = \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1.$$

Dann musz sein :

$$(2) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta, \quad \cos^2 \bar{\varphi} = \bar{T}^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta,$$

wo φ der Winkel zwischen \mathfrak{y} und $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{\varphi}$ der zwischen \mathfrak{y} und $\bar{\bar{\mathfrak{R}}}$ ist.

Gilt

$$(3) \quad (T^{\alpha\beta} - \bar{T}^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta = 0$$

oder

$$(4) \quad \varphi = \bar{\varphi}$$

für alle ρ_α , so musz

$$(5) \quad T^{\alpha\beta} = \bar{T}^{\alpha\beta}$$

sein.

(B) Setzen wir

$$(1) \quad f(u, v) \equiv \cos^2 \varphi(u, v) = T^{11} u^2 + 2 T^{12} uv + T^{22} v^2,$$

so folgen

$$(2) \quad f_u = 2(T^{11} u + T^{12} v), \quad f_v = 2(T^{12} u + T^{22} v), \quad f_{uu} = 2 T^{11};$$

so ergibt sich aus

$$(3) \quad f_{uu} + a f_u + b f_v = 0$$

$$(4) \quad (a T^{11} + b T^{12}) u + (a T^{12} + b T^{22}) v + T^{12} = 0.$$

(1) MATUMURA, S.: Beiträge zur Geo. der Kreise und Kugeln (XVI), Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. XVIII, 1936, S. 57.

Gibt (4) für alle Werte von u und v , so folgt

$$(5) \quad a T^{11} + b T^{12} = 0, \quad a T^{12} + b T^{22} = 0, \quad T^{22} = 0$$

oder

$$(6) \quad a = b = 0, \quad T^{12} = 0,$$

(C) Setzen wir $\varphi + d\varphi$, $\rho_1 + d\rho_1$, $\rho_2 + d\rho_2$ anstatt φ , ρ_1 , ρ_2 in

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2,$$

so folgt

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos^2(\varphi + d\varphi) &= T^{11}(\rho_1 + d\rho_1)^2 + 2 T^{12}(\rho_1 + d\rho_1)(\rho_2 + d\rho_2) \\ &\quad + T^{22}(\rho_2 + d\rho_2)^2 = \{T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2\} \\ &\quad + \{2 T^{11} \rho_1 d\rho_1 + T^{12}(\rho_1 d\rho_2 + \rho_2 d\rho_1) + 2 T^{22} \rho_2 d\rho_2 \\ &\quad + T^{11}(d\rho_1)^2 + 2 T^{12} d\rho_1 d\rho_2 + T^{22}(d\rho_2)^2\}, \end{aligned} \right.$$

so erhalten wir

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos^2 \varphi \cos^2 d\varphi &= T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2, \\ -\frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2 d\varphi &= 2 T^{11} \rho_1 d\rho_1 + T^{12}(\rho_1 d\rho_2 + \rho_2 d\rho_1) \\ &\quad + 2 T^{22} \rho_2 d\rho_2, \\ \sin^2 \varphi \sin^2 d\varphi &= T^{11}(d\rho_1)^2 + 2 T^{12} d\rho_1 d\rho_2 + T^{22}(d\rho_2)^2. \end{aligned} \right.$$

Aus (3) kann man wissen, dass, wenn $d\varphi \rightarrow 0$ ist, so folgt:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos^2 \varphi &= T^{11} \rho_1^2 + 2 T^{12} \rho_1 \rho_2 + T^{22} \rho_2^2, \\ -d\varphi \sin 2\varphi &= 2 T^{11} \rho_1 d\rho_1 + T^{12}(\rho_1 d\rho_2 + \rho_2 d\rho_1) + 2 T^{22} \rho_2 d\rho_2, \\ \sin^2 \varphi \cdot (d\varphi)^2 &= T^{11}(d\rho_1)^2 + 2 T^{12} d\rho_1 d\rho_2 + T^{22}(d\rho_2)^2. \end{aligned} \right.$$

(D) Es gibt

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

und

$$(2) \quad A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta = 1,$$

so ergibt sich, dass

und

$$(8) \quad A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta$$

seien positiv definit und es sei

$$(9) \quad T^{11} T^{22} - (T^{12})^2 = A^{11} A^{22} - (A^{12})^2;$$

dann ist, falls die Formen nicht identisch sind⁽¹⁾,

$$(10) \quad (T^{11} - A^{11})(T^{22} - A^{22}) - (T^{12} - A^{12})^2 < 0.$$

(F) Wir betrachten

$$(1) \quad \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta;$$

es folgt

$$(2) \quad (T^{\alpha\beta} - \cos^2 \varphi \cdot A^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta = 0.$$

Weiter untersuchen wir

$$(3) \quad (\bar{T}^{\alpha\beta} - \cos^2 \bar{\varphi} \cdot \bar{A}^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta = 0.$$

es ergeben sich

$$(4) \quad (T^{\alpha\beta} - \cos^2 \varphi \cdot A^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta = 0$$

und

$$(5) \quad (\bar{T}^{\alpha\beta} - \cos^2 \bar{\varphi} \cdot \bar{A}^{\alpha\beta}) \rho_\alpha \rho_\beta = 0,$$

so wird verlangt, die Bedingung dafür aufzustellen, dass die beiden Elementenpaare voneinander harmonisch trennen.

Nach einer leichten Umformung finden wir daraus die gesuchte Bedingung für sich harmonisch trennende Elementenpaare⁽²⁾:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{T^{11} - \cos^2 \varphi \cdot A^{11}\} \{T^{22} - \cos^2 \bar{\varphi} \cdot A^{22}\} \\ - 2 \{T^{12} - \cos^2 \varphi \cdot A^{12}\} \{T^{12} - \cos^2 \bar{\varphi} \cdot A^{12}\} \\ + \{T^{22} - \cos^2 \varphi \cdot A^{22}\} \{T^{11} - \cos^2 \bar{\varphi} \cdot \bar{A}^{11}\} = 0, \end{array} \right.$$

Aus (6) ersieht man, dass φ die Funktion von $\bar{\varphi}$ ist, wenn $T^{\alpha\beta}$ und $\bar{T}^{\alpha\beta}$ gegeben sind.

(1) HOFF, H. und SAMELSON, H.: Zum Beweis des Kongruenzsatzes für Eiflächen, Mathematische Zeitschrift 43 Bd., 1938, S. 762.

(2) Vgl. DOEHLEMAN, K.: Geometrische Transformation, Berlin und Leipzig, 1930, S. 20.

(G) Wir betrachten zwei Kugeln

$$(1) \quad \eta = \rho_\alpha \xi^\alpha$$

und

$$(2) \quad \bar{\eta} = \bar{\rho}_\alpha \bar{\xi}^\alpha$$

in (A); es folgen

$$(3) \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta, & \rho_\alpha \rho_\beta A^{\alpha\beta} = 1, \\ \cos^2 \bar{\varphi} = T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta, & \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta A^{\alpha\beta} = 1 \end{cases}$$

oder

$$(4) \quad \begin{cases} \cos^2 \varphi = \{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta\} : \{A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta\}, \\ \cos^2 \bar{\varphi} = \{T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta\} : \{A^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta\}, \end{cases}$$

so folgt

$$\{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta\} : \{A^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta\} = \{T^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta\} : \{A^{\alpha\beta} \bar{\rho}_\alpha \bar{\rho}_\beta\},$$

wenn

$$\varphi = \bar{\varphi}.$$

(4)

Im folgenden möchten wir

$$(a) \quad (\theta_u \theta_u), \quad (\theta_u \theta_v), \quad (\theta_v \theta_v)$$

untersuchen⁽¹⁾.

(A) Unter „äquidistanten“ Kurven⁽²⁾ auf einer Kreisfläche (K) versteht man nach A. VOSS ein solches System von Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, für das

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + 2(\theta_u \theta_v) du dv + dv^2$$

(1) NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von MOBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri. Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

(2) VOSS, A.: Über ein neues Prinzip der Abbildung krümmender Oberflächen, Math. Annalen, Bd. XIX, S. 1.

wird, bei dem also die Bogenlängen der Einzelkurven zu Parametren genommen werden können.

Aus (1) kann man wissen, dasz

$$(2) \quad \xi = \xi + X \lambda + \Delta(\lambda, X)$$

die A-Fläche⁽¹⁾ ist, wenn (K) A-Fläche ist, wo

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \log \sin w}{\partial v} \frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{\partial \log \cos w}{\partial u} \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0$$

ξ A-Fläche, ferner X Normalenvektor von (K) und endlich

$$(4) \quad \Delta(\lambda, X) = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} - (\theta_u \theta_v) \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right\} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v}}{1 - (\theta_u \theta_v)^2}$$

ist.

Aus (2) ersieht man, dasz

$$(5) \quad \{\xi + X \lambda + \Delta(\lambda, X)\}^2 = \text{const.}$$

die Gleichung einer Kugel ist, deren Mittelpunkt zu dem Ursprung von Koordinaten zusammenfällt.

Wir betrachten die Kurvenscharen

$$(6) \quad du^2 + 2(\theta_u \theta_v) du dv + dv^2 = 0$$

und

$$(7) \quad A du^2 + 2B du dv + dv^2 = 0,$$

wo (6) die Gleichung von Minimalkurven auf (K) ist, so folgt aus (6) und (7)

$$(8) \quad \begin{cases} (1-r)^2 \{A - 2B(\theta_u \theta_v) + C\}^2 \\ = 4(1+r)^2 (AC - B^2) \{1 - (\theta_u \theta_v)^2\}, \end{cases}$$

wo (8) die Bedingung dafür, dasz das Doppelverhältnis zwischen vier Kurven (6), (7) in dem Punkt (u, v) r gleich ist⁽²⁾.

(1) EISENHART, L. P.: Surfaces with the Same Spherical Representation of their Lines of Curvature as Pseudospherical Surfaces, American Journal of Mathematics, Vol. XXVII, S. 119.

(2) LANE, E. P.: Bundles and Pencils of Nets on a Surface, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 28, 1926. S. 150.

(B) Im folgenden möchten wir das Differentialparameter bei der Kreisfläche (K) erwähnen, auf der die äquitangenten Kurven liegen.

Für die beiden Differentialparameter einer willkürlichen Funktion φ und den gemischten Differentialparameter zweier willkürlichen Funktion φ und ψ ergeben sich nach BIANCHIS Buch⁽¹⁾ die Ausdrücke:

$$(1) \quad \Delta_1 \varphi = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2(\theta_u \theta_v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{1 - (\theta_u \theta_v)^2},$$

$$(2) \quad \Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - (\theta_u \theta_v)^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v} - (\theta_u \theta_v) \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{1 - (\theta_u \theta_v)^2}} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v} - (\theta_u \theta_v) \frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{1 - (\theta_u \theta_v)^2}} \right] \right\},$$

$$(3) \quad \nabla(\varphi, \psi) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - (\theta_u \theta_v) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u}}{1 - (\theta_u \theta_v)^2}.$$

Das Flächenelement $d\sigma$ der Oberfläche ist durch den Ausdruck

$$(4) \quad d\sigma = \sqrt{1 - (\theta_u \theta_v)^2} du dv$$

gegeben.

Für das Krümmungsmasz K erhalten wir

$$(5) \quad K = \frac{1}{2\sqrt{1 - (\theta_u \theta_v)^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \frac{2}{\sqrt{1 - (\theta_u \theta_v)^2}} - \frac{\partial(\theta_u \theta_v)}{\partial u} \right\}.$$

Treffen wir nun die besondere Annahme, dass die Parameterlinien aufeinander senkrecht stehen, d. h.

$$(6) \quad (\theta_u \theta_v) = 0$$

sei, so wird der vorstehende Ausdruck für K:

$$(7) \quad K = 0.$$

(1) BIANCHI, L.: *Lezioni di Geometria Differenziale*, Vol. I-Parte I, Bologna, S. 86, S. 123.

Die besonderen Orthogonalsysteme, in denen das Quadrat des Linienelementes der Kreisfläche die Form

$$(8) \quad ds^2 = \lambda (d\varphi^2 + d\psi^2)$$

annimmt, heißen Isothermensysteme.

Ihre Bestimmung hängt, wie man sieht, von der Integration der Gleichung

$$(9) \quad du + \{(\theta_u \theta_v) + i \sqrt{1 - (\theta_u \theta_v)^2}\} dv = 0$$

oder

$$(10) \quad ds^2 = du^2 + 2(\theta_u \theta_v) du dv + dv^2 = 0$$

ab.

Auf einer (\mathbf{K}) nehmen wir zwei Kurven C und C' an, die nicht geodätisch parallel sind, und wählen als Parameterlinien u, v die geodätischen Parallelen zu C und C' , als Parameter u die geodätische Entfernung von der Grundkurve C und als Parameter v diejenige von der Grundkurve C' .

Wenn

$$(11) \quad ds^2 = du^2 + 2(\theta_u \theta_v) du dv + dv^2$$

der Ausdruck für das Quadrat des Linienelements ist, so müssen wir nach BIANCHIS Buch⁽¹⁾

$$(12) \quad \Delta_1 u = 1, \quad \Delta_1 v = 1,$$

d. h.

$$(13) \quad \frac{1}{1 - (\theta_u \theta_v)^2} = 1, \quad \frac{1}{1 - (\theta_u \theta_v)^2} =$$

oder

$$(14) \quad (\theta_u \theta_v) = 0$$

setzen.

(1) BIANCHI, a. a. O., S. 292, oder

LUKAT, M.: BIANCHIS Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin, 1910, 162.

Wird mit ω der Winkel der Parameterlinien bezeichnet, so ist demnach

$$(15) \quad (\theta_u \theta_v) = \cos \omega$$

und folglich

$$(16) \quad ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega \, du \, dv + dv^2.$$

Führen wir nun als neue Parameterlinien die Kurven

$$(17) \quad u + v = \text{const.}, \quad u - v = \text{const.}$$

ein und setzen noch

$$(18) \quad u + v = 2\alpha, \quad u - v = 2\beta,$$

so erhalten wir

$$(19) \quad ds^2 = \frac{d\alpha^2}{\sin^2 \omega/2} + \frac{d\beta^2}{\cos^2 \omega/2}.$$

Die neuen Parameterlinien stehen also aufeinander senkrecht. Weiter kann man untersuchen wie in BIANCHIS Buch.

(C) Wir betrachten eine Kreisfläche (C), deren Bogenelement ds mit

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + 2 \cos (U + V) \, du \, dv + dv^2$$

gegeben ist¹⁾, wo U Funktion von u allein und V Funktion von v allein ist.

Aus (1) folgen die Sätze:

(1) Die Gleichung von Minimallinien auf (C) ist

$$du^2 + 2 \cos (U + V) \, du \, dv + dv^2 = 0.$$

(2) Wenn

$$\cos (U + V) = 0$$

ist, so sind

$$u = \text{const.}$$

1 Vgl. BIANCHI, L.: Lezioni di Geometria Differenziale, Volume II-Parte II, Bologna, 1924, S. 592.

und

$$v = \text{const.}$$

zueinander senkrecht.

(3) Ein Kurvennetz

$$A(u, v) du^2 + 2B(u, v) du dv + C(u, v) dv^2 = 0$$

auf (C) ist dann und nur dann ein Orthogonalsystem, wenn

$$C - 2 \cos(U + V) B + A = 0$$

ist.

(4) Definiert die Differentialgleichung

$$dv/du = \lambda(u, v)$$

auf (C) keine Schar von Minimalkurven, so lautet die Differentialgleichung der Kurven, die zu den durch diese Gleichung definierten einfach unendlich vielen Kurven senkrecht sind:

$$\frac{dv}{du} = - \frac{1 + \cos(U + V) \lambda}{\cos(U + V) + \lambda},$$

u. s. w. .

(D) Wir betrachten $1:T$ in BIANCHIS Buch⁽¹⁾; es folgt

$$(1) \quad \frac{1}{T} = \frac{\{(\theta_u \theta_v) D - (\theta_u \theta_u) D'\} du^2 + \{(\theta_v \theta_v) D - (\theta_u \theta_u) D''\} du dv + \{(\theta_u \theta_v) D' - (\theta_u \theta_v) D''\} dv^2}{\sqrt{(\theta_u \theta_u)(\theta_v \theta_v) - (\theta_u \theta_v)^2}}$$

wenn unsere Fläche eine Kreisfläche ist, wo D, D' und D'' in BIANCHIS Buch⁽¹⁾, und $(\theta_u \theta_u), (\theta_u \theta_v), (\theta_v \theta_v)$ in des Verfassers Arbeit⁽²⁾ stehen.

Wenn $\{1:T\} = 0$,

so

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \{(\theta_u \theta_v) D - (\theta_u \theta_u) D'\} du^2 + \{(\theta_v \theta_v) D \\ & - (\theta_u \theta_u) D''\} du dv + \{(\theta_v \theta_v) D' - (\theta_u \theta_v) D''\} dv^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

(1) BIANCHI, L.: Lezioni di Geometria Differenziale, Vol. I-Part. II, Bologna, 1927 S. 553.

(2) NAKAJIMA, S.: Kugelgeometrie von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

Aus (2) kann man zwei Werte von $du : dv$ erhalten.

Ist

$$(3) \quad (\theta_u \theta_v) = 0,$$

so folgt aus (2)

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\theta_u \theta_u) D' du^2 + \{ (\theta_u \theta_u) D'' - (\theta_i \theta_i) D \} du dv \\ & - (\theta_i \theta_i) D' dv^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

hieraus entsteht

$$(5) \quad \left(\frac{du}{dv} \right)^2 = \frac{(\theta_i \theta_i) D - (\theta_u \theta_u) D''}{2(\theta_u \theta_u)},$$

wenn

$$(6) \quad \{ (\theta_u \theta_u) D'' - (\theta_i \theta_i) D \}^2 + 4(\theta_u \theta_u) D' (\theta_i \theta_i) D' = 0;$$

da kann man sagen, dass, wenn (6) gilt, so beide Werte von $du : dv$ zusammenfallen.

(E) Wenn $(\theta_u \theta_u)$, $(\theta_u \theta_i)$ und $(\theta_i \theta_i)$ in

$$(1) \quad (\theta_u \theta_u) du^2 + 2(\theta_u \theta_i) du dv + (\theta_i \theta_i) dv^2 = 0$$

Konstanten sind, so muss

$$(2) \quad (\theta_u \theta_u) = (\theta_u \theta_i) = (\theta_i \theta_i) = 1$$

sein, da

$$(3) \quad (\theta_i \theta_i) = 1$$

ist.

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$(4) \quad du^2 + 2 du dv + dv^2 = 0$$

oder

$$(5) \quad (du + dv)^2 = 0$$

oder

$$(6) \quad u + v = \text{const.}$$

Sind

$$(7) \quad (\theta_u \theta_u) = u^2, \quad (\theta_u \theta_v) = u,$$

so folgt aus (1)

$$(8) \quad (u du)^2 + u du dv + dv^2 = 0$$

oder

$$(9) \quad \{d(u^2/2)\}^2 + 2 d(u^2/2) dv + dv^2 = 0$$

oder

$$(10) \quad \{d(u/2) + dv\}^2 = 0$$

oder

$$(11) \quad u/2 + v = \text{const.}$$

Weiter kann man (1) untersuchen wie in HOPF und SAMELSONS Arbeit⁽¹⁾.

(F) Nach des Verfassers Arbeit⁽²⁾ kann man

$$(1) \quad \lambda ds^2 = (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2$$

setzen, wo ds das Bogenelement einer Kurve auf unserer Kreisfläche bedeutet.

Wir zerlegen die quadratische Form

$$(2) \quad \lambda ds^2 = (\theta_i \theta_i) dt^2 + 2(\theta_i \theta_\tau) dt d\tau + (\theta_\tau \theta_\tau) d\tau^2$$

in ihre beiden konjugiert imaginären Linearfaktoren

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda ds^2 = & \left[\sqrt{(\theta_i \theta_i)} dt + \{(\theta_i \theta_\tau) dt \right. \\ & + i \sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2} \frac{d\tau}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)}} \Big] \times \left[\sqrt{(\theta_i \theta_i)} dt \right. \\ & + \{(\theta_i \theta_\tau) dt - i \sqrt{(\theta_i \theta_i)(\theta_\tau \theta_\tau) - (\theta_i \theta_\tau)^2} \frac{d\tau}{\sqrt{(\theta_i \theta_i)}} \Big]; \end{aligned} \right.$$

(1) HOPF, H. und SAMELSON, H.: Zum Beweis des Kongruenzsatzes für Einfachen, Math. Zeitschrift, 43, 1937-38, S. 754.

(2) NAKAJIMA, S.: Kugelgeo. von MÖBIUS, Mem. of the Fac. of Sci. and Agri., Taihoku Imp. Univ., Vol. 2, S. 36.

daraus kann man setzen⁽¹⁾

$$(4) \quad \lambda ds^2 = \bar{\lambda} (d\varphi^2 + d\psi^2).$$

(G) Sind zwei Kreisflächen k und \bar{k} in der konformen Abbildung, so ergibt sich

$$(\theta_i \theta_i) : (\theta_i \theta_\tau) : (\theta_\tau \theta_\tau) = (\overline{\theta_i \theta_i}) : (\overline{\theta_i \theta_\tau}) : (\overline{\theta_\tau \theta_\tau}).$$

(1) NAKAJIMA, S.: Differentialgeo. der Kreisscharen (VI), (VII), (VIII), Tôhoku Math. Journ., Vol. 32, 1930, S. 219.

昭和十四年十一月一日印刷

昭和十四年十一月一日發行

總發行所 臺北帝國大學理農學部

印刷者 瀧川 首

臺北市大正町二ノ三七

印刷所 株式會社臺灣日日新報社

臺北市榮町四ノ三二

購員申込所 株式會社臺灣日日新報社

臺北市榮町四ノ三二

同 丸 善 株 式 會 社

東京市日本橋區二丁目

MEMOIRS OF THE FACULTY OF SCIENCE AND AGRICULTURE

RECENT ISSUES

- Volume XXI, No. 1. (Mathematics) (1938)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXIII).
 Ueber Flächen und Kurven (XIX).
- Volume XXI, No. 2. (Mathematics) (1938)**
 MATUMURA, Sôzi: On a Pair of Surfaces Mutually Related, (VII).
- Volume XXI, No. 3. (Mathematics) (1938)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXIV).
- Volume XXI, No. 4. (Mathematics) (1938)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXV).
- Volume XXI, No. 5. (Mathematics) (1938)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXVI).
- Volume XXI, No. 6. (Mathematics) (1938)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXVII).
- Volume XXI, No. 7. (Mathematics) (1938)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXVIII).
- Volume XXI, No. 8. (Mathematics) (1939)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXIX).
 Ueber Flächen und Kurven (XX).
- Volume XXI, No. 9. (Mathematics) (1939)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXX).
- Volume XXII, No. 1. (Geology) (1938)**
 HAYASAKA, Ichirô: Two Species of *Trachydoria* from Japan.
- Volume XXII, No. 2. (Geology) (1939)**
 HAYASAKA, Ichirô and ISHIZAKI, Kazuhiko: On the Occurrence of Eocene Foraminifera in the Neighbourhood of Besleo, Timor.
 HAYASAKA, Ichirô: SPIROMPHALUS, a New Gastropod Genus from the Permian of Japan.
- Volume XXIII, No. 1. (Zoology) (1938)**
 AOKI, Bunichirô and TANAKA, Ryô: Bio-statistical Research on *Rattus losea* (SWINHOE, 1870), a Formosan Wild Rat, with Special Reference to its Diagnostic Characters for Taxonomy.
- Volume XXIII, No. 2. (Zoology) (1939)**
 TANAKA, Ryô: Seasonal Variations in the Pelage Characters of a Formosan Wild Rat, *Rattus losea* (SWINHOE).
- Volume XXIV, No. 1. (Entomology) (1938)**
 MAKI, Takashi: Studies on the Thoracic Musculature of Insects.
- Volume XXV, No. 1. (Soil and Fertilizer) (1939)**
 SAKKI, Hideaki: Studies on Humus-Clay Complexes.
- Volume XXVI, No. 1. (Mathematics) (1939)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXI).
- Volume XXVI, No. 2. (Mathematics) (1939)**
 MATUMURA, Sôzi: Ueber Flächen und Kurven (XXI).
- Volume XXVI, No. 3. (Mathematics) (1939)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXII).
- Volume XXVI, No. 4. (Mathematics) (1939)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXIII).
- Volume XXVI, No. 5. (Mathematics) (1939)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXIV).
- Volume XXVI, No. 6. (Mathematics) (1939)**
 MATUMURA, Sôzi: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln (XXXV).

L.A.R.1. 75

INDIAN AGRICULTURAL RESEARCH
INSTITUTE LIBRARY, NEW DELHI.

[illegible]

GIPNLK-H-40 I.A.R.I.-29-4- 5-15,000